ΧΡ. Γ. ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ
ΚΑΙ
Δ΄, Ε΄, ΣΤ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1975



ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τὸ ἀνὰ χεῖρας βιβλίον ἀπευθύνεται πρὸς τοὺς μαθητὰς τῶν τεσσάρων τελευταίων τάξεων τῶν Γυμνασίων θεωρητικῆς κατευθύνσεως καὶ πραγματεύεται διεξοδικῶς τὰ διὰ τὰς ἐν λόγῳ τάξεις θέματα τῆς ὕλης τῆς Εὐκλειδείου Γεωμετρίας τῆς καθοριζομένης ὑπὸ τοῦ ἰσχύοντος ἐπισήμου ἀναλυτικοῦ προγράμματος τοῦ Ὑπουργείου Ἐθνικῆς Παιδείας καὶ Θρησκευμάτων.

Ἔχει καταβληθῆ ἰδιαιτέρα προσπάθεια διὰ τὴν εὔληπτον καὶ κατὰ τὸ δυνατὸν ἁπλουστέραν ἔκθεσιν τῶν περιεχομένων θεμάτων, χωρὶς τοῦτο νὰ γίνεται εἰς βάρος τῆς ἐπιστημονικῆς ἀρτιότητος τοῦ βιβλίου. Ἐδάφια τὰ ὁποῖα ἔχουν σημειωθῆ δι' ἀστερίσκου, δύνανται νὰ παραληφθοῦν εἰς πρώτην ἀνάγνωσιν, ἐκρίθη σκόπιμος ὅμως ἡ ἀναγραφή των διὰ τὴν ὁλοκλήρωσιν τοῦ ἔργου καὶ δέον νὰ μελετηθοῦν ἀργότερον ὑπὸ τῶν ἐνδιαφερομένων διὰ τὴν βαθυτέραν γνῶσιν τῆς γεωμετρίας.

Ἔχει ἐκτεθῆ ἱκανὸν πλῆθος παραδειγμάτων εἰς τὰς περιοχὰς τῶν γεωμετρικῶν τόπων καὶ κατασκευῶν, αἱ δὲ προτεινόμεναι ἀσκήσεις πρὸς λύσιν κλιμακοῦνται εἰς δύο κατηγορίας, ὑπὸ τὸ στοιχεῖον Α τῶν ἁπλουστέρων καὶ ὑπὸ τὸ στοιχεῖον Β τῶν δυσκολωτέρων, ὥστε νὰ παρέχεται ἡ εὐχέρεια εἰς τὸν μαθητὴν τῆς προοδευτικῆς μεταβάσεως εἰς τὰς δυσκόλους ἀσκήσεις.

Τέλος μὲ τὴν πεποίθησιν ὅτι ἔχω ἐπιτύχει τὸν σκοπόν μου, παραδίδω τὸ βιβλίον εἰς τὴν μαθητιῶσαν νεολαίαν.

ΧΡΗΣΤΟΣ Γ. ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ἡ ἀρίθμησις ἀναφέρεται εἰς παραγράφους

ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ §§

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ §§

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ §§

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ §§

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΚΤΟΝ §§

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ §§

ΜΕΡΟΣ Α'

ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Γεωμετρία καλεῖται ὁ κλάδος τῶν μαθηματικῶν, ὁ ὁποῖος ἐξετάζει τὸ σχῆμα καὶ τὴν ἔκτασιν τῶν στερεῶν σωμάτων, ὡς καὶ τὰς μετρικὰς σχέσεις, αἱ ὁποῖαι ὑφίστανται μεταξὺ αὐτῶν. Ἀδιαφορεῖ διὰ τὴν ὕλην καὶ ἐνδιαφέρεται μόνον διὰ τὴν μορφὴν τῶν στερεῶν, θεωροῦσα αὐτὰ ἄϋλα καὶ ὡς ἐκ τούτου ἔχει τὸ δικαίωμα νὰ τὰ μεταφέρῃ καὶ νὰ θέτῃ τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἢ καὶ τὸ ἓν ἐντὸς τοῦ ἄλλου.

Ἱστορικὸν σημείωμα. Γεωμετρία κατὰ τοὺς ἀρχαίους, εἶναι ἡ τέχνη τοῦ μετρᾶν τὴν Γῆν (τὸ ἔδαφος). Ὁ πατὴρ τῆς ἱστορίας Ἡρόδοτος ἀναφέρει ὅτι ἡ γεωμετρία ἐδημιουργήθη εἰς τὴν Αἴγυπτον τὴν ἐποχήν, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ βασιλεὺς Σέσωστρις διένειμεν εἰς κλήρους τὸ ἔδαφος τῆς Αἰγύπτου καὶ παρέστη ἀνάγκη νὰ ἀνευρίσκῃ ἕκαστος Αἰγύπτιος τὸν γεωργικὸν κλῆρον του, μετὰ ἑκάστην πλημμύραν τοῦ Νείλου.

Παρὰ ταῦτα ἡ ἀληθὴς πατρὶς τῆς Γεωμετρίας εἶναι ἡ ἀρχαία Ἑλλάς, διότι οἱ ἀρχαῖοι πρόγονοί μας ἔδωσαν μεγάλην ὤθησιν εἰς τὴν σπουδήν της. Ὡς πρῶτος θεμελιωτὴς τῆς γεωμετρίας θεωρεῖται ὁ Θαλῆς ὁ Μιλήσιος (ΣΤ' αἰὼν π.Χ.), ὁ ὁποῖος διὰ τοῦ θεωρήματος τῶν ἀναλόγων τμημάτων, τῶν περιλαμβανομένων μεταξὺ παραλλήλων εὐθειῶν, ὑπελόγισε τὸ ὕψος αἰγυπτιακῆς πυραμίδος, καταπλήξας τὸν βασιλέα τῆς Αἰγύπτου Ἄμασιν. Ὁ Θαλῆς ἵδρυσεν εἰς Μίλητον τὴν Ἰωνικὴν Σχολὴν καὶ ἐπλούτισε τὰς γεωμετρικὰς γνώσεις.

Ἡ σπουδὴ τῆς γεωμετρίας ἐξακολουθεῖ εἰς τὴν μεγάλην Ἑλλάδα (κάτω Ἰταλίαν) ὅπου ὁ ἐκ Σάμου Πυθαγόρας (580 - 500 π. Χ.) ἵδρυσεν εἰς τὸν Κρότωνα τὴν περίφημον Σχολήν του. Κατόπιν ὁ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος (450 π. Χ.) ἐδημοσίευσε Στοιχεῖα Γεωμετρίας, θεωρεῖται δὲ ὡς ὁ πρῶτος γράψας βιβλίον γεωμετρίας.

Μετὰ ὁ φιλόσοφος Πλάτων (430 - 347 π. Χ.) ἐπεξέτεινε τὴν σπουδὴν τῆς γεωμετρίας, τόσην δὲ σημασίαν ἔδωσεν εἰς αὐτήν, ὥστε εἰς τὸ ἄνω μέρος τῆς θύρας τῆς ἱδρυθείσης ὑπ' αὐτοῦ ἐν Ἀθήναις Σχολῆς, τῆς «Ἀκαδημίας», ἀνέγραψε τὸ ρητόν : «μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω». Εἰς τὸν Πλάτωνα ὀφείλεται ἡ εἰσαγωγὴ τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδου ἐρεύνης καὶ ἡ διδασκαλία τῶν γεωμετρικῶν τόπων.

Κατόπιν οἱ τρεῖς μεγάλοι ἀρχαῖοι συγγραφεῖς μαθηματικῶν βιβλίων Εὐκλείδης (330 - 270 π. Χ.), Ἀρχιμήδης (287 - 212 π. Χ.) καὶ Ἀπολλώνιος (260 - 200 π. Χ.) συνετέλεσαν κατὰ πολὺ εἰς τὴν περαιτέρω ἀνάπτυξιν τῆς γεωμετρίας, ἰδίως δὲ ὁ Εὐκλείδης μὲ τὰ «Στοιχεῖα», σύγγραμμα ἀποτελούμενον ἀπὸ 13 βιβλία. Εἰς τὸν Εὐκλείδην ὀφείλεται ἡ εἰσαγωγὴ τῆς μεθόδου τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς, εἰς δὲ τὸν Ἀρχιμήδην ὀφείλονται αἱ πρῶται ἔννοιαι τῶν ὁρίων. Ὤθησιν ἐπίσης ἔδωσαν εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς γεωμετρίας καὶ οἱ Ἀλεξανδρινοὶ Μενέλαος (80 π. Χ.), Πτολεμαῖος (125 μ. Χ.) καὶ Πάππος (Γ' Αἰὼν μ. Χ.).

Μετὰ τοὺς Ἀλεξανδρινούς, ἡ ἀνάπτυξις τῶν γεωμετρικῶν γνώσεων ὑπῆρξε βραδυτάτη μέχρι τῆς Ἀναγεννήσεως. Μετὰ τὴν Ἀναγέννησιν ἤρχισεν ἡ ἁλματώδης πρόοδος τῆς γεωμετρίας. Ὁ Καρτέσιος (Descartes 1596 - 1650) μὲ τὰς ὀρθογωνίους συντεταγμένας ἑνὸς σημείου, δημιουργεῖ τὴν ἀναλυτικὴν γεωμετρίαν, ἰδιαίτερον κλάδον τῆς γεωμετρίας, ὁ ὁποῖος συνετέλεσε πάρα πολὺ εἰς τὴν περαιτέρω ἀνάπτυξιν τῶν μαθηματικῶν καὶ παρέσχε νέας μεθόδους ἐρεύνης. Αἱ νέαι αὗται μέθοδοι καὶ ἡ κατὰ τὸν ΙΖ' αἰῶνα διατύπωσις τῆς ἀπειροστικῆς ἀναλύσεως, συνετέλεσαν εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς γεωμετρίας καὶ πρὸς ἄλλας κατευθύνσεις. Οὕτω ἐδημιουργήθησαν καὶ ἄλλοι κλάδοι τῆς γεωμετρίας, ὅπως ἡ διαφορικὴ γεωμετρία, ἡ παραστατικὴ γεωμετρία, ἡ προβολικὴ γεωμετρία ἢ γεωμετρία τῆς θέσεως κ.λ.π.

2. Πρωταρχικαὶ ἔννοιαι. Ἡ γεωμετρία θεωροῦσα τὰ ἀντικείμενά της ἄϋλα, δημιουργεῖ φανταστικὰ εἴδωλα αὐτῶν καὶ ὡς ἐκ τούτου ἔχει ἀνάγκην σαφοῦς θεμελιώσεως. Εὑρισκόμενοι εἰς ἀδυναμίαν νὰ ὁρίσωμεν τὰς πρώτας ἐννοίας τῆς γεωμετρίας, θεωροῦμεν αὐτὰς γνωστὰς καὶ τὰς καλοῦμεν **πρωταρχικὰς ἐννοίας.** Αὗται εἶναι τὸ **«σημεῖον»** ἡ **«εὐθεῖα»**, ἡ **«γραμμή»**, τὸ **«ἐπίπεδον»** ἡ **«ἐπιφάνεια»** καὶ ὁ **«χῶρος»**. Ἐπὶ τῶν ἐννοιῶν τούτων θὰ θεμελιωθῇ μιὰ γεωμετρικὴ θεωρία διὰ τῶν προτάσεών της.

3. Συμβολισμός. Τὰ σημεῖα συνήθως θὰ συμβολίζωνται μὲ τὰ κεφαλαῖα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, αἱ εὐθεῖαι μὲ τὰ μικρὰ γράμματα ἐγκεκλισμένα ἐντὸς παρενθέσεων καὶ τὰ ἐπίπεδα μὲ τὰ κεφαλαῖα γράμματα ἐγκεκλισμένα ἐντὸς παρενθέσεων.

4. Αἱ προτάσεις τῆς γεωμετρίας. i). Ἀξίωμα καλεῖται μία πρότασις, τὴν ὁποίαν δεχόμεθα ὡς ἀληθῆ. Τὰ ἀξιώματα, κατὰ κανόνα, εἶναι προτάσεις ἀφ' ἑαυτῶν φανεραί, ἀπορρέουσαι ἐκ τῆς ἐμπειρίας μας, πάντως εἶναι προτάσεις αὐθαιρέτως παραδεκταί. Μία γεωμετρικὴ θεωρία θεμελιοῦται ἐπὶ πεπερασμένου ἀριθμοῦ ἀξιωμάτων.

Ὡς ἐκ τούτου δυνάμεθα νὰ δημιουργήσωμεν περισσοτέρας τῆς μιᾶς γεωμετρικὰς θεωρίας, ἑκάστη δὲ θὰ βασίζεται εἰς ἀξιώματα ἐκ τῶν ὁποίων ὡρισμένα τοὐλάχιστον δὲν εἶναι παραδεκτὰ ὑπὸ τῆς ἄλλης. Οὕτω ἐκτὸς τῆς Εὐκλειδείου Γεωμετρίας, μὲ τὴν ὁποίαν καὶ θὰ ἀσχοληθῶμεν, ἐδημιουργήθησαν κατὰ καιροὺς καὶ ἄλλαι γεωμετρικαὶ θεωρίαι βασιζόμεναι εἰς διαφορετικὰς ὁμάδας ἀξιωμάτων, αἱ πλέον ἀξιόλογοι τῶν ὁποίων εἶναι τοῦ Gauss (1777 - 1856), τοῦ Lobatchefsky (1793 - 1856) καὶ τοῦ Riemann (1826 - 1866). Αἱ γεωμετρίαι αὗται ὀνομάσθησαν μὴ Εὐκλείδειοι γεωμετρίαι, ἢ ἀντευκλείδειοι γεωμετρίαι.

ii). **Θεώρημα** καλεῖται μία πρότασις, ἡ ἀλήθεια τῆς ὁποίας γίνεται φανερὰ κατόπιν ἀποδείξεως, ἤτοι κατόπιν λογικῆς ἐπεξεργασίας βασιζομένης ἐπὶ τῶν τεθέντων ἀξιωμάτων καὶ τῶν προηγουμένως ἀποδεδειγμένων θεωρημάτων.

iii). **Πόρισμα** καλεῖται μία πρότασις, ἡ ὁποία εἶναι ἄμεσος συνέπεια μιᾶς ἄλλης προτάσεως (ἢ ἄλλων προτάσεων) καὶ ὡς ἐκ τούτου ἡ ἀπόδειξίς της συνήθως εἶναι περιττὴ ὡς προφανής.

iv). **Πρόβλημα** καλεῖται μία πρότασις, ἡ ὁποία ἐπὶ τῇ βάσει δεδομένων γνωστῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα παρέχει, ζητεῖ νὰ ὑπολογισθῇ ἢ νὰ κατασκευασθῇ γεωμετρικόν τι μέγεθος. **Λύσις** τοῦ προβλήματος καλεῖται ἡ διαδικασία τοῦ ὑπολογισμοῦ ἢ τῆς κατασκευῆς τοῦ ζητουμένου.

v). **Αἴτημα.** Οὐσιώδης διαφορὰ μεταξὺ αἰτήματος καὶ ἀξιώματος δὲν ὑπάρχει. Τὸ αἴτημα, ὅπως καὶ τὸ ἀξίωμα, εἶναι πρότασις μὴ δυναμένη νὰ ἀποδειχθῇ.

Ὁ Εὐκλείδης (περὶ τὸ 285 π.Χ.) εἰς τὸ Α' βιβλίον τῶν «Στοιχείων» του διετύπωσε πρότασιν μὴ ἀποδειχθεῖσαν, τὴν ὁποίαν ἐκάλεσεν αἴτημα ἐπιζητῶν τὴν παραδοχήν της, διότι ἐγνώριζεν ὅτι ἡ μὴ παραδοχὴ τῆς προτάσεώς του, εἶναι δυνατὸν νὰ μὴ ὁδηγῇ εἰς ἄτοπα συμπεράσματα (βλ. καὶ § 88).

vi). **Λῆμμα** καλεῖται βοηθητικὴ πρότασις χρήζουσα ἀποδείξεως (βοηθητικὸν θεώρημα), ἡ ὁποία προτάσσεται θεωρήματος διὰ νὰ ἁπλουστεύσῃ καὶ συντομεύσῃ τὴν ἀπόδειξιν αὐτοῦ.

5. **Ἡ Λογικὴ τῶν προτάσεων.** Μία γεωμετρικὴ πρότασις περιέχει στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα δεχόμεθα ὅτι ἰσχύουν καὶ θὰ τὰ καλοῦμεν **ὑποθέσεις** καὶ ἄλλα στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα ἕπονται καὶ θὰ τὰ καλοῦμεν **συμπεράσματα.** Αἱ ὑποθέσεις καὶ τὰ συμπεράσματα μιᾶς προτάσεως καλοῦνται **συνθῆκαι** αὐτῆς.

6. **Ἀντίστροφος πρότασις.** Ἐὰν εἰς μίαν γεωμετρικὴν πρότασιν ἐναλλάξωμεν τὰς θέσεις ὑποθέσεων καὶ συμπερασμάτων καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους, τότε δημιουργοῦμεν ἄλλας γεωμετρικὰς προτάσεις, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται **ἀντίστροφοι** τῆς πρώτης. Ἐὰν ἡ πρότασις περιέχῃ μίαν ὑπόθεσιν καὶ ἓν συμπέρασμα τότε ἔχει μίαν μόνον ἀντίστροφον πρότασιν.

7. **Συνεπαγωγή.** Ἐὰν μία συνθήκη Α ἔχῃ ὡς συνέπειαν μίαν ἄλλην συνθήκην Β, τότε λέγομεν ὅτι ἐκ τῆς Α συνεπάγεται ἡ Β καὶ συμβολίζομεν

$$A \Rightarrow B$$

Ἡ σχέσις αὕτη καλεῖται **συνεπαγωγή.**

Εἰς τὴν ἀνωτέρω συνεπαγωγήν, ἡ συνθήκη Α καλεῖται **ἱκανὴ** διὰ τὴν Β, διότι ἐὰν ὑπάρχῃ ἡ Α, τοῦτο εἶναι ἀρκετὸν (ἱκανὸν) διὰ τὴν ὕπαρξιν καὶ τῆς Β.

Ἐὰν διὰ τὰς συνθήκας Α καὶ Β συμβαίνῃ $A \Rightarrow B$ ἀλλὰ καὶ $B \Rightarrow A$, τότε

τὰς καλοῦμεν ἰσοδυνάμους συνθήκας ἢ ἰσοδυνάμους προτάσεις καὶ συμβολίζομεν

$$A \Longleftrightarrow B$$

ἑκάστη δὲ ἐξ αὐτῶν καλεῖται **ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ** συνθήκη διὰ τὴν ἄλλην.

Κατὰ ταῦτα ἡ φράσις «δείξατε ὅτι ἡ συνθήκη Α εἶναι ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ διὰ τὴν συνθήκην Β» μᾶς ὑποχρεώνει εἰς τὴν ἀπόδειξιν τῆς συνεπαγωγῆς $A \Rightarrow B$, διὰ τῆς ὁποίας ἡ Α χαρακτηρίζεται ἱκανὴ διὰ τὴν Β, ἀλλὰ καὶ τῆς ἀντιστρόφου της $B \Rightarrow A$ διὰ τῆς ὁποίας ἡ Α ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι ἀναγκαία συνέπεια τῆς Β.

Ἐνίοτε ἡ φράσις «ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη», διατυποῦται καὶ ὡς ἑξῆς: **«τότε καὶ μόνον τότε»** ἢ **«πρέπει καὶ ἀρκεῖ»**.

Ἀπὸ τὴν συνεπαγωγὴν $A \Rightarrow B$ διατυπώνομεν συναφῶς καὶ τὰς ἑξῆς προτάσεις

Ἀπὸ ὄχι $A \Rightarrow$ ὄχι B

ἡ ὁποία καλεῖται **ἀντίθετος** τῆς ἀρχικῆς καὶ

Ἀπὸ ὄχι $B \Rightarrow$ ὄχι A

ἡ ὁποία καλεῖται **ἀντιστροφοαντίθετος** τῆς ἀρχικῆς.

8. Ὁ χῶρος εἶναι θεμελιώδης ἔννοια γνωστὴ ἐκ τῆς ἐμπειρίας μας (περιβάλλον εἰς τὸ ὁποῖον ζοῦμε). Ἐντὸς τοῦ χώρου ὑπάρχει ἡ ὕλη εἰς ὅλας τὰς μορφάς της καὶ ἐντὸς αὐτοῦ συμβαίνουν τὰ φυσικὰ φαινόμενα.

9. Γεωμετρικὸν σχῆμα καλεῖται ἡ ἄϋλος ἀπεικόνισις κάθε ὑποσυνόλου τοῦ (αἰσθητοῦ) χώρου εἰς τὸν χῶρον τῆς νοήσεως. Ἡ ἀπεικόνισις αὐτὴ εἶναι ἐν γένει ἓν σύνολον ἀπὸ σημεῖα, γραμμὰς καὶ ἐπιφανείας, δηλαδὴ εἶναι ἓν σημειοσύνολον, δεδομένου ὅτι αἱ γραμμαὶ καὶ αἱ ἐπιφάνειαι εἶναι σημειοσύνολα.

Τὸ γεωμετρικὸν σχῆμα οὐδέποτε μᾶς πείθει διὰ κάποιαν ἰδιότητα, τὴν ὁποίαν ἔχει ἐνδεχομένως τὸ ἐξεταζόμενον μέσῳ αὐτοῦ στερεόν. Ἁπλῶς μᾶς ὑποβοηθεῖ διὰ τὴν ἀνακάλυψιν καὶ ἀπόδειξιν αὐτῆς.

10. Αἱ τρεῖς βασικαὶ κατηγορίαι ἀξιωμάτων. Αἱ θεμελιώδεις ἔννοιαι τῆς γεωμετρίας εἶναι τὸ **σημεῖον**, ἡ **εὐθεῖα** καὶ τὸ **ἐπίπεδον**. Εἶναι ἔννοιαι μὴ δυνάμεναι νὰ ὁρισθοῦν (πρωταρχικαὶ ἔννοιαι) καὶ δι' αὐτῶν συγκροτοῦνται ὅλα τὰ γεωμετρικὰ σχήματα.

Τὸ σημεῖον δὲν ἔχει σχῆμα οὔτε ἔκτασιν, ἀλλὰ ἔχει μόνον θέσιν.

Λεπτὸν τεταμένον νῆμα δίδει τὴν εἰκόνα μέρους εὐθείας γραμμῆς.

Τέλος ἡ ἐπιφάνεια ἠρεμοῦντος ὕδατος (περιωρισμένων διαστάσεων), δύναται νὰ δώσῃ τὴν εἰκόνα μέρους ἐπιπέδου ἐπιφανείας.

Τὰ ἀνωτέρω δὲν ἀποτελοῦν μαθηματικοὺς ὁρισμοὺς τῶν γεωμετρικῶν τούτων στοιχείων, ἀλλὰ αὐτὰ ἔχουν καθορισμένας ἰδιότητας περιγραφομένας ὑπὸ ἀξιωμάτων.

Τὰ ἀξιώματα ἐπὶ τῶν ὁποίων θεμελιοῦται ἡ Εὐκλείδειος Γεωμετρία, διαιροῦνται κυρίως εἰς τρεῖς ὁμάδας, ἤτοι :

i). **'Αξιώματα θέσεως.** Τὰ ἀξιώματα τῆς ὁμάδος αὐτῆς ἐγκλείουν τὴν ἔννοιαν τοῦ **«περιέχειν»** ἢ **«περιέχεσθαι»**.

ii). **'Αξιώματα ἰσότητος.** Ταῦτα διέπουν τὴν σχέσιν τῆς βασικῆς ἰσότητος, μὲ τὴν ὁποίαν θὰ ἐφοδιασθῇ τὸ σύνολον τῶν σχημάτων.

iii). **'Αξιώματα διατάξεως.** Ταῦτα διέπουν τὰς σχετικὰς θέσεις σημείων πρὸς ἄλληλα καὶ τὰς σχέσεις μεγέθους τῶν γεωμετρικῶν στοιχείων.

Εἰς τὰ ἑπόμενα ἡ θεμελίωσις τῆς Εὐκλειδείου Γεωμετρίας θὰ συμπληρωθῇ καὶ μὲ ἄλλα τινὰ ἀξιώματα, ἐκ τῶν ὁποίων σπουδαιότερον εἶναι τὸ ἀξίωμα τοῦ Εὐκλείδου, σχετικὸν μὲ τὰς παραλλήλους εὐθείας.

11. 'Αξιώματα θέσεως. 'Αξίωμα I. Μία εὐθεῖα περιέχει τοὐλάχιστον δύο σημεῖα Α καὶ Β, ὑπάρχει δὲ τοὐλάχιστον ἓν σημεῖον Γ ἐκτὸς τῆς εὐθείας.

Παρατήρησις. Ὅταν θὰ λέγωμεν «δύο σημεῖα» ἀντιστοίχως «δύο εὐθεῖαι» ἢ «δύο ἐπίπεδα» θὰ τὰ ἐννοοῦμεν ἐν γένει διακεκριμένα, δηλαδὴ μὴ συμπίπτοντα.

'Αξίωμα II. Διὰ δύο σημείων μία καὶ μόνον μία εὐθεῖα διέρχεται.

'Εξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι δύο σημεῖα Α καὶ Β, ὁρίζουν πλήρως τὴν θέσιν μιᾶς μόνον εὐθείας, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ συμβολίζωμεν καὶ ὡς εὐθ.ΑΒ.

'Αξίωμα III. Ἓν ἐπίπεδον περιέχει τρία τοὐλάχιστον σημεῖα Α, Β, Γ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, ὑπάρχει δὲ τοὐλάχιστον ἓν σημεῖον Δ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου.

'Αξίωμα IV. Διὰ τριῶν σημείων μὴ κειμένων ἐπ' εὐθείας, ἓν καὶ μόνον ἓν ἐπίπεδον διέρχεται.

'Εξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι τρία σημεῖα Α, Β καὶ Γ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, ὁρίζουν πλήρως τὴν θέσιν ἑνὸς μόνον ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ συμβολίζωμεν καὶ ὡς ἐπίπ.(ΑΒΓ).

'Αξίωμα V. Ἂν Α καὶ Β εἶναι δύο σημεῖα ἐπιπέδου (Π), ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἀνήκει εἰς τὸ (Π).

Διὰ τὴν εὐθεῖαν καὶ τὸ ἐπίπεδον δεχόμεθα ἐπὶ πλέον καὶ τὰ ἀκόλουθα ἀξιώματα :

'Αξίωμα VI. Μία εὐθεῖα ΑΒ ἐκτείνεται ἀπεριορίστως ἑκατέρωθεν τῶν σημείων Α καὶ Β.

'Αξίωμα VII. Ἓν ἐπίπεδον (ΑΒΓ) ἐκτείνεται ἀπεριορίστως.

12. Μετατόπισις σχήματος καλεῖται πᾶσα ἀλλαγὴ τῆς θέσεως αὐτοῦ

ἐντὸς τοῦ χώρου. Συμβατικῶς δεχόμεθα ὅτι ὑπάρχει καὶ ταυτοτικὴ μετατόπισις, ἡ ὁποία ἀφίνει κάθε σχῆμα εἰς τὴν αὐτὴν θέσιν.

Ἀξίωμα VIII. Πᾶσα μετατόπισις σχήματος (Σ) δὲν τὸ μεταβάλλει.

13. Ἴσα σχήματα. Τὸ σύνολον τῶν σχημάτων τὸ ἐφοδιάζομεν μὲ μίαν σχέσιν βασικῆς ἰσότητος, ἡ ὁποία ἔχει τὴν ἑξῆς ἔννοιαν :

Δύο σχήματα (Σ_1) καὶ (Σ_2) καλοῦνται ἴσα τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν ὑπάρχῃ μετατόπισις, ἡ ὁποία νὰ θέτῃ τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου εἰς τρόπον, ὥστε τὰ δύο σχήματα νὰ ταυτισθοῦν, ἤτοι ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἑνὸς νὰ συμπέσῃ μὲ ἓν σημεῖον τοῦ ἄλλου καὶ ἀντιστρόφως. Συμβολικῶς γράφομεν

$$(\Sigma_1) = (\Sigma_2)$$

14. Ἀξιώματα τῆς ἰσότητος. Διὰ τὴν σχέσιν τῆς βασικῆς ἰσότητος δεχόμεθα τὰ κάτωθι ἀξιώματα.

Ἀξίωμα I. Ἕκαστον σχῆμα (Σ) εἶναι ἴσον πρὸς ἑαυτό, ἤτοι :

$$(\Sigma) = (\Sigma)$$

Ἐξ αὐτοῦ ἡ σχέσις τῆς βασικῆς ἰσότητος καλεῖται **ἀνακλαστική**.

Ἀξίωμα II. Ἐὰν $(\Sigma_1) = (\Sigma_2)$, τότε καὶ $(\Sigma_2) = (\Sigma_1)$. Συντόμως γράφωμεν

$$(\Sigma_1) = (\Sigma_2) \Rightarrow (\Sigma_2) = (\Sigma_1)$$

Ἐξ αὐτοῦ ἡ σχέσις τῆς βασικῆς ἰσότητος καλεῖται **συμμετρική**.

Ἀξίωμα III. Ἂν δύο σχήματα εἶναι ἴσα πρὸς τρίτον, τότε εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσα. Συντόμως γράφομεν :

$$(\Sigma_1) = (\Sigma_2) \wedge (\Sigma_2) = (\Sigma_3) \Rightarrow (\Sigma_1) = (\Sigma_3).$$

Ἐξ αὐτοῦ ἡ σχέσις τῆς βασικῆς ἰσότητος καλεῖται **μεταβατική**.

15. Διάταξις σημείων ἐπ' εὐθείας. Ἐὰν ὑπάρχουν τρία διάφορα ἀλλήλων σημεῖα Α, Β καὶ Γ ἀνήκοντα εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (δ) καὶ



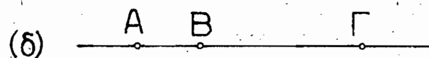
Σχ. 1

κεῖνται ὡς πρὸς ἄλληλα ὅπως εἰς τὸ σχῆμα 1, τότε τὸ σημεῖον Γ καλεῖται **ἐνδιάμεσον** τῶν Α καὶ Β. Ἰσοδυνάμως λέγομεν ὅτι τὸ σημεῖον Γ ἔχει ἑκατέρωθεν αὐτοῦ τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Ἡ σημειοσειρὰ Α, Γ, Β ὅπως ἔχει εἰς τὸ σχ. 1,

λέγομεν ὅτι εἶναι μία διάταξις τῶν τριῶν σημείων ἐπὶ τῆς εὐθείας (δ), ἢ ἀκόμη ὅτι τὰ τρία σημεῖα εἶναι διαδοχικὰ κατὰ τὴν σειρὰν Α,Γ,Β.

16. Ἀξιώματα διατάξεως. Ἀξίωμα I. Ἐὰν Α καὶ Β εἶναι δύο διάφορα ἀλλήλων σημεῖα εὐθείας (δ), ὑπάρχει ἓν τοὐλάχιστον σημεῖον Γ∈(δ) ἐνδιάμεσον τῶν Α καὶ Β (σχ. 1).

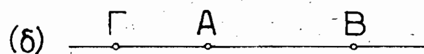
Ἀξίωμα II. **Ἐὰν Α καὶ Β εἶναι δύο διάφορα ἀλλήλων σημεῖα εὐθείας**



Σχ. 2

(δ), ὑπάρχει ἓν τοὐλάχιστον σημεῖον Γ∈(δ) οὕτως, ὥστε τὸ Β νὰ εἶναι ἐνδιάμεσον τῶν Α καὶ Γ (σχ. 2).

Ἀξίωμα III. **Ἐὰν Α καὶ Β εἶναι δύο διάφορα ἀλλήλων σημεῖα εὐθείας**

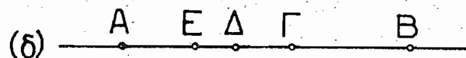


Σχ. 3

(δ), ὑπάρχει ἓν τοὐλάχιστον σημεῖον Γ∈(δ) οὕτως, ὥστε τὸ Α νὰ εἶναι ἐνδιάμεσον τῶν Γ καὶ Β (σχ. 3).

17. Θεώρημα. Μία εὐθεῖα ἔχει ἄπειρα τὸ πλῆθος σημεῖα.

Ἀπόδειξις. Συμφώνως πρὸς τὰ τεθέντα ἀξιώματα, μία εὐθεῖα (δ) ἔχει τοὐλάχιστον δύο σημεῖα Α καὶ Β. Τότε, διὰ τὰ Α καὶ Β, ὑπάρχει ἓν τοὐ-



Σχ. 4

λάχιστον ἐνδιάμεσον σημεῖον Γ τῆς (δ). Διὰ τῆς αὐτῆς σκέψεως, ὑπάρχει ἓν τοὐλάχιστον σημεῖον Δ τῆς (δ) ἐνδιάμεσον τῶν Α καὶ Γ κ.ο.κ. Οὕτω δυνάμεθα νὰ συσσωρεύσωμεν μίαν ἀπειρίαν σημείων ἐνδιαμέσων τῶν Α καὶ Β. Ἄρα ἡ εὐθεῖα (δ) περιέχει ἄπειρα τὸ πλῆθος σημεῖα, ἐφ' ὅσον ἓν μέρος αὐτῆς περιέχει ἄπειρα σημεῖα.

18. Θεώρημα. Δύο διάφοροι μεταξὺ των εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) ἓν τὸ πολὺ κοινὸν σημεῖον δύνανται νὰ ἔχουν.

Ἀπόδειξις. Κατ' ἀρχὴν ἂς παρατηρήσωμεν ὅτι δύο εὐθεῖαι δύνανται νὰ

ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον. Διότι ἂν θεωρήσωμεν τρία σημεῖα Α, Β, Γ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, τὰ Α καὶ Β ὁρίζουν τὴν εὐθεῖαν (ε_2), ὁμοίως τὰ Α καὶ Γ ὁρίζουν τὴν εὐθεῖαν (ε_1), αἱ ὁποῖαι ἔχουν προφανῶς κοινὸν σημεῖον τὸ Α (σχ. 5).

Ἐκτὸς τοῦ Α δὲν δύνανται νὰ ἔχουν καὶ ἄλλο κοινὸν σημεῖον, διότι ἂν Μ ἦτο ἓν ἐπὶ πλέον κοινὸν σημεῖον τῶν (ε_1) καὶ (ε_2) αὗται θὰ ἐταυτίζοντο, διότι τὰ Α καὶ Μ μίαν μόνον εὐθεῖαν ὁρίζουν. Ἄρα δύο διάφοροι μεταξύ των εὐθεῖαι ἓν τὸ πολὺ κοινὸν σημεῖον δύνανται νὰ ἔχουν.

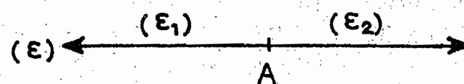
Σχ. 5

Τότε λέγομεν ὅτι αἱ δύο εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) **τέμνονται**, τὸ δὲ κοινὸν σημεῖον Α αὐτῶν λέγεται **σημεῖον τομῆς** των, ἢ **ἴχνος** ἢ **πούς** τῆς μιᾶς εὐθείας ἐπὶ τὴν ἄλλην.

19. Ἡμιευθεῖα. Ἄς θεωρήσωμεν εὐθεῖαν (ε) καὶ σημεῖον Α αὐτῆς (σχ. 6). Διὰ τοῦ σημείου Α ἡ εὐθεῖα (ε), ὡς σημειοσύνολον, διαιρεῖται εἰς δύο ὑποσύνολα (ε_1) καὶ (ε_2) τοιαῦτα ὥστε νὰ εἶναι :

$$(\varepsilon_1) \cup (\varepsilon_2) = (\varepsilon) - \{A\} \quad \text{καὶ} \quad (\varepsilon_1) \cap (\varepsilon_2) = \varnothing$$

Τὰ ὑποσύνολα (ε_1) καὶ (ε_2) καλοῦνται **ἡμιευθεῖαι** μὲ **ἀρχὴν** τὸ σημεῖον Α.



Σχ. 6

Κατὰ τὸν ὁρισμόν, ἡ ἀρχὴ Α δὲν ἀνήκει εἰς τὰς ἡμιευθείας (ε_1) καὶ (ε_2) καὶ τότε θὰ τὰς λέγωμεν **ἀνοικτὰς** ἡμιευθείας. Ἐὰν ὅμως θέλωμεν νὰ συμπεριλάβωμεν εἰς αὐτὰς καὶ τὴν ἀρχήν των Α, ὁπότε θὰ τὰς καλοῦμεν **κλειστὰς** ἡμιευθείας, τότε θὰ πληροῦνται αἱ σχέσεις :

$$(\varepsilon_1) \cup (\varepsilon_2) = (\varepsilon) \quad \text{καὶ} \quad (\varepsilon_1) \cap (\varepsilon_2) = \{A\}.$$

Αἱ ἡμιευθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) καλοῦνται **ἀντίθετοι** ἡμιευθεῖαι, ἐφ' ὅσον ἔχουν κοινὴν ἀρχὴν καὶ ἀποτελοῦν εὐθεῖαν, ἑκάστη δὲ δύναται νὰ λέγεται καὶ **συμπληρωματικὴ** τῆς ἄλλης.

Εὐνόητον εἶναι ὅτι μία ἡμιευθεῖα μὲ ἀρχὴν σημεῖον Α, ἐκτείνεται ἀπεριορίστως ἀπὸ τὸ ἓν μόνον μέρος της. Διὰ τὸν προσδιορισμὸν μιᾶς ἡμιευθείας ἀπαι-



Σχ. 7

τεῖται νὰ γνωρίζωμεν τὴν ἀρχήν της Α καὶ ἓν τυχὸν σημεῖον της Β (σχ. 7). Διὰ τὸν συμβολισμόν της γράφομεν ἡμιευθ. ΑΒ ἢ ἁπλῶς ΑΒ, ὅταν ἔχῃ ἀνα-

φερθῇ προηγουμένως ὅτι πρόκειται περὶ ἡμιευθείας. Πάντως εἰς τὸν συμβολισμὸν προτάσσεται ἡ ἀρχὴ Α.

20. Εὐθύγραμμον τμῆμα. Ἔστω εὐθεῖα (δ) καὶ Α, Β δύο σημεῖα τῆς. Καλοῦμεν εὐθύγραμμον τμῆμα μὲ ἄκρα τὰ Α καὶ Β τὸ σύνολον τῶν σημείων τῆς εὐθείας (δ), τὰ ὁποῖα εἶναι ἐνδιάμεσα τῶν σημείων Α καὶ Β (σχ. 8). Συμβολικῶς γράφομεν τμ.ΑΒ ἢ ἁπλῶς ΑΒ, ὅταν προηγουμένως ἔχῃ ἀναφερθῇ



Σχ. 8

ὅτι εἶναι εὐθύγραμμον τμῆμα. Πρὸς μεγαλυτέραν ἁπλούστευσιν διὰ τὸν συμβολισμόν, δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιοῦμεν καὶ μικρὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, ἤτοι ἓν τμῆμα ΑΒ τὸ ὀνομάζομεν α.

Κατὰ τὸν ὁρισμόν, τὰ ἄκρα τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ τὸ καλοῦμεν ἁπλῶς τμῆμα ΑΒ, δὲν περιέχονται εἰς αὐτὸ καὶ ὡς ἐκ τούτου δυνάμεθα νὰ τὸ λέγωμεν καὶ ἀνοικτὸν τμῆμα. Δυνατὸν ὅμως νὰ θέλωμεν νὰ συμπεριλάβωμεν ἐντὸς τοῦ τμήματος καὶ τὰ ἄκρα αὐτοῦ καὶ τότε θὰ τὸ λέγωμεν κλειστὸν τμῆμα. Ἀναλόγως ὁρίζεται καὶ ἡμιάνοικτον τμῆμα, ὅταν τὸ ἓν μόνον τῶν δύο ἄκρων περιλαμβάνεται εἰς αὐτό.

Συμβατικῶς δεχόμεθα τὴν ὕπαρξιν εὐθυγράμμου τμήματος τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα συμπίπτουν. Τοῦτο θὰ τὸ λέγωμεν **μηδενικὸν** εὐθύγραμμον τμῆμα.

21. Ἀπόστασις δύο σημείων. Τὴν ἔννοιαν «ἀπόστασις δύο σημείων» τὴν θεωροῦμεν γνωστὴν ἐκ τῆς ἐμπειρίας. Τονίζομεν ὅμως ὅτι ἡ ἀπόστασις δύο σημείων Α καὶ Β δὲν εἶναι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ, δεδομένου ὅτι τὸ τμῆμα ΑΒ εἶναι σημειοσύνολον, ἐνῷ ἡ ἀπόστασις ΑΒ εἶναι ἔννοια διάφορος τῆς ἐννοίας τοῦ σημειοσυνόλου.

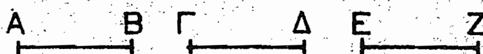
22. Μῆκος εὐθυγράμμου τμήματος καλεῖται ἡ ἀπόστασις τῶν ἄκρων αὐτοῦ.

23. Ἰσότης εὐθυγράμμων τμημάτων. Ἰδιότητες. Τὸ σύνολον τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων τὸ ἐφοδιάζομεν μὲ τὴν σχέσιν τῆς βασικῆς ἰσότητος, ὡς αὕτη ἔχει ὁρισθῆ γενικῶς εἰς τὸ σύνολον τῶν σχημάτων (§ 13), ἤτοι :

Δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ καλοῦνται ἴσα τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν δύνανται νὰ ταυτισθοῦν διὰ μετατοπίσεως (ἕκαστον σημεῖον τοῦ πρώτου νὰ ταυτισθῇ μὲ ἓν σημεῖον τοῦ δευτέρου καὶ ἀντιστρόφως).

Ὡς ἰδιότητες τῆς βασικῆς ἰσότητος ἀναφέρονται τὰ τρία γενικὰ ἀξιώματα αὐτῆς, ἤτοι ἡ ἰσότης εἰς τὸ σύνολον τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι σχέσις :

i) **Ἀνακλαστική**, ἤτοι (σχ. 9) : ΑΒ = ΑΒ (πᾶν τμῆμα ἰσοῦται πρὸς ἑαυτό).



Σχ. 9

ii) **Συμμετρική**, ἤτοι : ΑΒ = ΓΔ ⇒ ΓΔ = ΑΒ

iii) **Μεταβατική**, ἤτοι : ΑΒ = ΓΔ ∧ ΓΔ = ΕΖ ⇒ ΑΒ = ΕΖ

Πᾶσα σχέσις, εἰς τὴν ὁποίαν ἰσχύουν τὰ τρία προηγούμενα ἀξιώματα, χαρακτηρίζεται ὡς σχέσις **ἰσοδυναμίας**, κατὰ συνέπειαν ἡ σχέσις τῆς βασικῆς ἰσότητος, εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας.

Παρατήρησις. Ἕν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ, ὡς σημειοσύνολον, συμπίπτει μὲ τὸ σημειοσύνολον ΒΑ. Ἄρα δυνάμεθα νὰ ἀναφέρωμεν ὡς ἰδιότητα τῆς ἰσότητος καὶ τὴν ΑΒ = ΒΑ.

24. Μέσον εὐθυγράμμου τμήματος καλεῖται ἓν σημεῖον αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον ἰσαπέχει ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος. Ἐὰν ΑΒ εἶναι ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα (σχ. 10) καὶ Μ εἶναι τὸ μέσον του, τότε θὰ εἶναι ΜΑ = ΜΒ.

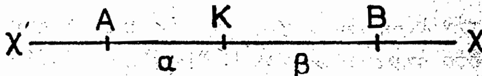


Σχ. 10

Ἀξίωμα. Ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ ἔχει ἓν καὶ μόνον ἓν μέσον Μ.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΙΣ ΕΙΣ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟΝ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

25. Ἄθροισμα εὐθυγράμμων τμημάτων. Ἔστωσαν α καὶ β δύο εὐθύγραμμα τμήματα. Ἐπ' εὐθείας xx' λαμβάνομεν σημεῖον Κ (σχ. 11) καὶ ἐπὶ τῶν ἡμιευθειῶν Κx' καὶ Κx λαμβάνομεν σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι ΚΑ = α καὶ ΚΒ = β. Ὡς ἄθροισμα τῶν δύο τμημάτων α καὶ β ὁρίζομεν τὸ τμῆμα ΑΒ καὶ συμβολίζομεν



Σχ. 11

$$\alpha + \beta = AB \quad \text{ἢ} \quad AK + KB = AB.$$

Ἡ ἀνωτέρω διαδικασία πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος δύο εὐθυγράμμων τμημάτων καλεῖται **πρᾶξις προσθέσεως** ἢ ἁπλῶς **πρόσθεσις** τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων.

Τὸ ἄθροισμα τριῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ὁρίζεται ἀναλόγως, ἐὰν εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων προσθέσωμεν τὸ τρίτον τμῆμα, ὁμοίως δὲ 4,5,...,ν τμημάτων.

26. Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως. i) Ἡ πρᾶξις τῆς προσθέσεως τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι ἀντιμεταθετική, ἤτοι ἐὰν α, β εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα ⇒ α + β = β + α

Ἀπόδειξις. Ἐὰν $AB = \alpha$ καὶ $B\Gamma = \beta$ (σχ. 12) $\Rightarrow A\Gamma = AB + B\Gamma = \alpha + \beta$ (1).



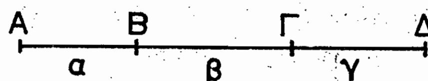
Σχ. 12

Ἐπίσης εἶναι $\Gamma A = \Gamma B + BA = \beta + \alpha$ (2)

Ἀλλὰ $A\Gamma = \Gamma A$ καὶ ἑπομένως ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν : $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

ii) Ἡ πρᾶξις τῆς προσθέσεως τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι προσεταιριστική, ἤτοι ἐὰν α, β, γ εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα $\Rightarrow (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

Ἀπόδειξις. Ἐπ' εὐθείας λαμβάνομεν διαδοχικῶς σημεῖα Α,Β,Γ,Δ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $AB = \alpha$, $B\Gamma = \beta$, $\Gamma\Delta = \gamma$ (σχ. 13).



Σχ. 13

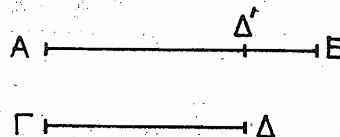
Τότε εἶναι : $A\Delta = A\Gamma + \Gamma\Delta = (\alpha + \beta) + \gamma$ (3) καὶ $A\Delta = AB + B\Delta = \alpha + (\beta + \gamma)$ (4). Αἱ σχέσεις (3) καὶ (4) ἔχουν τὰ πρῶτα μέλη των ἴσα, ἄρα θὰ εἶναι καὶ $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

iii) Ἡ πρᾶξις τῆς προσθέσεως τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ἔχει οὐδέτερον στοιχεῖον τὸ μηδενικὸν εὐθύγραμμον τμῆμα, συμβολιζόμενον μὲ 0, ἤτοι εἶναι $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$, ὅπου τὸ α εἶναι εὐθύγραμμον τμῆμα.

iv) Ἡ πρᾶξις τῆς προσθέσεως τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι μονότροπος καὶ ἐσωτερικὴ πρᾶξις τοῦ συνόλου τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, ἤτοι τὸ σύνολον τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι κλειστὸν ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν τῆς προσθέσεως.

Πράγματι, ἀπὸ τὰς προηγουμένας ἰδιότητας ἕπεται ὅτι ν τὸ πλῆθος εὐθύγραμμα τμήματα δύνανται νὰ προστεθοῦν καθ' οἱανδήποτε σειρὰν μὲ ἀποτέλεσμα τῆς πράξεως (ἄθροισμα) τὸ αὐτὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, ἤτοι εἶναι μονότροπος. Ἐπίσης εἶναι ἐσωτερικὴ πρᾶξις τοῦ συνόλου τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, διότι τὸ ἄθροισμα εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι εὐθύγραμμον τμῆμα, δηλαδὴ στοιχεῖον τοῦ αὐτοῦ συνόλου.

27. Διάταξις εἰς τὸ σύνολον τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων. Ἂς θεωρήσωμεν δύο ἄνισα (ὄχι ἴσα) εὐθύγγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 14). Μετατοπίζομεν τὸ ΓΔ εἰς τὴν θέσιν ΑΔ′ οὕτως, ὥστε τὰ δύο τμήματα νὰ ἀποκτήσουν κοινὸν ἄκρον τὸ Α καὶ κοινὸν μέρος. Τότε δύο εἶναι τὰ πιθανὰ ἐνδεχόμενα :



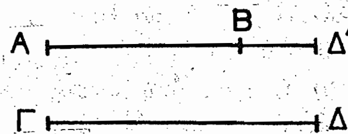
Σχ. 14

i) Τὸ Δ′ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, εἶναι ἐνδιάμεσον τῶν Α καὶ Β (σχ. 14). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι τὸ τμῆμα ΑΒ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΑΔ′, ἢ ὅπερ τὸ αὐτό, τὸ ΑΒ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΓΔ καὶ συμβολίζομεν

$AB > ΓΔ$. Ἰσοδύναμος πρὸς τὴν προηγουμένην σχέσιν εἶναι καὶ ἡ $ΓΔ < AB$ ἡ ὁποία διαβάζεται «τὸ ΓΔ εἶναι μικρότερον τοῦ AB».

ii) Τὸ B ἐπὶ τῆς εὐθείας AB εἶναι ἐνδιάμεσον τῶν A καὶ Δ′ (σχ. 15). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι τὸ τμῆμα AB εἶναι μικρότερον τοῦ ΓΔ (συμβολικῶς $AB < ΓΔ$) ἢ τὸ ΓΔ μεγαλύτερον τοῦ AB (συμβολικῶς $ΓΔ > AB$).

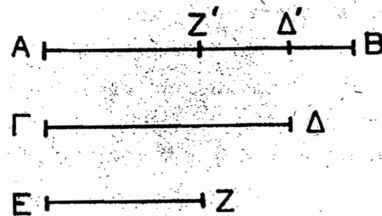
Ἡ σχέσις $AB > ΓΔ$ (ἀντιστοίχως $AB < ΓΔ$) καλεῖται **σχέσις ἀνισότητος**.



Σχ. 15

28. Ἰδιότητες. i) Ἡ σχέσις τῆς ἀνισότητος εἶναι μεταβατική, ἤτοι ἐὰν $AB > ΓΔ \wedge ΓΔ > EZ \Rightarrow AB > EZ$.

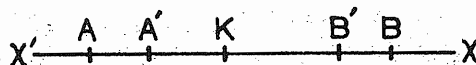
Ἀπόδειξις. Μετατοπίζομεν τὰ τμήματα ΓΔ καὶ EZ ἐπὶ τοῦ AB οὕτως, ὥστε τὰ ἄκρα Γ καὶ E νὰ ταυτισθοῦν μετὰ τοῦ A (σχ. 16) καὶ τὰ Δ καὶ Z νὰ λάβουν θέσεις Δ′ καὶ Z′ ἀντιστοίχως ἐπὶ τῆς εὐθείας AB. Ἐπειδὴ $AB > ΓΔ$ καὶ $ΓΔ = AΔ' \Rightarrow AB > AΔ'$, ἤτοι τὸ Δ′ εἶναι ἐνδιάμεσον τῶν A καὶ B. Ὁμοίως ἐπειδὴ $ΓΔ > EZ \Rightarrow AΔ' > AZ'$, ἕπεται ὅτι τὸ Z′ εἶναι ἐνδιάμεσον τῶν A καὶ Δ′. Ἄρα τὸ Z′ εἶναι ἐνδιάμεσον καὶ τῶν A καὶ B $\Rightarrow AB > AZ' \Longleftrightarrow AB > EZ$.



Σχ. 16

Παρατήρησις. Ἡ σχέσις τῆς ἀνισότητος δὲν εἶναι συμμετρική, δηλαδὴ ἐὰν $AB > ΓΔ$ ἀποκλείεται νὰ εἶναι καὶ $ΓΔ > AB$. Κάθε σχέσις μεταβατικὴ καὶ μὴ συμμετρική, χαρακτηρίζεται ὡς σχέσις **διατάξεως** καὶ ἑπομένως ἡ σχέσις τῆς ἀνισότητος εἰς τὸ σύνολον τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, εἶναι σχέσις διατάξεως.

ii) Ἐὰν $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα τοιαῦτα, ὥστε $\alpha > \alpha' \wedge \beta > \beta' \Rightarrow \alpha + \beta > \alpha' + \beta'$ ἤτοι δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν κατὰ μέλη ὁμοιοστρόφους ἀνισότητας.



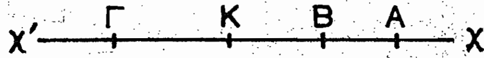
Σχ. 17

Ἀπόδειξις. Ἐπὶ εὐθείας xx' λαμβάνομεν σημεῖον K (σχ. 17). Ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας Kx' λάμβανομεν σημεῖα A καὶ A′, οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $KA = \alpha$ καὶ $KA' = \alpha'$ καὶ ἐπὶ τῆς Kx σημεῖα B καὶ B′ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $KB = \beta$ καὶ $KB' = \beta'$. Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\alpha > \alpha' \Rightarrow KA > KA'$, ἕπεται ὅτι τὸ A′ εἶναι ἐνδιάμεσον τῶν K καὶ A. Ὁμοίως τὸ B′ εἶναι ἐνδιάμεσον τῶν K καὶ B.

Ἡ τοιαύτη διάταξις τῶν σημείων ἐπὶ τῆς εὐθείας xx', ἐξασφαλίζει τόσον τὰ Α,Β ὅσον καὶ τὰ Α',Β' ἑκατέρωθεν τοῦ Κ, τὰ δὲ Α καὶ Β, ἑκατέρωθεν τῶν Α' καὶ Β' ἀντιστοίχως. Τότε θὰ εἶναι : $AB > AB' \wedge AB' > A'B' \Rightarrow AB > A'B'$ (1) (μεταβατικὴ ἰδιότης). Ἀλλὰ $AB = AK + KB = \alpha + \beta$ καὶ $A'B' = A'K + KB' = \alpha' + \beta'$. Τότε ἡ σχέσις (1) γράφεται : $\alpha + \beta > \alpha' + \beta'$.

iii) Ἐὰν α, β, γ εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα μὲ $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$, ἤτοι δυνάμεθα εἰς τὰ μέλη μιᾶς ἀνισότητος νὰ προσθέσωμεν τὸ αὐτὸ εὐθύγραμμον τμῆμα.

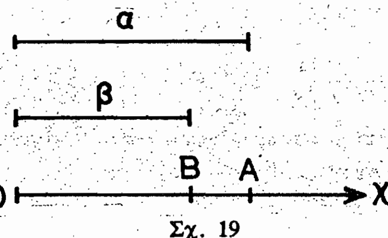
Ἀπόδειξις. Ἐπὶ εὐθείας xx' λαμβάνομεν σημεῖον Κ (σχ. 18). Ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας Κx λαμβάνομεν σημεῖα Α καὶ Β οὕτως, ὥστε $KA = \alpha$ καὶ $KB = \beta$. Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\alpha > \beta \Rightarrow KA > KB$ καὶ ἑπομένως τὸ σημεῖον Β εἶναι ἐνδιάμεσον τῶν Κ καὶ Α. Ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας Κx' λαμβάνομεν σημεῖον Γ οὕτως ὥστε $K\Gamma = \gamma$. Ἡ τοιαύτη διάταξις τῶν σημείων ἐπὶ τῆς εὐθείας $x'x$, ἐξασφαλίζει τὸ Κ ἐνδιάμεσον τῶν Γ καὶ Β, ὡς καὶ τὸ Β ἐνδιάμεσον τῶν Γ καὶ Α. Ἄρα θὰ εἶναι :



Σχ. 18

$\Gamma A > \Gamma B$ (2). Ἀλλὰ $\Gamma A = \Gamma K + KA = \gamma + \alpha$ καὶ $\Gamma B = \Gamma K + KB = \gamma + \beta$. Τότε ἡ σχέσις (2) γράφεται $\gamma + \alpha > \gamma + \beta \Longleftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

29. Διαφορὰ εὐθυγράμμων τμημάτων. Ἄς θεωρήσωμεν δύο ἄνισα εὐθύγραμμα τμήματα α καὶ β μὲ $\alpha > \beta$. Ἐπὶ ἡμιευθείας Ox (σχ. 19) λαμβάνομεν $OA = \alpha$ καὶ $OB = \beta$. Τὸ τμῆμα ΑΒ (ἢ καὶ κάθε ἴσον πρὸς αὐτὸ) καλοῦμεν **διαφορὰν** τῶν τμημάτων α καὶ β καὶ συμβολίζομεν $OA - OB = AB$ ἢ $\alpha - \beta = AB \Longleftrightarrow \alpha = \beta + AB$.

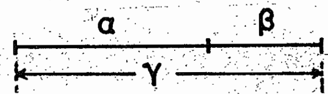


Σχ. 19

Ἡ διαδικασία, μέσω τῆς ὁποίας δοθέντων δύο εὐθυγράμμων τμημάτων εὑρίσκομεν τὴν διαφοράν των, καλεῖται **πρᾶξις τῆς ἀφαιρέσεως** ἢ ἁπλῶς **ἀφαίρεσις**.

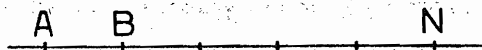
Ἐὰν τὰ τμήματα α καὶ β ἦσαν ἴσα, ἡ διαφορά των θὰ ἦτο τὸ μηδενικὸν εὐθύγραμμον τμῆμα, ἤτοι ἐὰν $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha - \beta = 0$.

Παρατήρησις. Ἐὰν δύο τμήματα α καὶ β ἔχουν ἄθροισμα γ, ἤτοι $\alpha + \beta = \gamma$ (σχ. 20), ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαφορᾶς ἕπεται ὅτι τὸ β εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν γ καὶ α, ὡς ἐπίσης τὸ α εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν γ καὶ β. Ἄρα ἀπὸ τὴν σχέσιν $\alpha + \beta = \gamma$ ἕπονται αἱ σχέσεις $\beta = \gamma - \alpha$ καὶ $\alpha = \gamma - \beta$.



Σχ. 20

30. Γινόμενον εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ φυσικὸν ἀριθμόν. Ἔστω εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ. Καλεῖται γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν φυσικὸν ἀριθμὸν ν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΝ (σχ. 21), τὸ ὁποῖον προκύπτει ἀπὸ τὴν



Σχ. 21

πρόσθεσιν ν εὐθυγράμμων τμημάτων ἴσων πρὸς τὸ ΑΒ. Τότε γράφομεν

$$ΑΝ = ν \cdot ΑΒ$$

31. Πηλίκον εὐθυγράμμου τμήματος διὰ φυσικοῦ ἀριθμοῦ. Ἔστω εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΝ. Καλεῖται πηλίκον αὐτοῦ διὰ τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ (σχ. 21) διὰ τὸ ὁποῖον ἰσχύει ἡ σχέσις ΑΝ = ν . ΑΒ. Τότε γράφομεν

$$ΑΒ = \frac{ΑΝ}{ν}$$

(βλέπε καὶ § 227 διὰ τὴν ὕπαρξιν τοῦ πηλίκου εὐθυγράμμου τμήματος διὰ φυσικοῦ ἀριθμοῦ).

32. Γινόμενον εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ ῥητόν. Ἔστω εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ καὶ $\frac{μ}{ν}$ ῥητὸς ἀριθμός. Καλοῦμεν γινόμενον τοῦ ΑΒ ἐπὶ τὸν ῥητὸν $\frac{μ}{ν}$ ἕνα τμῆμα ΑΓ, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἂν τὸ ΑΒ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ μ καὶ ἐν συνεχείᾳ τὸ γινόμενον διαιρέσωμεν διὰ ν. Τότε γράφομεν

$$ΑΓ = \frac{μ}{ν} \cdot ΑΒ.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

1. Ἐπὶ εὐθείας λαμβάνομεν διαδοχικῶς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Ἂν εἶναι ΑΓ=ΒΔ, δείξατε ὅτι θὰ εἶναι καὶ ΑΒ = ΓΔ.

2. Ἐπὶ εὐθείας λαμβάνομεν διαδοχικῶς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ. Ἐὰν Δ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΒΓ, δείξατε ὅτι

$$ΑΔ = \frac{ΑΓ + ΑΒ}{2} \quad καὶ \quad ΔΓ = \frac{ΑΓ - ΑΒ.}{2}$$

3. Ἐπὶ εὐθείας λαμβάνομεν διαδοχικῶς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Δείξατε ὅτι ΑΓ + ΒΔ = ΑΔ + ΒΓ.

4. Ἐπὶ εὐθείας λαμβάνομεν διαδοχικῶς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ εἰ-

ναι AB = 2α καὶ ΒΓ = 2β. Ἂν Δ, Ε καὶ Ζ εἶναι ἀντιστοίχως τὰ μέσα τῶν τμημάτων AB, ΒΓ, καὶ ΑΓ, νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ τμήματα ΑΕ καὶ ΔΖ ἔχουν τὸ αὐτὸ μέσον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ μέσου τοῦ τμήματος ΔΖ ἀπὸ τὸ Γ.

5. Ἐπὶ εὐθείας λαμβάνομεν διαδοχικῶς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Ἂν εἶναι Μ τὸ μέσον τοῦ τμήματος AB καὶ Ν τὸ μέσον τοῦ ΓΔ δείξατε ὅτι

$$MN = \frac{A\Delta + B\Gamma}{2}$$

Β'.

6. Ἐὰν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ κεῖνται ἐπὶ εὐθείας καὶ εἰς τρόπον, ὥστε τὰ τμήματα AB καὶ ΓΔ νὰ ἔχουν κοινὸν μέσον, τότε θὰ εἶναι ΑΓ = ΒΔ. Ἐξετάσατε ἐὰν ἀληθεύῃ τὸ ἀντίστροφον.

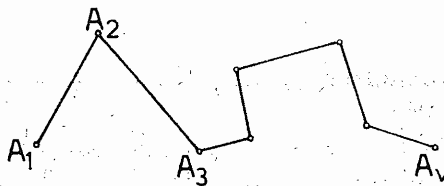
7. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι 6 διακεκριμένα σημεῖα μὴ κείμενα ἀνὰ τρία ἀπ' εὐθείας, ὁρίζουν 15 εὐθύγραμμα τμήματα.

8. Πόσα εὐθύγραμμα τμήματα ὁρίζονται ἀπὸ ν τὸ πλῆθος διακεκριμένα σημεῖα μὴ κείμενα ἀνὰ τρία ἐπὶ εὐθείας; Ἐφαρμογὴ διὰ ν=20.

9. Πόσα σημεῖα ὁρίζονται ἀπὸ ν τὸ πλῆθος εὐθείας τεμνομένας ἀνὰ δύο καὶ μὴ διερχομένας ἀνὰ τρεῖς διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου;

ΠΕΡΙ ΓΡΑΜΜΩΝ

33. Τεθλασμένη γραμμή. Ἂς θεωρήσωμεν ν διακεκριμένα σημεῖα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ μὴ κείμενα ὅλα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας (σχ. 22). Θεωροῦμεν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_{\nu-1}A_\nu$. Ἡ οὕτω κατασκευασθεῖσα γραμμὴ καλεῖται **τεθλασμένη** γραμμὴ ἢ **πολυγωνικὴ** γραμμή. Τὰ σημεῖα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ καλοῦνται **κορυφαὶ** αὐτῆς, καὶ τὰ τμήματα A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_{\nu-1}A_\nu$ **πλευραὶ** αὐτῆς.

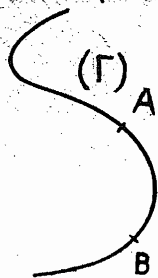


Σχ. 22

34. Μῆκος τεθλασμένης γραμμῆς $A_1A_2A_3 \ldots A_\nu$ καλεῖται τὸ μῆκος εὐθυγράμμου τμήματος ἴσου πρὸς τὸ ἄθροισμα

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{\nu-1}A_\nu.$$

35. Καμπύλη γραμμή. Μία γραμμή (Γ) καλεῖται **καμπύλη**, ὅταν οὐδὲν τμῆμα αὐτῆς εἶναι εὐθύγραμμον (σχ. 23). Τότε κάθε τμῆμα της καλεῖται καμπύλον. Ἐν οἱονδήποτε



Σχ. 23

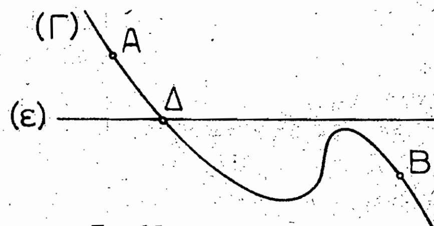


Σχ. 24

τμῆμα μιᾶς καμπύλης μὲ ἄκρα σημεῖα Α καὶ Β καλεῖται **τόξον** αὐτῆς καὶ συμβολίζεται μὲ $\widehat{AB}$.

36. Μικτὴ γραμμή. Μία γραμμὴ (Γ) καλεῖται **μικτή**, ὅταν αὕτη ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθύγραμμα καὶ ἀπὸ καμπύλα τμήματα (σχ. 24).

37. Ἀξίωμα. Ἔστωσαν ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) εὐθεῖα (ε) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἑκατέρωθεν αὐτῆς (σχ. 25). Πᾶσα γραμμὴ (Γ) τοῦ ἐπιπέδου (Π) διερχομένη διὰ τῶν Α καὶ Β ἔχει ἓν τοὐλάχιστον κοινὸν σημεῖον Δ μετὰ τῆς εὐθείας (ε).



Σχ. 25

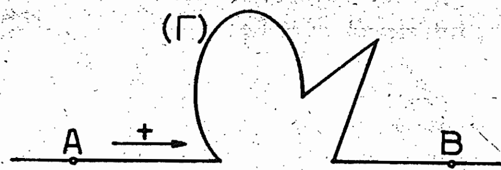
38. Ἐπίπεδος καὶ στρεβλὴ γραμμή. Μία γραμμὴ καλεῖται **ἐπίπεδος** τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν ὅλα τὰ σημεῖα της κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἐὰν τοῦτο δὲν συμβαίνῃ, τότε ἡ γραμμὴ καλεῖται **στρεβλή**.

Ὡς παράδειγμα στρεβλῆς γραμμῆς ἀναφέρομεν σπειροειδὲς ἐλατήριον, νοούμενον ὡς γραμμή.

39. Προσανατολισμένη γραμμή. Ἔστω μία γραμμὴ (Γ) καὶ Α καὶ Β δύο σημεῖα της (σχ. 26).

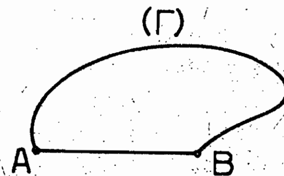
Ἡ γραμμὴ αὔτη δύνανται νὰ διαγραφῇ ὑπὸ κινητοῦ σημείου ἄνευ παλινδρομήσεως κατὰ δύο διαφόρους τρόπους, ἤτοι ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β ἢ ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Α. Πρὸς διαφοροποίησιν τῶν δύο τούτων τρόπων διαγραφῆς της, τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν, ἔστω τὸν ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β καλοῦμεν **θετικὴν φορὰν διαγραφῆς**. Τότε ἡ φορὰ ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Α θὰ λέγεται **ἀρνητική**. Ἡ ἐκλογὴ τῆς θετικῆς φορᾶς διαγραφῆς εἶναι αὐθαίρετος.

Μία γραμμή, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἔχει ὁρισθῆ ἡ θετικὴ φορὰ διαγραφῆς της, καλεῖται **προσανατολισμένη** ἢ **προσημασμένη** γραμμή.



Σχ. 26

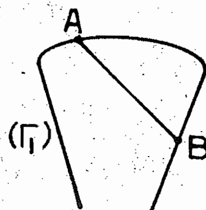
40. Ἀξίωμα. **Ἂν Α καὶ Β εἶναι δύο σημεῖα, τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ ποὺ ὁρίζουν, ἔχει μῆκος μικρότερον τοῦ μήκους πάσης ἄλλης γραμμῆς (Γ) μὲ τὰ αὐτὰ ἄκρα Α καὶ Β (σχ. 27).**



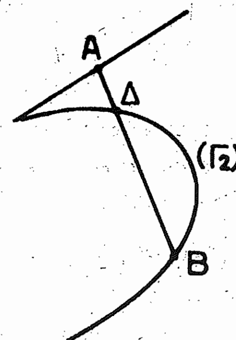
Σχ. 27

41. Ἐπίπεδα σχήματα. Ἓν σχῆμα (Σ) καλεῖται ἐπίπεδον σχῆμα, ἐὰν ὅλα τὰ σημεῖα αὐτοῦ εὑρίσκωνται ἐπὶ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (Π).

42. Κυρτὴ καὶ μὴ κυρτὴ γραμμή. Θεωροῦμεν μίαν ἐπίπεδον γραμμὴν (Γ_1) (σχ. 28). Ἡ γραμμὴ αὕτη, θὰ λεγεται κυρτὴ γραμμή, τότε καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ κάθε ζεῦγος σημείων της Α καὶ Β, τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχει μετὰ τῆς (Γ_1) (ἐκτὸς τῶν Α καὶ Β), ἢ κεῖται ἐξ ὁλοκλήρου ἐπὶ τῆς (Γ_1), ἐὰν τὰ Α καὶ Β ληφθοῦν ἐπὶ εὐθυγράμμου τινὸς τμήματος τῆς (Γ_1).



Σχ. 28

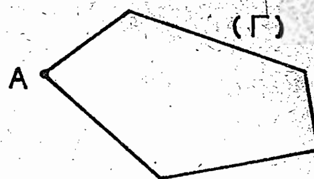


Σχ. 29

Ἡ ἐπίπεδος γραμμὴ (Γ_2) θὰ λέγεται **μὴ κυρτὴ** γραμμὴ (σχ. 29), ὅταν δὲν εἶναι κυρτή, δηλαδὴ ὅταν ἐπ' αὐτῆς ὑπάρχῃ ἓν τοὐλάχιστον ζεῦγος σημείων Α καὶ Β τοιοῦτον, ὥστε τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ νὰ ἔχῃ ἓν τοὐλάχιστον κοινὸν σημεῖον Δ μετὰ τῆς (Γ_2) (διάφορον τῶν Α καὶ Β).

43. Κλειστὴ γραμμή. Μία γραμμὴ (Γ) (ὄχι ἀπέραντος) καλεῖται

κλειστή γραμμή (σχ. 30), ὅταν ἀρχομένη ἔκ τινος σημείου Α, περατοῦται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Α (κλείνει).



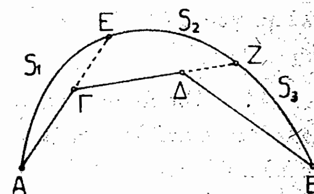
Σχ. 30

44. Θεώρημα. Τὸ μῆκος κάθε κυρτῆς τεθλασμένης γραμμῆς μὲ ἄκρα τὰ σημεῖα Α καὶ Β, εἶναι μικρότερον τοῦ μήκους κάθε ἄλλης γραμμῆς, ἡ ὁποία τὴν περιβάλλει καὶ ἔχει τὰ αὐτὰ ἄκρα.

'Απόδειξις. Ἔστωσαν ἡ κυρτὴ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΓΔΒ καὶ S τὸ μῆκος τυχούσης ἄλλης γραμμῆς μὲ ἄκρα τὰ Α καὶ Β, ἡ ὁποία περιβάλλει τὴν τεθλασμένην (σχ. 31). Προεκτείνομεν τὰ τμήματα ΑΓ καὶ ΓΔ ἕως ὅτου τμήσουν τὴν S εἰς τὰ Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως. 'Εὰν καλέσωμεν

$$\widehat{ΑΕ} = S_1, \ \widehat{ΕΖ} = S_2 \text{ καὶ } \widehat{ΖΒ} = S_3$$

τὰ τρία τμήματα τῆς γραμμῆς S εἰς τὰ ὁποῖα αὕτη ἐχωρίσθη, τότε θὰ ἔχωμεν (§ 40).



Σχ. 31

$$ΑΕ < \widehat{ΑΕ} \quad \Rightarrow \quad ΑΓ + ΓΕ < S_1$$

$$ΓΖ < ΓΕ + \widehat{ΕΖ} \quad \Rightarrow \quad ΓΔ + ΔΖ < ΓΕ + S_2$$

$$ΔΒ < ΔΖ + \widehat{ΖΒ} \quad \Rightarrow \quad ΔΒ < ΔΖ + S_3$$

Διὰ προσθέσεως τῶν δευτέρων σχέσεων κατὰ μέλη, λαμβάνομεν :

$$ΑΓ + ΓΕ + ΓΔ + ΔΖ + ΔΒ < S_1 + ΓΕ + S_2 + ΔΖ + S_3$$

$$\Rightarrow ΑΓ + ΓΔ + ΔΒ < S_1 + S_2 + S_3$$

$$\Rightarrow ΑΓ + ΓΔ + ΔΒ < S$$

45. 'Εφαρμογή. Δίδεται κλειστὴ κυρτὴ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΓΔΑ καὶ τρία σημεῖα Ε, Ζ, Η περικλειόμενα ἐντὸς αὐτῆς. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

$$\mathbf{ΕΗ + ΗΖ + ΖΕ < ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ.}$$

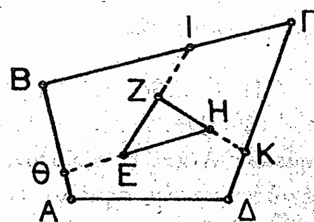
'Απόδειξις. Αἱ ἡμιευθεῖαι ΕΖ, ΖΗ καὶ ΗΕ τέμνουν τὴν γραμμὴν ΑΒΓΔΑ εἰς τὰ σημεῖα Ι, Κ καὶ Θ ἀντιστοίχως (σχ. 32). Τότε (§ 40) ἔχομεν :

$ΗΘ < ΘΑ + ΑΔ + ΔΚ + ΚΗ$ ἤ

(1) $ΕΗ + ΕΘ < ΘΑ + ΑΔ + ΔΚ + ΚΗ$,
$ΖΚ < ΖΙ + ΙΓ + ΓΚ$ ἤ

(2) $ΗΖ + ΗΚ < ΖΙ + ΙΓ + ΓΚ$ καὶ
$ΕΙ < ΕΘ + ΘΒ + ΒΙ$ ἤ

(3) $ΖΕ + ΖΙ < ΕΘ + ΘΒ + ΒΙ$



Σχ. 32

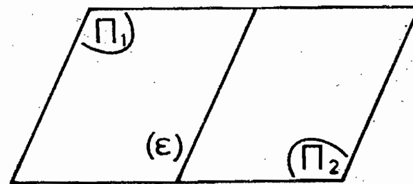
Προσθέτομεν τὰς ἀνισότητας (1), (2) καὶ (3) κατὰ μέλη καὶ λαμβάνομεν:
ΕΗ + ΗΖ + ΖΕ + ΕΘ + ΗΚ + ΖΙ < (ΘΑ + ΘΒ) + (ΒΙ + ΙΓ) + (ΚΔ + ΚΓ) + ΑΔ + ΖΙ + ΕΘ + ΚΗ ⟺
ΕΗ + ΗΖ + ΖΕ < ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ.

46. Ἡμιεπίπεδον. Ἔστω ἐπίπεδον (Π) καὶ εὐθεῖα (ε) αὐτοῦ. Διὰ τῆς (ε) τὸ ἐπίπεδον (Π) διαιρεῖται εἰς δύο μέρη (Π_1) καὶ (Π_2), (σχ. 33), διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι:

$$(\Pi_1) \cup (\Pi_2) = (\Pi) - (\varepsilon)$$

$$\text{καὶ} \quad (\Pi_1) \cap (\Pi_2) = \varnothing$$

Τὰ (Π_1) καὶ (Π_2) καλοῦνται ἡμιεπίπεδα.



Σχ. 33

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν ἡ εὐθεῖα (ε), ἡ ὁποία καλεῖται καὶ ἀρχικὴ εὐθεῖα τῶν ἡμιεπιπέδων, δὲν ἀνήκει εἰς οὐδὲν ἐξ αὐτῶν. Τότε δυνάμεθα ταῦτα νὰ τὰ λέγωμεν καὶ **ἀνοικτὰ** ἡμιεπίπεδα.

Ἐὰν ὅμως θέλωμεν νὰ συμπεριλάβωμεν καὶ τὴν (ε) εἰς τὰ ἡμιεπίπεδα, τότε ταῦτα θὰ λέγωνται **κλειστὰ** καὶ θὰ εἶναι:

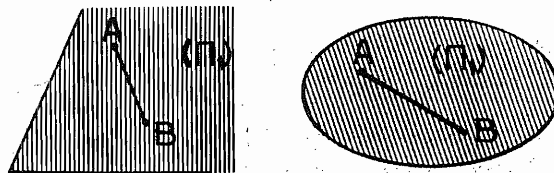
$$(\Pi_1) \cup (\Pi_2) = (\Pi) \quad \text{καὶ}$$

$$(\Pi_1) \cap (\Pi_2) = (\varepsilon)$$

47. Ἐπίπεδα τμήματα. Διακρίνομεν δύο εἴδη ἐπιπέδων τμημάτων, κυρτὰ καὶ μὴ κυρτά.

Κυρτὸν ἐπίπεδον τμῆμα καλεῖται κάθε ὑποσύνολον (Π_1) ἐπιπέδου (Π), διὰ τὸ ὁποῖον ἰσχύει τὸ ἑξῆς (σχ. 34):

Διὰ κάθε ζεῦγος σημείων $Α,Β \in (\Pi_1)$ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ ἀνήκει εἰς τὸ (Π_1), ἤτοι $ΑΒ \in (\Pi_1)$

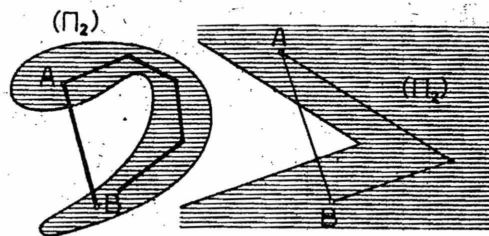


Σχ. 34

Μὴ κυρτὸν ἐπίπεδον τμῆμα καλεῖται κάθε ὑποσύνολον (Π_2) ἐπιπέδου (Π), διὰ τὸ ὁποῖον ἰσχύει τὸ ἑξῆς (σχ. 35):

Ὑπάρχει ἓν τοὐλάχιστον ζεῦγος σημείων $Α,Β \in (\Pi_2)$ τοιοῦτον, ὥστε τὸ

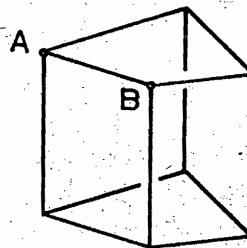
εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ νὰ μὴν ἀνήκῃ ἐξ ὁλοκλήρου εἰς τὸ (Π_2), ἀλλὰ ὑπάρχει γραμμὴ μὲ ἄκρα τὰ Α καὶ Β ἀνήκουσα εἰς τὸ (Π_2).



Σχ. 35

48. Εἴδη ἐπιφανειῶν. Ἡ ἔννοια τῆς ἐπιφανείας γενικῶς δὲν ὁρίζεται, θεωρουμένη ὡς πρωταρχικὴ ἔννοια. Πάντως τὰ διάφορα εἴδη ἐπιφανειῶν δύνανται νὰ περιγραφοῦν περιφραστικῶς εἴτε καὶ διὰ μαθηματικῶν σχέσεων εἰς ἐπαρκῆ ἕως πλήρη βαθμὸν ἀναγνωρίσεως αὐτῶν. Θὰ ἀρκεσθῶμεν εἰς τὴν περιφραστικὴν μόνον περιγραφὴν τῶν κυριωτέρων εἰδῶν ἐπιφανειῶν τὰ ὁποῖα, ἐκτὸς τῆς ἤδη γνωστῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας, εἶναι :

i) **Τεθλασμένη ἢ πολυεδρικὴ** ἐπιφάνεια. Ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδα τμήματα (σχ. 36) ὄχι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα καλοῦνται **ἕδραι** τῆς πολυεδρικῆς ἐπιφανείας. Ἡ τομὴ δύο ἑδρῶν εἶναι εὐθεῖα ἢ τμῆμα εὐθείας (βλ. εἰς σχῆμα τὴν ΑΒ) καὶ καλεῖται **ἀκμὴ** τῆς πολυεδρικῆς ἐπιφανείας καὶ ἡ τομὴ τριῶν τοὐλάχιστον ἑδρῶν (ἂν ὑπάρχῃ) εἶναι σημεῖον (βλ. εἰς σχῆμα τὸ Β), τὸ ὁποῖον καλεῖται **κορυφὴ** τῆς πολυεδρικῆς ἐπιφανείας.

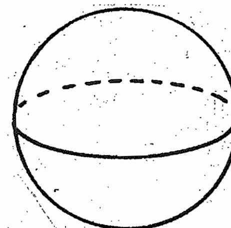


Σχ. 36

ii) **Καμπύλη** ἐπιφάνεια. Ἐπ' αὐτῆς οὐδὲν ἐπίπεδον τμῆμα ὑπάρχει. Καμπύλη ἐπιφάνεια εἶναι ἡ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια (σχ. 37) ἡ ὁποία ἂς θεωρηθῇ γνωστή, ὡς παράδειγμα, ἀπὸ τὴν προηγουμένην τάξιν.

iii) **Μικτὴ ἢ τυχαία** ἐπιφάνεια. Αὕτη ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδα καὶ καμπύλα τμήματα.

Αἱ ἐπιφάνεια γενικῶς διακρίνονται εἰς κυρτὰς καὶ μὴ κυρτάς, ὁριζομένων τῶν ἐννοιῶν τούτων κατὰ τρόπον ἀνάλογον πρὸς τὰς ἀντιστοίχους ἐννοίας διὰ τὰς γραμμὰς (§ 42).



Σχ. 37

49. Ἐπιπεδομετρία καὶ Στερεομετρία. Ἡ γεωμετρία, ἐξετάζουσα τὰ σχήματα τῶν στερεῶν, τέμνει κατ' ἀρχὰς αὐτὰ δι' ἐπιπέδων καὶ ἐξετάζει τὰς τομάς. Εἰς τὸ πρῶτον (καὶ μεγαλύτερον) μέρος της, ὅπου ἐξετάζει τὰς

ἐπιπέδους αὐτὰς τομάς, ἡ γεωμετρία καλεῖται **Ἐπιπεδομετρία**. Εἰς τὸ δεύτερον μέρος της ἡ γεωμετρία, ἐξετάζει τὰ σχήματα τῶν στερεῶν ἐν ὅλῳ καὶ καλεῖται **Στερεομετρία.**

Εἰς τὸ πρῶτον μέρος τῆς γεωματρίας, δηλαδὴ εἰς τὴν ἐπιπεδομετρίαν, ὅταν θὰ λέγωμεν «σχῆμα» θὰ ἐννοοῦμεν ἐπίπεδον σχῆμα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Β'.

10. Δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας καὶ φέρομεν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ. Ἐὰν Ο εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ σχήματος ΑΒΓ, δείξατε ὅτι:

$$\frac{AB + A\Gamma + B\Gamma}{2} < OA + OB + O\Gamma < AB + A\Gamma + B\Gamma.$$

11. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ κλειστῆς τεθλασμένης γραμμῆς ΑΒΓΑ, λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Α', Β', Γ' ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι

$$A'B' + B'\Gamma' + \Gamma'A' < AB + B\Gamma + \Gamma A.$$

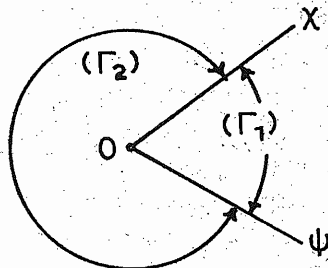
12. Δίδεται ἡ κλειστὴ κυρτὴ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΓΔΑ καὶ φέρομεν τὰ τμήματα ΑΓ καὶ ΒΔ. Δείξατε ὅτι

$$\frac{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A}{2} < A\Gamma + B\Delta < AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A.$$

13. Νὰ διατυπωθοῦν οἱ ὁρισμοὶ κυρτῆς καὶ μὴ κυρτῆς ἐπιφανείας ἀντίστοιχοι πρὸς ἐκείνους τῆς κυρτῆς καὶ μὴ κυρτῆς γραμμῆς. Νὰ ἀναφερθῇ ἀνὰ ἓν παράδειγμα ἀπὸ τὰς ἐπιφανείας γνωστῶν στερεῶν.

ΓΩΝΙΑΙ

50. Ὁρισμός. Δύο ἡμιευθεῖαι Οx καὶ Οy μὲ κοινὴν ἀρχὴν σημεῖον Ο (σχ. 38), διαιροῦν τὸ ἐπίπεδον εἰς δύο ἐπίπεδα τμήματα (Γ_1) καὶ (Γ_2), ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν εἶναι κυρτὸν καὶ τὸ ἄλλο μὴ κυρτόν. Ἕκαστον ἐκ τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων τμημάτων (Γ_1) καὶ (Γ_2) καλεῖται γωνία καὶ μάλιστα ἡ μία κυρτὴ καὶ ἡ ἄλλη μὴ κυρτή. Ἄρα **γωνία καλεῖται ἕκαστον ἐκ τῶν δύο ἐπιπέδων τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα δύο ἡμιευθεῖαι μὲ κοινὴν ἀρχὴν διαιροῦν τὸ ἐπίπεδόν των.**

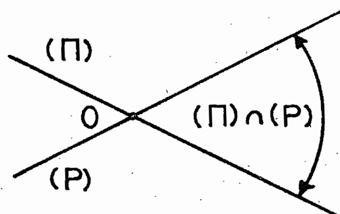


Σχ. 38

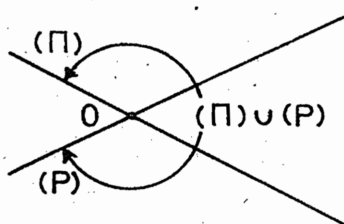
Αἱ ἡμιευθεῖαι Οx καὶ Οy καλοῦνται **πλευραὶ** ἑκάστης γωνίας καὶ ἡ κοινὴ ἀρχὴ Ο τῶν πλευρῶν καλεῖται **κορυφὴ** ἑκάστης γωνίας ἐκ τῶν (Γ_1) καὶ (Γ_2), συμβολίζονται δὲ $x\widehat{O}y$ καὶ $x\check{O}y$ ἀντιστοίχως.

Ἰσοδύναμοι πρὸς τὸν προηγούμενον ὁρισμὸν εἶναι καὶ οἱ ἀκόλουθοι δύο ὁρισμοί :

Κυρτὴ γωνία καλεῖται ἡ τομὴ δύο ἡμιεπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων αἱ ἀρχικαὶ εὐθεῖαι τέμνονται εἰς σημεῖον Ο (σχ. 39).



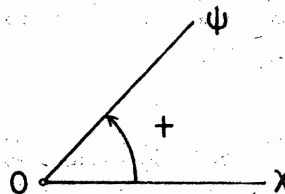
Σχ. 39



Σχ. 40

Μὴ κυρτὴ γωνία καλεῖται ἡ ἕνωσις δύο ἡμιεπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων αἱ ἀρχικαὶ εὐθεῖαι τένμονται εἰς σημεῖον Ο (σχ. 40).

51. Προσανατολισμὸς γωνίας — Ἐπέκτασις τῆς ἐννοίας τῆς γωνίας. Σκόπιμον εἶναι ὡρισμένας φορὰς νὰ θεωρήσωμεν τὴν γωνίαν, ὡς περιοχὴν τοῦ ἐπιπέδου, διαγραφομένην ὑπὸ ἡμιευθείας Οx, στρεφομένης εἰς τὸ ἐπίπεδον περὶ τὴν ἀρχὴν Ο κατὰ ὡρισμένην φορὰν περιστροφῆς (σχ. 41). Κατὰ ταῦτα, μία γωνία θὰ θεωρεῖται πλήρως καθωρισμένη, ὅταν εἶναι γνωστὰ τὰ ἀκόλουθα τέσσαρα στοιχεῖα της :



Σχ. 41

i) Ἡ ἀρχικὴ πλευρά της Οx.

ii) Ἡ τελικὴ πλευρά της Οy.

iii) Ἡ φορὰ διαγραφῆς της, ἤτοι ἡ φορὰ κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἀρχικὴ πλευρά της Οx, στρεφομένη περὶ τὴν ἀρχὴν Ο, λαμβάνει τὴν θέσιν Οy.

iv) Ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς k, ὁ ὁποῖος δεικνύει πόσας πλήρεις περιστροφὰς ἐξετέλεσεν ἡ ἀρχικὴ πλευρὰ Οx, πρὶν αὕτη λάβῃ τὴν τελικὴν θέσιν της Οy.

Μία γωνία μὲ τὰ προηγούμενα τέσσαρα στοιχεῖα, καλεῖται **προσανατολισμένη γωνία.**

Εἶναι προφανὲς ὅτι δύο μόνον εἶναι αἱ δυναταὶ φοραὶ περιστροφῆς τῆς ἀρχικῆς πλευρᾶς Οx περὶ τὴν ἀρχὴν Ο. Πρὸς διαφοροποίησιν αὐτῶν τῶν δύο φορῶν περιστροφῆς, τὴν μίαν, αὐθαιρέτως ἐκλεγεῖσαν, καλοῦμεν **θετικὴν** καὶ τὴν ἄλλην (ἀντίθετον τῆς πρώτης) **ἀρνητικὴν** φορὰν περιστροφῆς. Κατὰ συνήθειαν, ὡς θετικὴν φορὰν περιστροφῆς θεωροῦμεν τὴν ἀντίθετον τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου (σχ. 41).

Προκειμένου διὰ δύο ἢ περισσοτέρας γωνίας αὐτὸ ποὺ μᾶς ἐνδιαφέρει

κυρίως, δὲν εἶναι τὸ ἂν εἶναι θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς προσανατολισμέναι, ἀλλὰ τὸ ἂν αὗται εἶναι ὁμοιόστροφοι ἢ ἑτερόστροφοι, ἤτοι ἐὰν εἶναι τῆς αὐτῆς ἢ ἀντιθέτου φορᾶς. Εἰς τὴν συμβολικὴν ἀναγραφήν των, προτάσσομεν τὸ σύμβολον ∢ ἐνῶ εἰς τὴν ἀναγραφὴν τῆς γωνίας προτάσσομεν πάντοτε τὴν ἀρχικὴν πλευρὰν π.χ. ∢ xAy σημαίνει προσανατολισμένη γωνία μὲ ἀρχικὴν πλευρὰν τὴν Ax. Χρησιμοποιεῖται καὶ ὁ συμβολισμὸς $(\widehat{Ax, Ay})$ διὰ διατεταγμένου ζεύγους ἡμιευθειῶν, ὅπου ἡ Ax εἶναι ἡ ἀρχικὴ πλευρὰ καὶ ἡ Ay ἡ τελικὴ πλευρὰ τῆς γωνίας.

52. 'Ισότης εἰς τὸ σύνολον τῶν γωνιῶν. Δύο γωνίαι καλοῦνται ἴσαι τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν δύνανται νὰ ταυτισθοῦν διὰ μετατοπίσεως τῆς μιᾶς ἐπὶ τῆς ἄλλης.

'Επὶ προσανατολισμένων γωνιῶν πρέπει ἐπὶ πλέον νὰ εἶναι τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ, ἡ ἀρχικὴ δὲ πλευρά των νὰ ἔχῃ ἐκτελέσει τὸ αὐτὸ πλῆθος k πλήρων περιστροφῶν πρὶν λάβῃ τὴν τελικήν της θέσιν.

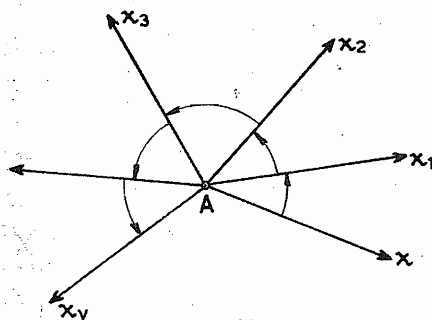
'Η σχέσις τῆς ἰσότητος εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική, ἤτοι ἐὰν (Γ_1), (Γ_2), (Γ_3) εἶναι γωνίαι, τότε :

i) $(\Gamma_1) = (\Gamma_1)$

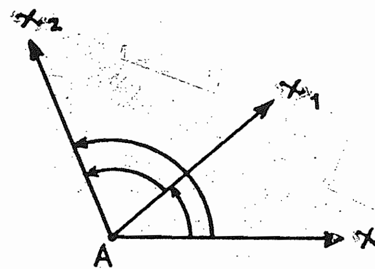
ii) $(\Gamma_1) = (\Gamma_2) \Rightarrow (\Gamma_2) = (\Gamma_1)$

iii) $(\Gamma_1) = (\Gamma_2) \wedge (\Gamma_2) = (\Gamma_3) \Rightarrow (\Gamma_1) = (\Gamma_3)$.

53. 'Εφεξῆς καὶ διαδοχικαὶ γωνίαι. 'Εφεξῆς καλοῦνται δύο γωνίαι $x\widehat{A}x_1$ καὶ $x_1\widehat{A}x_2$ (σχ. 43), ὅταν ἔχουν τὴν αὐτὴν κορυφὴν καί, νοούμεναι προσανατολισμέναι, εἶναι τῆς αὐτῆς φορᾶς, ἡ τελικὴ δὲ πλευρὰ τῆς πρώτης εἶναι ἀρχικὴ πλευρὰ τῆς δευτέρας.



Σχ. 42



Σχ. 43

Διαδοχικαὶ καλοῦνται ν τὸ πλῆθος γωνίαι (σχ. 42), ὅταν ἔχουν τὴν αὐτὴν κορυφὴν A καί, νοούμεναι προσανατολισμέναι, εἶναι τῆς αὐτῆς φορᾶς, ἡ τελικὴ δὲ πλευρὰ ἑκάστης εἶναι ἀρχικὴ πλευρὰ τῆς ἑπομένης π.χ. αἱ γωνία ∢ xAx_1, ∢ $x_1Ax_2, \ldots,$ ∢ $x_{\nu-1}Ax_\nu$.

54. Ἄθροισμα γωνιῶν. Ἄθροισμα δύο ἐφεξῆς γωνιῶν $\sphericalangle xAx_1$ καὶ $\sphericalangle x_1Ax_2$ καλεῖται ἡ γωνία $\sphericalangle xAx_2$ μὲ ἀρχικὴν πλευρὰν τὴν ἀρχικὴν πλευρὰν τῆς πρώτης γωνίας καὶ τελικὴν τὴν τελικὴν πλευρὰν τῆς δευτέρας γωνίας (σχ. 43). Συμβολικῶς γράφομεν $\sphericalangle xAx_1 + \sphericalangle x_1Ax_2 = \sphericalangle xAx_2$.

Ἐὰν αἱ γωνίαι δὲν εἶναι ἐφεξῆς, δυνάμεθα διὰ μετατοπίσεως νὰ τὰς καταστήσωμεν ἐφεξῆς. Ἡ διαδικασία πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος δύο γωνιῶν καλεῖται **πρᾶξις τῆς προσθέσεως** ἢ ἁπλῶς **πρόσθεσις** τῶν γωνιῶν.

Ἀναλόγως ὁρίζεται τὸ ἄθροισμα περισσοτέρων τῶν δύο γωνιῶν, ἂν εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων προσθέσωμεν τὴν τρίτην γωνίαν κ.ο.κ.

Εἰς τὸ σχῆμα 44 ἔχομεν :

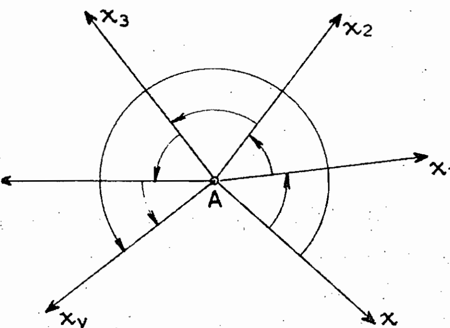
$$\sphericalangle xAx_1 + \sphericalangle x_1Ax_2 + \cdots + \sphericalangle x_{\nu-1}Ax_\nu = \sphericalangle xAx_\nu .$$

Ἡ πρᾶξις τῆς προσθέσεως εἰς τὸ σύνολον τῶν γωνιῶν εἶναι ἐσωτερικὴ πρᾶξις, διότι τὸ ἄθροισμα δύο γωνιῶν εἶναι γωνία καὶ ἑπομένως τὸ σύνολον τῶν γωνιῶν εἶναι κλειστὸν ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν τῆς προσθέσεως. Ἐπὶ πλέον εἶναι ἀντιμεταθετικὴ προσεταιριστικὴ καὶ μονότροπος, ἤτοι ἐὰν (Γ_1), (Γ_2), (Γ_3) εἶναι γωνίαι, ἰσχύουν :

i) $(\Gamma_1) + (\Gamma_2) = (\Gamma_2) + (\Gamma_1)$

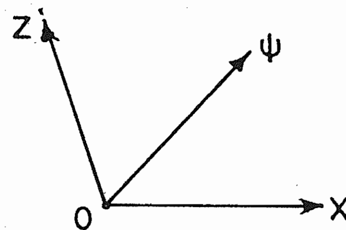
ii) $[(\Gamma_1) + (\Gamma_2)] + (\Gamma_3) = (\Gamma_1) + [(\Gamma_2) + (\Gamma_3)]$.

Αἱ ἀποδείξεις τῶν ἰδιοτήτων τούτων εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀντιστοίχους ἀποδείξεις διὰ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα καὶ παραλείπονται.



Σχ. 44

Παρατήρησις. Εἰς τὴν γεωμετρίαν χρησιμοποιοῦμεν κατὰ κανόνα γωνίας κυρτὰς καὶ μὴ προσανατολισμένας. Κατὰ ἁπλούστερον ὁρισμόν, τὸ ἄθροισμα δύο τοιούτων ἐφεξῆς γωνιῶν $\widehat{xOy}$ καὶ $\widehat{yOz}$ (σχ. 45), εἶναι ἡ γωνία $\widehat{xOz}$ μὲ τὴν αὐτὴν κορυφὴν O, πλευρὰς τὰς μὴ κοινὰς πλευρὰς Ox καὶ Oz τῶν γωνιῶν καὶ περιέχουσα τὴν κοινὴν πλευρὰν Oy αὐτῶν. Ἀναλόγως ὁρίζεται καὶ τὸ ἄθροισμα περισσοτέρων τῶν δύο γωνιῶν.



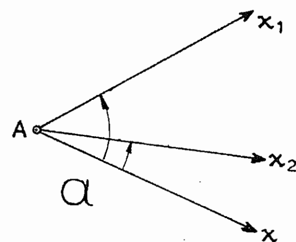
Σχ. 45

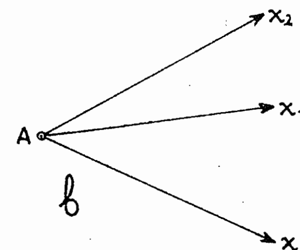
55. Διαφορὰ δύο γωνιῶν. Ἂς θεωρήσωμεν δύο προσανατολισμένας γωνίας $\sphericalangle xAx_1$ καὶ $\sphericalangle xAx_2$ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ, μὲ κοινὴν κορυφὴν A καὶ κοινὴν ἀρχικὴν πλευρὰν τὴν Ax (σχ. 46 α, β). Διαφορὰ τῆς $\sphericalangle xAx_2$ ἀπὸ τὴν $\sphericalangle xAx_1$, συμβολιζομένη μὲ $\sphericalangle xAx_1 - \sphericalangle xAx_2$, καλεῖται ἡ προσανατολισμένη γωνία $\sphericalangle x_2Ax_1$, ἤτοι εἶναι $\sphericalangle xAx_1 - \sphericalangle xAx_2 =$

$\sphericalangle\ x_2Ax_1$, τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν $\sphericalangle\ xAx_1 = \sphericalangle\ xAx_2 + \sphericalangle\ x_2Ax_1$.

Ἡ διαδικασία πρὸς εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς δύο γωνιῶν καλεῖται **πρᾶξις τῆς ἀφαιρέσεως** ἢ ἁπλῶς **ἀφαίρεσις** τῶν δύο γωνιῶν.

Συναφῶς ὁρίζομεν καὶ τὴν σχέσιν τῆς ἀνισότητος (διατάξεως) εἰς τὸ σύνολον τῶν γωνιῶν, ὡς ἀκολούθως: Ἐὰν ἡ διαφορὰ $\sphericalangle\ x_2Ax_1$ τῶν δύο γωνιῶν εἶναι τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ πρὸς ἐκεῖνον τῶν ἀρχικῶν γωνιῶν, ἡ πρώτη ἀπὸ τὰς ἀρχικὰς γωνίας $\sphericalangle\ xAx_1$ καλεῖται μεγαλυτέρα (ἀπολύτως) τῆς δευτέρας γωνίας $\sphericalangle\ xAx_2$ (σχ. 46α) καὶ συμβολίζομεν $x\widehat{A}x_1 > x\widehat{A}x_2$. Ἐὰν ἡ διαφορὰ $\sphericalangle\ x_2Ax_1$ εἶναι ἀντιθέτου προσανατολισμοῦ πρὸς ἐκεῖνον τῶν ἀρχικῶν γωνιῶν, ἡ πρώτη ἀπὸ τὰς ἀρχικὰς γωνίας $\sphericalangle\ xAx_1$ καλεῖται μικροτέρα (ἀπολύτως) τῆς δευτέρας γωνίας $\sphericalangle\ xAx_2$ (σχ. 46β) καὶ συμβολίζομεν $x\widehat{A}x_1 < x\widehat{A}x_2$. (Αἱ προηγούμεναι σχέσεις ἀνισότητος εἶναι σχέσεις ἀπόλυτοι, ἤτοι ἀπηλλαγμέναι προσανατολισμοῦ).





Σχ. 46

Ἐὰν (Γ_1), (Γ_2), (Γ_3), (Γ_4) εἶναι γωνίαι, διατυπώνομεν τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας τῆς ἀνισότητος εἰς τὸ σύνολον τῶν γωνιῶν :

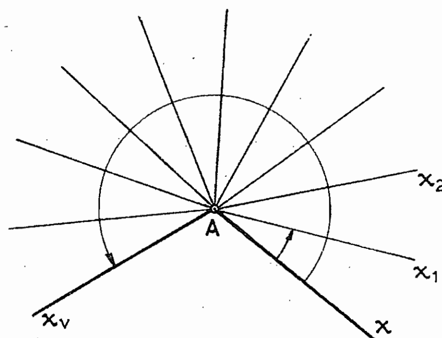
i) Ἡ σχέσις τῆς ἀνισότητος εἶναι μεταβατική, ἤτοι :

$$(\Gamma_1) > (\Gamma_2) \wedge (\Gamma_2) > (\Gamma_3) \Rightarrow (\Gamma_1) > (\Gamma_3).$$

ii) $(\Gamma_1) > (\Gamma_2) \wedge (\Gamma_3) > (\Gamma_4) \Rightarrow (\Gamma_1) + (\Gamma_3) > (\Gamma_2) + (\Gamma_4)$ δηλαδὴ δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν κατὰ μέλη ὁμοιοστρόφους ἀνισότητας.

iii) $(\Gamma_1) > (\Gamma_2) \Rightarrow (\Gamma_1) + (\Gamma_3) > (\Gamma_2) + (\Gamma_3)$ δηλαδὴ δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη μιᾶς ἀνισότητος γωνιῶν, τὴν αὐτὴν γωνίαν.

Αἱ ἀποδείξεις τῶν ἰδιοτήτων τούτων εἶναι ἀνάλογοι πρὸς ἐκείνας τῶν ἀντιστοίχων ἰδιοτήτων διὰ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα.



Σχ. 47

56. Γινόμενον γωνίας ἐπὶ φυσικὸν ἀριθμόν. Ἔστω μία γωνία $\sphericalangle\ xAx_1$. Καλεῖται γινόμενον αὐτῆς ἐπὶ τὸν φυσικὸν ἀριθμὸν ν ἡ γωνία $\sphericalangle\ xAx_\nu$, ἡ ὁποία προκύπτει ἀπὸ τὴν πρόσθεσιν ν γωνιῶν ἴσων πρὸς τὴν $\sphericalangle\ xAx_1$ (σχ. 47).

Τότε γράφομεν : $\sphericalangle\ xAx_\nu = \nu \cdot \sphericalangle\ xAx_1$.

57. Πηλίκον γωνίας διὰ φυσικοῦ ἀριθμοῦ. Ἔστω ἡ γωνία $\sphericalangle\ xAx_\nu$. Καλεῖται πηλίκον αὐτῆς διὰ τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν ἡ γωνία $\sphericalangle\ xAx_1$, διὰ τὴν ὁποίαν ἰσχύει ἡ σχέσις $\sphericalangle\ xAx_\nu = \nu \cdot \sphericalangle\ xAx_1$. Τότε γράφομεν :

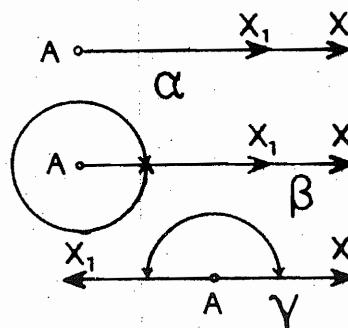
$$\sphericalangle\ xAx_1 = \frac{\sphericalangle\ xAx_\nu}{\nu}.$$

58. Πολλαπλασιασμὸς γωνίας ἐπὶ ρητόν. Ἔστω γωνία ω καὶ μ/ν εἷς ρητὸς ἀριθμός. Γινόμενον τῆς γωνίας ω ἐπὶ τὸν ρητὸν μ/ν καλεῖται μία γωνία φ, ἡ ὁποία προκύπτει ἐὰν τὴν γωνίαν ω τὴν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον μ καὶ τὸ γινόμενον τὸ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ ἀκεραίου ν. Τότε γράφομεν

$$\varphi = \frac{\mu}{\nu}\,\omega \quad \text{ἢ} \quad \varphi = \frac{\mu \cdot \omega}{\nu}$$

Παρατήρησις. Τὰς γωνίας, δυνάμεθα νὰ τὰς συμβολίζομεν, πρὸς ἁπλούστευσιν, καὶ μὲ πεζὰ (μικρὰ) γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, ὡς τὰ ω, φ, σ κλπ.

59. Μηδενικὴ καὶ πλήρης γωνία. Διὰ νὰ ἔχῃ νόημα καὶ ἡ διαφορὰ δύο ἴσων γωνιῶν, δεχόμεθα τὴν ὕπαρξιν **μηδενικῆς** γωνίας, ἤτοι γωνίας $x\hat{A}x_1$ τῆς ὁποίας αἱ δύο πλευραὶ ταυτίζονται (σχ. 48α). Ἡ μηδενικὴ γωνία ἀποτελεῖ τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον διὰ τὴν πρᾶξιν τῆς προσθέσεως εἰς τὸ σύνολον τῶν γωνιῶν, συμβολίζεται μὲ $\hat{0}$ ἢ $\sphericalangle\ 0$ καὶ εἶναι $\hat{A} + \hat{0} = \hat{0} + \hat{A} = \hat{A}$ διὰ κάθε γωνίαν $\hat{A}$.



Σχ. 48

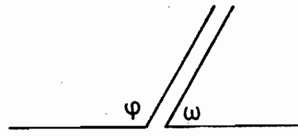
Πλήρης γωνία καλεῖται ἡ γωνία $x\widehat{A}x_1$, τῆς ὁποίας ἡ ἀρχικὴ πλευρὰ ταυτίζεται μὲ τὴν τελικὴν κατόπιν μιᾶς πλήρους περιστροφῆς αὐτῆς περὶ τὴν κορυφήν της A (σχ. 48β).

60. Πεπλατυσμένη γωνία ἢ εὐθεῖα γωνία καλεῖται μία κυρτὴ γωνία $x\widehat{A}x_1$, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ εἶναι ἀντίθετοι ἡμιευθεῖαι (σχ. 48γ).

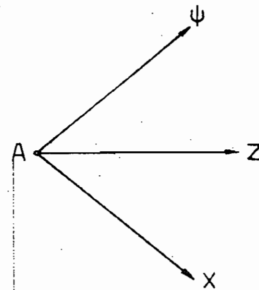
Παρατήρησις. Δύο πεπλατυσμέναι γωνίαι εἶναι ἴσαι, διότι ἡ μία δύναται νὰ ταυτισθῇ μετὰ τῆς ἄλλης διὰ μετατοπίσεως. Ἄρα ὅλαι αἱ πεπλατυσμέναι γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Ἑπομένως ἡ πεπλατυσμένη γωνία διατηρεῖ σταθερὸν μέγεθος.

61. Παραπληρωματικαὶ γωνίαι καλοῦνται δύο γωνίαι ω καὶ φ, ὅταν ἔχουν ἄθροισμα μίαν πεπλατυσμένην γωνίαν (σχ. 49).

62. Διχοτόμος γωνίας $x\widehat{A}y$ καλεῖται ἡ ἡμιευθεῖα Az μὲ ἀρχὴν τὴν κορυφὴν A, ἐσωτερικὴ τῆς $x\widehat{A}y$ καὶ ἡ ὁποία διαιρεῖ τὴν $x\widehat{A}y$ εἰς δύο ἄλλας ἴσας γωνίας, ἤτοι $x\widehat{A}z = z\widehat{A}y$ (σχ. 50).



Σχ. 49

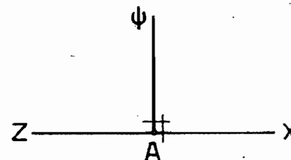


Σχ. 50

Ἀξίωμα. Μία γωνία ἔχει μίαν καὶ μόνον μίαν διχοτόμον.

63. Ὀρθὴ γωνία. Δύο ἴσαι καὶ παραπληρωματικαὶ γωνίαι $x\widehat{A}y$ **καὶ** $y\widehat{A}z$ **καλοῦνται ὀρθαί.** (σχ. 51). Τότε γράφομεν: $x\widehat{A}y = y\widehat{A}z = 1^{L}$.

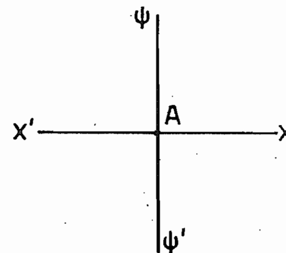
Πόρισμα. Ἡ κοινὴ πλευρὰ Ay δύο ἐφεξῆς ὀρθῶν γωνιῶν $x\widehat{A}y$ **καὶ** $y\widehat{A}z$ **εἶναι διχοτόμος τῆς πεπλατυσμένης γωνίας** $z\widehat{A}x$.



Σχ. 51

64. Θεώρημα. Ἐὰν ἐκ τῶν τεσσάρων κυρτῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι, δύο ἐφεξῆς εἶναι ἴσαι, τότε καὶ αἱ τέσσαρες γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ μάλιστα ὀρθαί, αἱ δὲ εὐθεῖαι λέγομεν ὅτι τέμνονται καθέτως.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι xAx′ καὶ yAy′ τεμνόμεναι εἰς τὸ A, διὰ τὰς ὁποίας ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι $x\widehat{A}y = y\widehat{A}x'$. Ἐπειδὴ ἐπὶ πλέον αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ Ax καὶ Ax′ τῶν ὡς ἄνω γωνιῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, αἱ γωνίαι αὗται εἶναι καὶ παραπληρωματικαί, ἄρα εἶναι ὀρθαί, ἤτοι $x\widehat{A}y = y\widehat{A}x' = 1^{L}$ (σχ. 52).



Σχ. 52

Ἡ γωνία $x'\widehat{A}y'$ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας $y\widehat{A}x'$, ἄρα εἶναι καὶ αὐτὴ ὀρθή, δηλαδὴ $x'\widehat{A}y' = 1^{L}$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι $y'\widehat{A}x = 1^{L}$. Αἱ εὐθαῖαι xAx′ καὶ yAy′ λέγονται κάθετοι ἡ μία ἐπὶ τὴν ἄλλην.

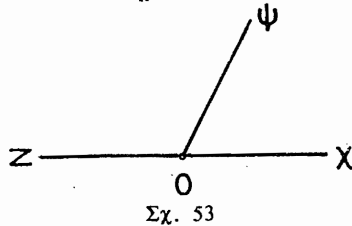
Ἡ καθετότης συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολον $\perp$. Γράφομεν δηλαδὴ xAx' $\perp$ yAy'.

65. Θεώρημα. Ἐξ ἑνὸς σημείου A εὐθείας zx μία καὶ μόνον μία κάθετος ἄγεται ἐπὶ τὴν zx.

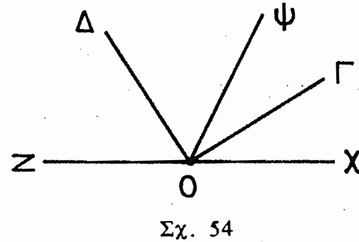
Ἀπόδειξις. Πράγματι, διότι ἡ διχοτόμος μιᾶς πεπλατυσμένης γωνίας εἶναι μία καὶ μόνον μία (σχ. 51), ἡ Ay $\perp$ zx.

66. Ἰδιότητες παραπληρωματικῶν γωνιῶν.

i) Αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν, εἶναι ἀντίθετοι ἡμιευθεῖαι.



Σχ. 53



Σχ. 54

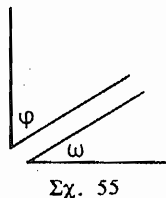
Ἀπόδειξις. Ἂς θεωρήσωμεν δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικὰς γωνίας $x\widehat{O}y$ καὶ $y\widehat{O}z$ (σχ. 53). Ἐπειδὴ ἐξ ὁρισμοῦ τῶν παραπληρωματικῶν γωνιῶν, εἶναι $x\widehat{O}y + y\widehat{O}z = 2^L$ καὶ ἐπειδὴ $x\widehat{O}y + y\widehat{O}z = x\widehat{O}z$, ἕπεται ὅτι $x\widehat{O}z = 2^L$ ἤτοι αἱ Ox καὶ Oz εἶναι ἀντίθετοι ἡμιευθεῖαι.

ii) Αἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι κάθετοι.

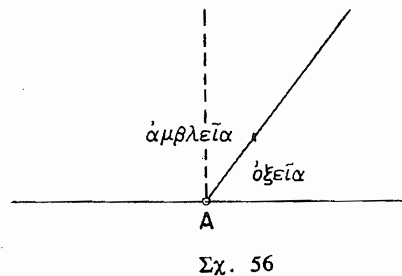
Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν OΓ καὶ OΔ αἱ διχοτόμοι τῶν ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν $x\widehat{O}y$ καὶ $y\widehat{O}z$ (σχ. 54). Ἐπειδὴ $x\widehat{O}y + y\widehat{O}z = 2^L$

$$\Rightarrow \frac{x\widehat{O}y}{2} + \frac{y\widehat{O}z}{2} = 1^L \Rightarrow \Gamma\widehat{O}y + y\widehat{O}\Delta = 1^L \Rightarrow \Gamma\widehat{O}\Delta = 1^L.$$

67. Συμπληρωματικαὶ γωνίαι καλοῦνται δύο γωνίαι ω καὶ φ, ὅταν ἔχουν ἄθροισμα μίαν ὀρθὴν γωνίαν,
ἤτοι $\omega + \varphi = 1^L$ (σχ. 55).



Σχ. 55



Σχ. 56

68. Πλάγιαι εὐθεῖαι. Δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι λέγονται πλάγιαι, ὅταν δὲν εἶναι κάθετοι.

69. Ὀξεῖα καὶ ἀμβλεῖα γωνία. Κάθε γωνία μικροτέρα τῆς ὀρθῆς καλεῖται ὀξεῖα γωνία (σχ. 56).

Κάθε κυρτὴ γωνία μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς καλεῖται ἀμβλεῖα γωνία (σχ. 56).

Δύο πλαγίως τεμνόμεναι εὐθεῖαι ὁρίζουν τέσσαρας γωνίας ἐκ τῶν ὁποίων αἱ δύο εἶναι ὀξεῖαι καὶ αἱ δύο ἀμβλεῖαι.

70. Ἡ σύγκρισις τῶν γωνιῶν. Ἐπειδὴ ἡ ὀρθὴ γωνία εἶναι σταθερὰ κατὰ μέγεθος, διότι εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πεπλατυσμένης γωνίας, διὰ τοῦτο αὕτη δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς μέτρον συγκρίσεως διὰ τὰς ἄλλας γωνίας. Κάθε γωνία δύναται νὰ ἐκφρασθῇ εἰς ὀρθὰς καὶ μέρη ὀρθῆς. Πρὸς καλυτέραν κλιμάκωσιν ὅμως διὰ τὴν σύγκρισιν τῶν γωνιῶν, ὡς μέτρον συγκρίσεως χρησιμοποιεῖται τὸ 1/90 τῆς ὀρθῆς γωνίας, τὸ ὁποῖον καλεῖται **γωνία μιᾶς μοίρας** ἢ ἁπλῶς **μοῖρα** καὶ συμβολίζεται 1^0. Οὕτω μία ὀρθὴ γωνία ἔχει 90^0, μία πεπλατυσμένη γωνία ἔχει 180^0 καὶ μία πλήρης γωνία ἔχει 360^0. Ἑκάστη μοῖρα ὑποδιαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν ὁποίων καλεῖται **πρῶτον λεπτὸν** καὶ συμβολίζεται μὲ $1'$, ἕκαστον δὲ πρῶτον λεπτὸν ὑποδιαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη ἕκαστον τῶν ὁποίων καλεῖται **δεύτερον λεπτὸν** καὶ συμβολίζεται $1''$. Τὰ δεύτερα λεπτὰ ἐν συνεχείᾳ ὑποδιαιροῦνται κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

14. Ἐὰν δύο ἐφεξῆς γωνιῶν αἱ διχοτόμοι των εἶναι κάθετοι, δείξατε ὅτι αἱ γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.

15. Ποίας γωνίας τὸ ἄθροισμα τῆς συμπληρωματικῆς της καὶ τῆς παραπληρωματικῆς της ἰσοῦται μὲ τὸ ἑπταπλάσιον τῆς γωνίας ;

16. Δείξατε ὅτι αἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς γωνιῶν σχηματίζουν γωνίαν ἴσην πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα αὐτῶν. Ἐφαρμογή : Αἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς γωνιῶν σχηματίζουν γωνίαν 120^0. Ἐὰν ἡ μία ἐξ αὐτῶν εἶναι ἴση πρὸς τὸ 1/4 τῆς ἄλλης, νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγεθος ἑκάστης.

17. Ἐὰν δύο γωνίαι ἔχουν διαφορὰν μίαν ὀρθὴν γωνίαν καὶ τοποθετηθοῦν ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης, οὕτως, ὥστε ν' ἀποκτήσουν κοινὴν κορυφὴν καὶ κοινὴν πλευράν, δείξατε ὅτι ἡ γωνία τῶν διχοτόμων των εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ὀρθῆς.

18. Ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς διχοτόμου δοθείσης γωνίας καὶ τυχούσης ἡμιευθείας μὲ ἀρχὴν τὴν κορυφὴν τῆς δοθείσης γωνίας καὶ κειμένης ἐκτὸς αὐτῆς, δείξατε ὅτι εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ τῆς ἡμιευθείας καὶ τῶν πλευρῶν τῆς δοθείσης γωνίας.

19. Ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς διχοτόμου δοθείσης γωνίας καὶ τυχούσης ἡμιευθείας μὲ ἀρχὴν τὴν κορυφὴν τῆς δοθείσης γωνίας καὶ κειμένης ἐντὸς αὐτῆς, δείξατε ὅτι εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν γωνιῶν τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ τῆς ἡμιευθείας καὶ τῶν πλευρῶν τῆς δοθείσης γωνίας.

20. Ἐὰν μία γωνία εἶναι τὰ 3/8 τῆς ὀρθῆς, νὰ εὑρεθῇ ἡ συμπληρωματικὴ καὶ ἡ παραπληρωματικὴ αὐτῆς εἰς μέρη ὀρθῆς καὶ εἰς μοίρας.

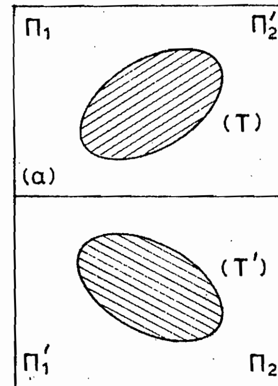
21. Τρεῖς διαδοχικαὶ γωνίαι ἔχουν ἄθροισμα ἴσον πρὸς 2 ὀρθάς. Ἐὰν ἡ β' γωνία εἶναι τὰ 4/5 τῆς α' καὶ ἡ γ' τὸ 1/3 τῆς α' νὰ εὑρεθοῦν αὗται εἰς μέρη ὀρθῆς καὶ εἰς μοίρας.

22. Ἐκ σημείου Α ἄγονται τρεῖς ἡμιευθεῖαι Ax, Ay, Az οὕτως, ὥστε αἱ τρεῖς διαδοχικαὶ γωνίαι $\widehat{xAy}$, $\widehat{yAz}$, $\widehat{zAx}$ νὰ εἶναι ἴσαι. Δείξατε ὅτι ἑκάστη τῶν ἡμιευθειῶν τούτων προεκτεινομένη διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῶν δύο ἄλλων ἡμιευθειῶν.

23. Ἐὰν τέσσαρες ἡμιευθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, σχηματίζουν γωνίας $\widehat{AOB} = \widehat{AO\Delta}$ καὶ $\widehat{BO\Gamma} = \widehat{\Gamma O\Delta}$, δείξατε ὅτι αἱ ἡμιευθεῖαι ΟΑ καὶ ΟΓ ἀποτελοῦν εὐθεῖαν.

ΑΞΟΝΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

71. Ἔστω ἐπίπεδον (Π) καὶ μία εὐθεῖα (α) αὐτοῦ, ἡ ὁποία τὸ διαιρεῖ εἰς τὰ δύο ἡμιεπίπεδα (Π_1) καὶ (Π_2) (σχ. 57). Ἐὰν φαντασθῶμεν ὅτι τὸ (Π) περιστρέφεται περὶ τὴν εὐθεῖαν (α) εἰς τρόπον, ὥστε τὸ ἡμιεπίπεδον (Π_1) νὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν (Π'_1) ταυτιζόμενον μετὰ τοῦ (Π_2) καὶ τὸ (Π_2) νὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν (Π'_2) ταυτιζόμενον μετὰ τοῦ (Π_1), τότε ἓν οἱονδήποτε σχῆμα (Τ) τοῦ ἐπιπέδου (Π) θὰ καταλάβῃ μίαν θέσιν (Τ′), ἡ ὁποία θὰ καλῆται **συμμετρικὴ** τοῦ σχήματος (Τ) ὡς πρὸς **ἄξονα συμμετρίας** τὴν εὐθεῖαν (α). Εἶναι προφανὲς ὅτι ἐὰν ὑπάρχουν σημεῖα τοῦ (Τ) ἐπὶ τοῦ ἄξονος (α), ταῦτα παραμένουν εἰς τὴν αὐτὴν θέσιν κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ ἐπιπέδου (Π) καὶ καλοῦνται **ἀναλλοίωτα** σημεῖα κατὰ τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς τὸν ἄξονα (α).



Σχ. 57

Συμβολικῶς, διὰ νὰ δηλώσωμεν ὅτι τὸ σχῆμα (Τ′) εἶναι συμμετρικὸν τοῦ (Τ) ὡς πρὸς ἄξονα εὐθεῖαν (α), γράφομεν :

$$(T) \xrightarrow{\Sigma(\alpha)} (T')$$

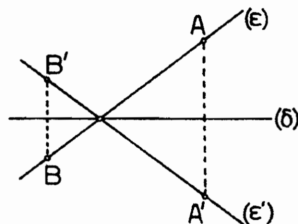
Πόρισμα Ι. Ἐὰν $(T) \xrightarrow{\Sigma(\alpha)} (T')$, τότε καὶ $(T') \xrightarrow{\Sigma(\alpha)} (T)$ δηλαδὴ ἐὰν τὸ (Τ′) εἶναι συμμετρικὸν τοῦ (Τ) ὡς πρὸς τὸν ἄξονα (α), τότε καὶ τὸ (Τ) εἶναι συμμετρικὸν τοῦ (Τ′) ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν ἄξονα.

Πράγματι, διότι καὶ μὲ μίαν δευτέραν περιστροφὴν τοῦ ἐπιπέδου (Π) περὶ τὴν εὐθεῖαν (α), τοῦτο θὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν καὶ συνεπῶς τὸ (Τ′) θὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν τοῦ (Τ). Ὡς ἐκ τούτου, τὰ δύο σχήματα (Τ) καὶ (Τ′) καλοῦνται συμμετρικὰ μεταξύ των ὡς πρὸς τὸν ἄξονα (α).

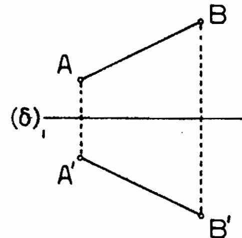
Πόρισμα ΙΙ. Δύο συμμετρικὰ μεταξύ των σχήματα εἶναι ἴσα. Διότι τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν δύναται διὰ μιᾶς μετατοπίσεως νὰ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ ἄλλου. Ἡ μετατόπισις αὕτη (τῆς συμμετρίας) καλεῖται ἀναστροφή.

Πόρισμα III. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ συμμετρικὸν εὐθείας (ε) ὡς πρὸς ἄξονα συμμετρίας εὐθεῖαν (δ), κατ' ἀρχὰς γνωρίζομεν ὅτι εἶναι ἴσον σχῆμα καὶ συνεπῶς εἶναι εὐθεῖα (ε'). Ἀρκεῖ ἑπομένως νὰ εὕρωμεν τὰ συμμετρικὰ Α' καὶ Β' δύο τυχόντων σημείων Α καὶ Β τῆς (ε). Ταῦτα θὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς συμμετρικῆς εὐθείας (ε') τῆς (ε) καὶ συνεπῶς εἶναι ἱκανὰ νὰ τὴν ὁρίσουν.

Συνήθως ὡς ἓν ἐκ τῶν δύο σημείων λαμβάνεται τὸ σημεῖον κατὰ τὸ ὁποῖον ἡ (ε) τέμνει τὸν ἄξονα (δ), ἐφ' ὅσον τοῦτο ὑπάρχει, διότι παραμένει ἀναλλοίωτον κατὰ τὴν συμμετρίαν ἐφ' ὅσον ἀνήκει εἰς τὸν ἄξονα (δ) (σχ. 58).



Σχ. 58



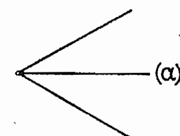
Σχ. 59

Πόρισμα IV. Τὸ συμμετρικὸν Α'Β' εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ ὡς πρὸς ἄξονα (δ) ὁρίζεται ἀπὸ τὰ συμμετρικὰ Α' καὶ Β' τῶν ἄκρων Α καὶ Β τοῦ ΑΒ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα (δ) (σχ. 59).

Σημείωσις. Ἡ ἀξονικὴ συμμετρία καλεῖται καὶ **κατοπτρισμός,** διότι δύο συμμετρικὰ μεταξύ των σχήματα ἐμφανίζουν τοιαύτην σχέσιν, οἵαν σχέσιν ἐμφανίζει τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν μὲ τὸ κατοπτρικόν του εἴδωλον.

72. Ἄξων συμμετρίας σχήματος. Ἐὰν ὅλα τὰ σημεῖα ἑνὸς σχήματος (Σ) εἶναι ἀνὰ δύο συμμετρικὰ ὡς πρὸς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (α), τότε λέγομεν ὅτι τὸ (Σ) ἔχει ἄξονα συμμετρίας τὴν εὐθεῖαν (α). Αὕτη δὲν ἀνήκει κατ' ἀνάγκην εἰς τὸ (Σ) καὶ χωρίζει αὐτὸ εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ὡς παράδειγμα ἀναφέρομεν τὴν διχοτόμον μιᾶς γωνίας, ἡ ὁποία εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος (σχ. 60).



Σχ. 60

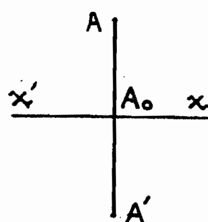
ΚΑΘΕΤΟΙ ΚΑΙ ΠΛΑΓΙΑΙ

73. Μεσοκάθετος. Ἔστω εὐθεῖα xx' καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτῆς. Θεωροῦμεν τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ Α' ὡς πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν xx' καὶ φέρομεν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΑ' (σχ. 61), τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν xx' εἰς τὸ σημεῖον A_0. Τότε, λόγῳ τῆς συμμετρίας, ἔχομεν ἀφ' ἑνὸς μὲν $AA_0 = A'A_0$, ἤτοι τὸ A_0 εἶναι μέσον τοῦ τμήματος ΑΑ', ἀφ' ἑτέρου δὲ $\widehat{AA_0}x = \widehat{A'A_0}x$

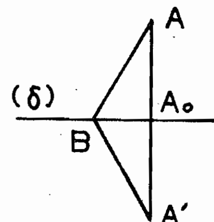
καὶ ἐπειδὴ ἐπὶ πλέον αἱ γωνίαι αὗται εἶναι παραπληρωματικαί, ἕπεται ὅτι εἶναι ὀρθαί, ἤτοι αἱ εὐθεῖαι xx′ καὶ AA′ εἶναι κάθετοι μεταξύ των. Ἡ εὐθεῖα xx′, ὡς κάθετος εἰς τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AA′, καλεῖται **μεσοκάθετος** αὐτοῦ.

Πόρισμα. Ὁ ἄξων συμμετρίας εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ κάθε ζεῦγος συμμετρικῶν σημείων A, A′.

74. Θεώρημα. Ἐξ ἑνὸς σημείου A κειμένου ἐκτὸς εὐθείας (δ), μία καὶ μόνον μία κάθετος ἄγεται ἐπ' αὐτήν.



Σχ. 61



Σχ. 62

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τὸ συμμετρικὸν A′ τοῦ A ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν (δ) καὶ φέρομεν τὸ τμῆμα AA′, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν (δ) εἰς τὸ A_0 (σχ. 62).

Ἡ συμμετρία μᾶς ἐξασφαλίζει τὴν AA′ κάθετον ἐπὶ τῆς (δ), ἄρα ὑπάρχει ἐκ τοῦ A κάθετος ἐπὶ τὴν (δ).

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐκ τοῦ A ὑπάρχει καὶ ἄλλη κάθετος ἐπὶ τὴν (δ), ἡ AB. Τότε θὰ εἶναι $\widehat{ABA_0} = 1^L$. Ἡ A′B εἶναι ἡ συμμετρικὴ τῆς AB καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι καὶ $\widehat{A'BA_0} = 1^L$. Ἄρα $\widehat{ABA'} = 2^L$. Ἑπομένως ἡ γραμμὴ ABA′ θὰ εἶναι εὐθεῖα. Τὰ σημεῖα A καὶ A′ ὅμως μίαν καὶ μόνον μίαν εὐθεῖαν ὁρίζουν, τὴν AA_0A'. Ἑπομένως ἡ ABA′ δὲν δύναται νὰ εἶναι κάθετος παρὰ μόνον ἐὰν ταυτίζεται μὲ τὴν AA_0A'. Ἄρα δὲν δύναται νὰ ὑπάρχῃ καὶ δευτέρα κάθετος ἐκ τοῦ A ἐπὶ τὴν (δ).

Σημείωσις. Ἡ χρησιμοποιηθεῖσα εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα ἀποδεικτικὴ μέθοδος καλεῖται **«μέθοδος τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς»** ἢ «μέθοδος τοῦ ἀποκλεισμοῦ τῶν δυνατῶν περιπτώσεων». Αὕτη ὀφείλεται εἰς τὸν Εὐκλείδην καὶ συνίσταται εἰς τὸ ἑξῆς :

Εὑρισκόμενοι εἰς ἀδυναμίαν νὰ προβῶμεν εἰς τὴν ἄμεσον ἀπόδειξιν μιᾶς προτάσεως A, θεωροῦμεν ὅλα τὰ πιθανὰ ἐνδεχόμενα B, Γ,. . ., N τὰ ὁποῖα δυνατὸν νὰ συμβαίνουν. Λαμβάνοντες ἓν ἕκαστον ἐξ αὐτῶν καὶ μὲ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι τοῦτο συμβαίνει, κατόπιν λογικῆς ἐπεξεργασίας ἐὰν φθάσωμεν εἰς συμπέρασμα ἀναληθές, ἢ ἄτοπον ὅπως λέγομεν, ἀντιλαμβανόμεθα ὅτι εἰς τὸ ἐσφαλμένον συμπέρασμα μᾶς ὡδήγησεν ἡ ἐσφαλμένη ὑπόθεσις, ἡ ὁποία κατὰ συνέπειαν πρέπει νὰ ἀποκλεισθῇ. Διὰ τοῦ τρόπου αὐτοῦ, ἐὰν ἀποκλεισθοῦν ὡς ἐσφαλμένα τὰ ἐνδεχόμενα B, Γ,..., N, πειθόμεθα ὅτι τὸ μόνον τὸ ὁποῖον ἀληθεύει εἶναι τὸ ἐνδεχόμενον A.

Τὰ ἐνδεχόμενα B, Γ, . . ., N καλοῦνται **συμπληρωματικὰ** τοῦ A. Ἐὰν ἕνα ἐνδεχόμενον A ἔχῃ ἓν μόνον συμπληρωματικὸν B, τοῦτο καλεῖται καὶ **ἀντίθετον** τοῦ A.

Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἡ ὑπόθεσις ὅτι δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ καὶ μία δευτέρα κάθετος ἐκ τοῦ A πρὸς τὴν (δ), μᾶς ὡδήγησεν εἰς τὸ ἐσφαλμένον (ἄτοπον) συμπέρασμα ὅτι διὰ τῶν σημείων A αἱ A′ διέρχονται δύο εὐθεῖαι. Αὐτὸς ἦτο καὶ ὁ λογος βάσει τοῦ ὁποίου ἀπεκλείσθη ἡ ὕπαρξις καὶ μιᾶς δευτέρας καθέτου.

75. 'Ιδιότης τῆς μεσοκαθέτου. Θεώρημα. Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς μεσοκαθέτου (δ) εὐθυγράμμου τμήματος AB καὶ μόνον αὐτά, ἔχουν τὴν ἰδιότητα νὰ ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος.

'Απόδειξις. Τὰ A καὶ B εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον (δ) (σχ. 63). 'Εὰν M εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς (δ), τότε ἡ συμμετρία μᾶς ἐξασφαλίζει $MA = MB$. 'Επομένως ὅλα τὰ σημεῖα τῆς μεσοκαθέτου ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰ ἄκρα A καὶ B τοῦ τμήματος.

Ἂς θεωρήσωμεν τώρα ἓν σημεῖον N, μὴ ἀνῆκον εἰς τὴν (δ) καὶ ἔστω ὅτι τοῦτο εὑρίσκεται πρὸς τὸ μέρος τοῦ B ὡς πρὸς τὴν (δ). Τότε ἡ NA θὰ τέμνῃ τὴν (δ) εἰς σημεῖον P, διὰ τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι

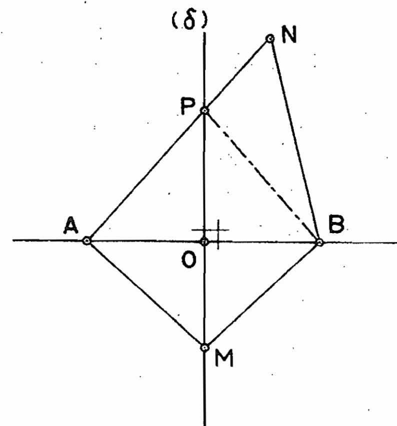
$$(1) \qquad PA = PB$$

ὡς σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου.

Γνωρίζομεν ὅμως (§ 40) ὅτι $NB < NP + PB$, ἡ ὁποία λόγῳ τῆς σχέσεως (1) δύναται νὰ γραφῇ :

$$NB < NP + PA \Rightarrow NB < NA$$

Ἄρα κάθε σημεῖον N, μὴ ἀνῆκον εἰς τὴν μεσοκάθετον, ἀπέχει ἀνίσους ἀποστάσεις ἀπὸ τὰ ἄκρα A καὶ B καὶ μάλιστα μεγαλυτέραν ἀπὸ ἐκεῖνο μετὰ τοῦ ὁποίου κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς μεσοκαθέτου. 'Επομένως **μόνον** τὰ σημεῖα τῆς μεσοναχθέτου (δ) ἔχουν τὴν ἰδιότητα νὰ ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος AB.



Σχ. 63

Παρατήρησις. Ἡ προηγουμένη ἰδιότης τῶν σημείων τῆς μεσοκαθέτου εὐθυγράμμου τμήματος καὶ μόνον αὐτῶν, νὰ ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος, ἀπεδείχθη διὰ τῆς λογικῆς ἰσοδυναμίας τῶν προτάσεων $A \Rightarrow B$ καὶ ὄχι $A \Rightarrow$ ὄχι B, ἐκ τῶν ὁποίων ἕπεται $A \Longleftrightarrow B$.

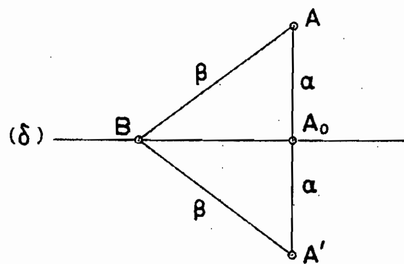
76. Γεωμετρικὸς τόπος καλεῖται κάθε σύνολον σημείων, τοῦ ὁποίου τὰ σημεῖα καὶ μόνον αὐτὰ ἔχουν μίαν ὡρισμένην ἰδιότητα.

Τὰ σημεῖα ἑνὸς γεωμετρικοῦ τόπου (συντόμως γ. τόπου) εἶναι ἐν γένει ἄπειρα καὶ συνιστοῦν ἓν σχῆμα (Τ). Ἐὰν f εἶναι ἡ καθοριστικὴ ἰδιότης ἑνὸς γ. τόπου (Τ), κάθε σημεῖον τοῦ σχήματος (Τ) ἔχει τὴν ἰδιότητα f, ἀλλὰ καὶ κάθε σημεῖον ἔχον τὴν ἰδιότητα f, ἀνήκει εἰς τὸν γ. τόπον (Τ).

Κατὰ ταῦτα, ἡ μεσοκάθετος (δ) ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ, εἶναι ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου μὲ τὴν καθοριστικὴν ἰδιότητα νὰ «ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰ ἄκρα Α καὶ Β τοῦ τμήματος ΑΒ».

77. Θεώρημα. Ἐὰν σημεῖον Α εὑρίσκεται ἐκτὸς εὐθείας (δ), τὸ κάθετον εὐθύγραμμον τμῆμα ἐκ τοῦ Α πρὸς τὴν (δ) εἶναι μικρότερον παντὸς πλαγίου εὐθυγράμμου τμήματος ἐκ τοῦ Α πρὸς τὴν (δ).

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τὸ συμμετρικὸν Α′ τοῦ σημείου Α ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν (δ) καὶ φέρομεν τὴν ΑΑ′, ἡ ὁποία τέμνει εἰς τὸ A_0 τὴν (δ). Ἡ συμμετρία μᾶς ἐξασφαλίζει τὴν ΑΑ′ κάθετον ἐπὶ τὴν (δ) καὶ $AA_0 = A'A_0 = \alpha$ (σχ. 64).



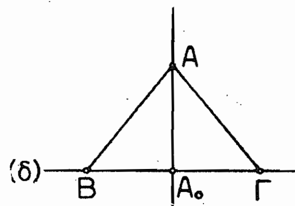
Σχ. 64

Ἐὰν θεωρήσωμεν καὶ ἓν πλάγιον εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ ἐκ τοῦ Α πρὸς τὴν (δ), τὸ Α′Β θὰ εἶναι τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν (δ), ἑπομένως $AB = A'B = \beta$.

Τότε θὰ εἶναι (§ 40) $AA' < AB + A'B$ ἢ $2\alpha < 2\beta \Rightarrow \alpha < \beta$ ἢ $AA_0 < AB$.

Ὁρισμός. Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ εὐθεῖαν καλεῖται τὸ μῆκος τοῦ καθέτου εὐθυγράμμου τμήματος ποὺ ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου πρὸς τὴν εὐθεῖαν.

78. Θεώρημα. Ἐὰν τὰ ἴχνη δύο πλαγίων εὐθυγράμμων τμημάτων ἐκ σημείου Α πρὸς εὐθεῖαν (δ) ἰσαπέχουν ἀπὸ τὸ ἴχνος A_0 τῆς ἐκ τοῦ Α καθέτου ἐπὶ τὴν (δ), τὰ τμήματα εἶναι ἴσα καὶ ἀντιστρόφως.



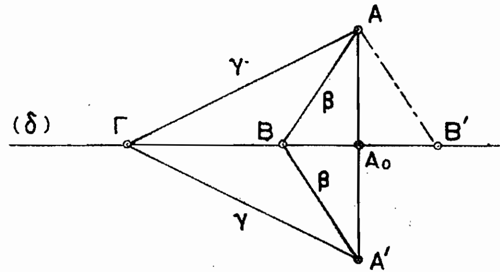
Σχ. 65

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΑΓ τὰ δύο πλάγια τμήματα ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν (δ), διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει $A_0B = A_0\Gamma$ (σχ. 65). Τότε τὰ Β καὶ Γ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἄξονα τὴν AA_0 καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι $AB = A\Gamma$.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω ὅτι εἶναι $AB = A\Gamma$. Τότε τὸ σημεῖον Α θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ τμήματος ΒΓ, δηλαδὴ ἡ κάθετος AA_0 ἐπὶ τὴν (δ) εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΒΓ (§75). Ἄρα $A_0B = A_0\Gamma$.

79. Θεώρημα. Ἐὰν τὰ ἴχνη δύο πλαγίων εὐθυγράμμων τμημάτων ἐκ σημείου Α πρὸς εὐθεῖαν (δ) ἀπέχουν ἀνίσους ἀποστάσεις ἀπὸ τὸ ἴχνος A_0 τῆς ἐκ τοῦ Α καθέτου ἐπὶ τὴν (δ), τὰ τμήματα εἶναι κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν ἄνισα καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΑΓ δύο πλάγια εὐθύγραμμα τμήματα ἐκ σημείου Α πρὸς εὐθεῖαν (δ), διὰ τὰ ὁποῖα ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι $A_0B < A_0\Gamma$ (1) (σχ. 66) ὅπου A_0 τὸ ἴχνος τῆς ἐκ τοῦ Α καθέτου ἐπὶ τὴν (δ). Δυνάμεθα πάντοτε νὰ θεωρήσωμεν τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος κείμενα ὡς πρὸς τὴν κάθετον AA_0, διότι ἂν τοῦτο δὲν συνέβαινε καὶ εἴχομεν τὰ ΑΓ καὶ ΑΒ′ ἑκατέρωθεν τῆς AA_0, θὰ ἐλαμβάναμεν τὸ συμμετρικὸν ΑΒ τοῦ ΑΒ′ ὡς πρὸς τὴν AA_0, τὸ ὁποῖον θὰ κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ὡς πρὸς τὴν AA_0 μετὰ τοῦ ΑΓ.



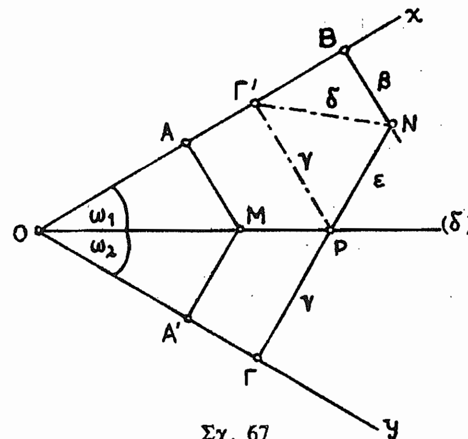
Σχ. 66

Θεωροῦμεν τὸ συμμετρικὸν Α′ τοῦ Α ὡς πρὸς τὴν (δ) καὶ φέρομεν τὰς Α′Β καὶ Α′Γ. Ἡ συμμετρία μᾶς ἐξασφαλίζει $AB = A'B = \beta$ καὶ $A\Gamma = A'\Gamma = \gamma$. Ἐκ τῆς σχέσεως (1) ἕπεται ὅτι ἡ κυρτὴ τεθλασμένη ΑΒΑ′ περικλείεται ὑπὸ τῆς ΑΓΑ′, ἐνῷ ἔχουν τὰ αὐτὰ ἄκρα. Τότε (§ 44) θὰ εἶναι

$$AB + A'B < A\Gamma + A'\Gamma \quad \text{ἢ} \quad 2\beta < 2\gamma \quad \Rightarrow \beta < \gamma \ \text{ἢ} \ \mathbf{AB < A\Gamma}.$$

Ἀντιστρόφως. Ἔστω ὅτι εἶναι $AB < A\Gamma$. Τότε ἀποκλείεται νὰ εἶναι $A_0B = A_0\Gamma$, διότι τότε θὰ ἦτο καὶ $AB = A\Gamma$, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἐπίσης ἀποκλείεται νὰ εἶναι καὶ $A_0B > A_0\Gamma$, διότι, ὡς ἐδείχθη, θὰ ἦτο καὶ $AB > A\Gamma$, καὶ αὐτὸ ἀντίκειται εἰς τὴν γενομένην ὑπόθεσιν.

Ἑπομένως τὸ μόνον τὸ ὁποῖον δύναται νὰ συμβαίνῃ εἶναι $A_0B < A_0\Gamma$.



Σχ. 67

80. Ἰδιότης τῆς διχοτόμου κυρτῆς γωνίας. Θεώρημα. Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς διχοτόμου (δ) κυρτῆς γωνίας $x\widehat{O}y$ καὶ μόνον αὐτά, ἔχουν τὴν ἰδιότητα νὰ ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τῆς διχοτόμου (δ) κυρτῆς γωνίας $x\widehat{O}y$ (σχ. 67). Ἐξ αὐτοῦ φέρομεν τὰς ΜΑ καὶ ΜΑ′ καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς Ox καὶ Oy ἀντιστοίχως. Ἡ συμμετρία ὡς πρὸς ἄξονα τὴν διχοτόμον (δ) ἀπεικονίζει τὴν ἡμιευθεῖαν Ox ἐπὶ τῆς Oy, ἐφ' ὅσον εἶναι $\omega_1 = \omega_2$. Περιστρέφομεν τὴν Ox περὶ τὴν διχοτόμον (δ), ὥστε αὕτη νὰ λάβῃ τὴν θέσιν τῆς Oy. Τότε τὸ σημεῖον Α θὰ συμπέσῃ μετὰ τοῦ Α′, διότι ἂν δὲν συνέβαινε τοῦτο, θὰ εἴχομεν δύο καθέτους ἐκ τοῦ Μ ἐπὶ τὴν Oy. Ἄρα εἶναι ΜΑ = ΜΑ′. Ἐξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι κάθε σημεῖον τῆς διχοτόμου (δ), ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας.

Ἔστω τώρα Ν σημεῖον ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας $x\widehat{O}y$ μὴ ἀνῆκον εἰς τὴν διχοτόμον (δ). Θὰ δείξωμεν ὅτι τοῦτο ἀπέχει ἀνίσους ἀποστάσεις ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας.

Ἐκ τοῦ Ν φέρομεν τὰς ΝΒ καὶ ΝΓ καθέτους ἐπὶ τὰς Ox καὶ Oy ἀντιστοίχως καὶ ἔστω ὅτι ἡ ΝΓ τέμνει τὴν διχοτόμον (δ) εἰς σημεῖον Ρ. Ἐκ τοῦ Ρ φέρομεν τὴν ΡΓ′ κάθετον ἐπὶ τὴν Ox. Τότε, ὡς ἐδείχθη, θὰ εἶναι ΡΓ = ΡΓ′ = γ. Ἐὰν καλέσωμεν ΝΒ = β καὶ ΝΡ = ε, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι $\beta < \varepsilon + \gamma$.

Φέρομεν τὴν ΝΓ′ = δ. Τότε, ἐπειδὴ ἡ β εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς Ox, ἡ δ θὰ εἶναι πλαγία, συνεπῶς

(1) $\beta < \delta$

Ἐπὶ πλέον ὅμως εἶναι καὶ (§ 40)

(2) $\delta < \gamma + \varepsilon$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι

$$\beta < \delta < \gamma + \varepsilon \text{ ἄρα } \beta < \gamma + \varepsilon \text{ ἢ } \mathbf{NB} < \mathbf{N\Gamma}$$

Ἑπομένως τὰ σημεῖα τῆς διχοτόμου (δ) ἀλλὰ καὶ μόνον αὐτὰ ἔχουν τὴν ἰδιότητα νὰ ἀπέχουν ἴσας ἀποστάσεις ἐκ τῶν πλευρῶν Ox καὶ Oy τῆς κυρτῆς γωνίας $x\widehat{O}y$.

Πόρισμα. Ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν γωνίας $x\widehat{O}y$ καὶ ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰς πλευράς της, εἶναι ἡ διχοτόμος (δ) τῆς γωνίας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α′.

24. Δίδονται δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἐὰν αἱ μεσοκάθετοι αὐτῶν τέμνωνται εἰς σημεῖον Ο καὶ εἶναι ΟΒ = ΟΓ, δείξατε ὅτι θὰ εἶναι καὶ ΟΑ = ΟΔ.

25. Δίδεται εὐθεῖα (δ), δύο σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἔστωσαν Α′ καὶ Β′ τὰ συμμετρικὰ αὐτῶν ὡς πρὸς τὴν (δ). Ἐὰν ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΑΒ τέμνῃ τὴν (δ) εἰς τὸ Ε, δείξατε ὅτι ΕΑ = ΕΒ = ΕΑ′ = ΕΒ′.

26. Δίδεται ὀρθὴ γωνία $x\widehat{O}y$. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ox λαμβάνομεν δύο σημεῖα Α καὶ Β τοιαῦτα, ὥστε ΟΑ < ΟΒ καὶ ἐπὶ τῆς Oy λαμβάνομεν δύο σημεῖα Γ καὶ Δ τοιαῦτα, ὥστε ΟΓ < ΟΔ. Δείξατε ὅτι ΑΓ < ΒΔ.

Β΄.

27. Ἐὰν δύο τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ μὴ ἀνήκοντα εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, ἔχουν κοινὴν μεσοκάθετον εὐθεῖαν (δ), δείξατε ὅτι αἱ μεσοκάθετοι τῶν τμημάτων ΑΓ καὶ ΒΔ τέμνονται ἐπὶ τῆς (δ).

28. Δίδεται γωνία $x\widehat{O}y$. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν της λαμβάνομεν σημεῖα Α καὶ Β οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι ΟΑ = ΟΒ. Ἐὰν Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας, δείξατε ὅτι ΜΑ = ΜΒ.

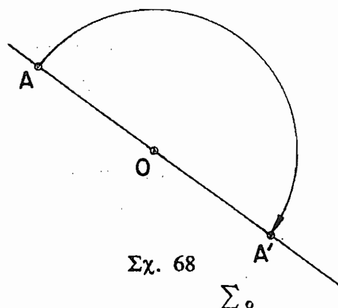
29. Δίδεται γωνία $x\widehat{O}y$ καὶ ἔστω Oz ἡ διχοτόμος της. Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Α καὶ ἔστω Β τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον Oz. Θεωροῦμεν τὰς καθέτους ΑΓ ⊥ Ox καὶ ΒΔ ⊥ Oy. Δείξατε ὅτι i) ΑΓ = ΒΔ, ii) ΑΔ = ΒΓ, iii) αἱ ΑΓ καὶ ΒΔ (προεκτεινόμεναι ἐν ἀνάγκῃ) τέμνονται ἐπὶ τῆς διχοτόμου Oz, iv), ὁμοίως καὶ αἱ ΑΔ καὶ ΒΓ.

30. Δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ καὶ θεωροῦμεν τὰς καθέτους ΑΔ ⊥ ΒΓ, ΒΕ ⊥ ΑΓ, ΓΖ ⊥ ΑΒ, ὅπου τὰ Δ, Ε καὶ Ζ εὑρίσκονται ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΑΔ + ΒΕ + ΓΖ < ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ.

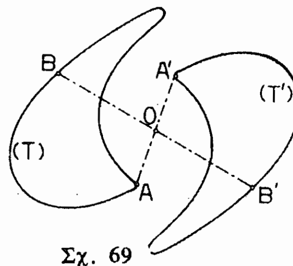
31. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ γ. τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἰσαπέχουν ἀπὸ δύο τεμνομένας εὐθείας εἰς σημεῖον Ο, εἶναι δύο κάθετοι εὐθεῖαι διερχόμεναι διὰ τοῦ Ο.

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

81. Ἔστω ἐπίπεδον (Π) καὶ σταθερὸν σημεῖον Ο αὐτοῦ. Δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, ὀλισθαῖνον ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του, νὰ στρέφεται περὶ τὸ Ο οὕτως, ὥστε τυχὸν σημεῖον Α αὐτοῦ νὰ καταλάβῃ θέσιν Α΄, ὅπου ἡ γωνία $A\widehat{O}A'$ νὰ εἶναι πεπλατυσμένη. Εἶναι προφανὲς ὅτι τὰ σημεῖα Α, Ο, Α΄ κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ εἶναι ΟΑ = ΟΑ΄ (σχ. 68). Τότε τὸ σημεῖον Α΄ καλεῖται συμμετρικὸν τοῦ Α ὡς πρὸς **κέντρον** συμμετρίας τὸ σημεῖον Ο, συμβο-



Σχ. 68



Σχ. 69

λικῶς δὲ γράφομεν $A \xrightarrow{\Sigma_o} A'$ καὶ ἀναγιγνώσκομεν «τὸ Α, μέσῳ τῆς συμμετρίας κέντρου Ο, ἔχει τὸ συμμετρικόν του εἰς τὸ Α΄» ἢ «τὸ Α ἀπεικονίζεται μέσῳ τῆς συμμετρίας κέντρου Ο, εἰς τὸ Α΄».

Ἐὰν (Τ) εἶναι ἓν τυχὸν σχῆμα τοῦ ἐπιπέδου (Π) (σχ. 69), κατὰ τὴν περι-

στροφήν, τοῦτο θὰ καταλάβῃ νέαν θέσιν (Τ′), ἡ ὁποία καλεῖται συμμετρικὴ αὐτοῦ κατὰ τὴν συμμετρίαν $\sum_{O}$. Τότε, τυχὸν σημεῖον Α τοῦ (Τ) θὰ ἔχῃ τὸ συμμετρικόν του Α′ ἐπὶ τοῦ (Τ′), ἀλλὰ καὶ τυχὸν σημεῖον Β′ τοῦ (Τ′) εἶναι τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς σημείου Β τοῦ (Τ) κατὰ τὴν συμμετρίαν κέντρου Ο. Συμβολικῶς γράφομεν :

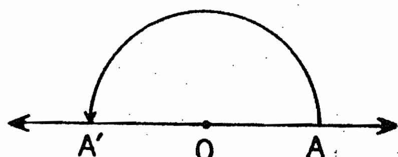
$$(T) \xrightarrow{\sum_{O}} (T')$$

Τὸ κέντρον τῆς συμμετρίας Ο εἶναι τὸ μόνον ἀναλλοίωτον σημεῖον τοῦ (Π) κατὰ τὴν κεντρικὴν συμμετρίαν $\sum_{O}$, ἤτοι τὸ μόνον σημεῖον, τὸ ὁποῖον ταυτίζεται μετὰ τοῦ συμμετρικοῦ του.

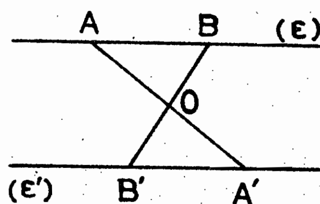
Πόρισμα Ι. **Ἐὰν** $(T) \xrightarrow{\sum_{O}} (T')$ **τότε καὶ** $(T') \xrightarrow{\sum_{O}} (T)$, δηλαδὴ ἐὰν τὸ (Τ′) εἶναι συμμετρικὸν τοῦ (Τ) κατὰ τὴν συμμετρίαν κέντρου Ο, τότε καὶ τὸ (Τ) εἶναι συμμετρικὸν τοῦ (Τ′) κατὰ τὴν αὐτὴν συμμετρίαν.

Πόρισμα ΙΙ. Δύο συμμετρικὰ μεταξύ των σχήματα κατὰ τὴν συμμετρίαν κέντρου Ο εἶναι ἴσα, διότι ἡ κεντρικὴ συμμετρία εἶναι μετατόπισις.

Πόρισμα ΙΙΙ. Κάθε εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου Ο, παραμένει ἀναλλοίωτος κατὰ τὴν κεντρικὴν συμμετρίαν $\sum_{O}$, ἤτοι ταυτίζεται μετὰ τῆς συμμετρικῆς της, ἐνῷ κάθε ἡμιευθεῖα μὲ ἀρχὴν τὸ Ο ἔχει ὡς συμμετρικὴν τὴν ἀντίθετόν της (σχ. 70).



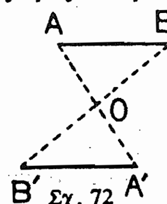
Σχ. 70



Σχ. 71

Πόρισμα IV. Τὸ συμμετρικὸν εὐθείας (ε) ὡς πρὸς κέντρον Ο, ὡς ἴσον σχῆμα, εἶναι εὐθεῖα (ε′), ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὰ συμμετρικὰ Α′ καὶ Β′ δύο σημείων Α καὶ Β τῆς (ε), ὡς πρὸς κέντρον συμμετρίας τὸ Ο (σχ. 71).

Πόρισμα V. Τὸ συμμετρικὸν εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ ὡς πρὸς κέντρον σημεῖον Ο, ὡς ἴσον σχῆμα, εἶναι εὐθύγραμμον τμῆμα καὶ ὁρίζεται ἀπὸ τὰ συμμετρικὰ Α′ καὶ Β′ τῶν ἄκρων Α καὶ Β αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸ Ο (σχ. 72).



Σχ. 72

82. Θεώρημα. Δύο εὐθεῖαι (ε) καὶ (ε′) συμμετρικαὶ κατὰ μίαν κεντρικὴν συμμετρίαν $\sum_{O}$ τῆς ὁποίας τὸ κέντρον Ο δὲν ἀνήκει εἰς αὐτάς, οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουν.

Ἀπόδειξις. Κατ᾽ ἀρχὰς παρατηροῦμεν ὅτι αἱ δύο εὐθεῖαι δὲν δύνανται

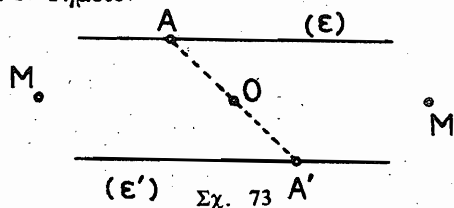
νὰ ταυτίζωνται, διότι τὸ κέντρον συμμετρίας δὲν ἀνήκει εἰς τὴν (ε) (σχ. 73).

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ὑπάρχει ἓν σημεῖον Μ κοινὸν τῶν δύο εὐθειῶν ἤτοι :

(1) Μ ∈ (ε) καὶ Μ ∈ (ε′)

Τότε ἂν Μ′ εἶναι τὸ συμμετρικόν του ὡς πρὸς τὸ Ο, ἐκ τῶν σχέσεων (1) ἕπεται ἀντιστοίχως:

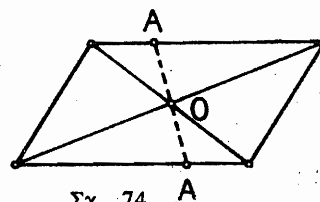
Μ′ ∈ (ε′) καὶ Μ′ ∈ (ε)



Σχ. 73

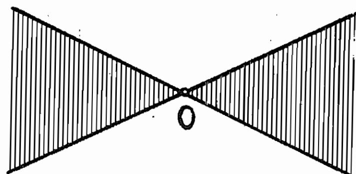
ἤτοι τὸ Μ′ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν δύο εὐθειῶν. Τότε ὅμως αἱ δύο εὐθεῖαι θὰ ἐταυτίζοντο ὡς ἔχουσαι δύο κοινὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′, ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα αἱ δύο εὐθεῖαι δὲν δύνανται νὰ ἔχουν κοινὸν σημεῖον.

83. Κέντρον συμμετρίας σχήματος. Ἐὰν ὅλα τὰ σημεῖα ἑνὸς σχήματος (Σ) εἶναι ἀνὰ δύο συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο, τότε λέγομεν ὅτι τὸ (Σ) ἔχει κέντρον συμμετρίας τὸ σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον συνήθως καλεῖται ἁπλῶς **κέντρον** τοῦ σχήματος (σχ. 74).

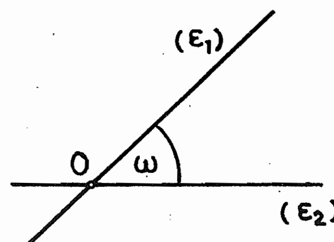


Σχ. 74

84. Κατὰ κορυφὴν γωνίαι. Δύο γωνίαι καλοῦνται κατὰ κορυφὴν τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν ἔχουν κοινὴν κορυφὴν σημεῖον Ο καὶ εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς κέντρον συμμετρίας τὴν κορυφήν των Ο (σχ. 75).



Σχ. 75



Σχ. 76

Πόρισμα I. Εἰς δύο κατὰ κορυφὴν γωνίας αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης.

Πόρισμα II. Δύο κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι, λόγῳ συμμετρίας.

85. Γωνία τεμνομένων εὐθειῶν. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) τέμνωνται εἰς σημεῖον Ο (σχ. 76), καλοῦμεν γωνίαν αὐτῶν τὴν μικροτέραν γωνίαν ω ἐκ τῶν σχηματιζομένων μὲ κορυφὴν τὸ Ο. Ἡ γωνία ω καλεῖται καὶ γωνία κλίσεως τῆς μιᾶς εὐθείας ὡς πρὸς τὴν ἄλλην.

4

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

32. Ἐὰν δύο ἡμιευθεῖαι Ax καὶ A'x' εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς κέντρον σημεῖον O, δείξατε ὅτι κάθε εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ O καὶ τέμνουσα τὴν Ax εἰς σημεῖον B, τέμνει καὶ τὴν A'x' εἰς σημεῖον B' καὶ ἐπὶ πλέον ὅτι εἶναι AB = A'B'.

33. Δείξατε ὅτι αἱ διχοτόμοι δύο κατὰ κορυφὴν γωνιῶν, εἶναι ἀντίθετοι ἡμιευθεῖαι.

34. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς κέντρον σημεῖον O, δείξατε ὅτι κάθε εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ O καὶ τέμνουσα τὴν (ε_1), τέμνει καὶ τὴν (ε_2) καὶ ἐπὶ πλέον σχηματίζει ἴσας γωνίας μετ' αὐτῶν.

35. Ἐὰν ἓν σχῆμα ἔχῃ δύο ἄξονας συμμετρίας καθέτους μεταξύ των, δείξατε ὅτι ἔχει καὶ κέντρον συμμετρίας τὴν τομὴν τῶν ἀξόνων.

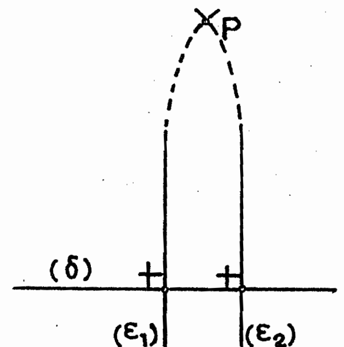
ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ ΕΥΘΕΙΑΙ

86. Ὁρισμός. Δύο συνεπίπεδοι εὐθεῖαι καλοῦνται παράλληλοι τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουν.

87. Θεώρημα. Δύο συνεπίπεδοι εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) κάθετοι πρὸς τρίτην εὐθεῖαν (δ), εἶναι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις. Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουν (σχ. 77). Πράγματι, ἐὰν ὑπῆρχεν ἓν κοινὸν σημεῖον P, τότε ἐκ τοῦ P θὰ ὑπῆρχον δύο κάθετοι (ε_1) καὶ (ε_2) ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (δ) ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα αἱ (ε_1) καὶ (ε_2) εἶναι παράλληλοι.

Τὸ σύμβολον τῆς παραλλίας εἶναι //, σημειώνομεν δηλαδὴ (ε_1) // (ε_2)



Σχ. 77

88. Ἀξίωμα (αἴτημα τοῦ Εὐκλείδου). Ἀπὸ σημεῖον κείμενον ἐκτὸς εὐθείας μία καὶ μόνον μία παράλληλος ἄγεται πρὸς αὐτήν.

Ἱστορικὸν σημείωμα. Εἰς τὸ Α' βιβλίον τῶν «**Στοιχείων**» τοῦ Εὐκλείδου (περὶ τὸ 285 π.Χ.) ἀναφέρεται τὸ ἑξῆς ε' αἴτημα. «Ἠτήσθω... ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα τις ἐμπίπτουσα, τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι».

Τὸ αἴτημα τοῦτο, (τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ εἰς τὴν § 105 ἀναφέρομεν V πόρισμα), ἀντικατεστάθη ὑπὸ τοῦ Gergonne κατὰ τὸ 1812 ἤ, κατ' ἄλλους, ὑπὸ τοῦ J. Playfair κατὰ τὸ 1795 ὑπὸ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως, ἡ ὁποία ἔκτοτε εἶναι γνωστὴ ὡς **Εὐκλείδειον αἴτημα**, ἡ δὲ γνωστὴ εἰς ἡμᾶς Γεωμετρία, ἡ παραδεχομένη καὶ στηριζομένη εἰς τὸ Εὐκλείδειον αἴτημα, λέγεται **Εὐκλείδειος Γεωμετρία**.

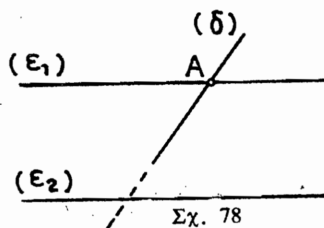
Ὅσοι ἐπεχείρησαν νὰ ἀποδείξουν τὸ Εὐκλείδειον αἴτημα δὲν κατώρθωσαν παρὰ

νὰ μετατοπίσουν τὴν πρότασιν νὰ παραδεχθοῦν δηλαδὴ ἄλλην πρότασιν ὡς αἴτημα καὶ ἐπὶ τῇ βάσει αὐτῆς νὰ ἀποδείξουν τὸ Εὐκλείδειον αἴτημα. Μάλιστα ὁ Γάλλος Ἀκαδημαϊκὸς Lagrange ἠναγκάσθη νὰ ἀποσύρῃ ἐργασίαν του περὶ παραλλήλων εὐθειῶν καθ' ἣν στιγμὴν τὴν ἀνεκοίνωσεν ἐν τῇ συνεδρίᾳ τῆς Ἀκαδημίας τῶν Παρισίων εἰπών· «πρέπει νὰ σκεφθῶ ἀκόμη ἐπὶ τοῦ ζητήματος τούτου».

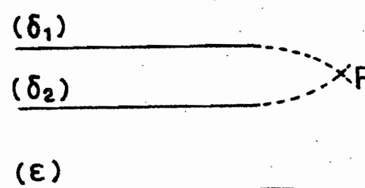
Ὅλαι αἱ ἄκαρποι αὗται προσπάθειαι πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ Εὐκλειδείου αἰτήματος ἠνάγκασαν τοὺς γεωμέτρας νὰ δεχθοῦν ἢ ὅτι τὸ ζήτημα εἶναι ἄλυτον, ἢ ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ μὴ εἶναι ἀπολύτως ἀληθὲς τὸ αἴτημα. Οὕτω ὁ Ρῶσσος Lobatchewsky (1793 - 1856), ὁ Γερμανὸς Riemann (1826 - 1866) καὶ ἄλλοι, κατέληξαν εἰς τὸ ὅτι ἡ μὴ παραδοχὴ τοῦ Εὐκλειδείου αἰτήματος δὲν ἄγει εἰς ἄτοπα συμπεράσματα. Τοιουτοτρόπως, ἐκτὸς τῆς γνωστῆς εἰς ἡμᾶς Εὐκλειδείου Γεωμετρίας, ὑπάρχουν θεωρητικῶς καὶ ἡ Γεωμετρία τοῦ Lobatchewsky κατὰ τὴν ὁποίαν ἐξ ἑνὸς σημείου ἄγονται ἄπειροι παράλληλοι πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ ἡ Γεωμετρία τοῦ Riemann κατὰ τὴν ὁποίαν δὲν ὑπάρχουν παράλληλοι πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

Πόρισμα Ι. Κάθε εὐθεῖα, ἡ ὁποία τέμνει μίαν ἐκ δύο παραλλήλων εὐθειῶν, τέμνει καὶ τὴν ἄλλην.

Ἔστωσαν (ε_1) // (ε_2) καὶ εὐθεῖα (δ), ἡ ὁποία τέμνει τὴν (ε_1) εἰς τὸ σημεῖον Α (σχ. 78). Ἐὰν ἡ (δ) δὲν ἔτεμνε τὴν (ε_2), θὰ ὑπῆρχον δύο παράλληλοι ἐκ τοῦ σημείου Α πρὸς τὴν (ε_2), ἡ (ε_1) καὶ ἡ (δ), ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα ἡ (δ) τέμνει καὶ τὴν (ε_2).



Σχ. 78

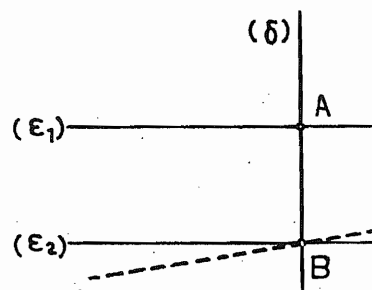


Σχ. 79

Πόρισμα ΙΙ. Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τρίτην εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλοι.

Ἔστω ὅτι (δ_1) // (ε) καὶ (δ_2) // (ε) (σχ. 79). Αἱ (δ_1) καὶ (δ_2) δὲν δύνανται νὰ ἔχουν κοινὸν σημεῖον, διότι, ἐὰν ὑπῆρχε κοινὸν σημεῖον Ρ, θὰ εἴχομεν ἐξ αὐτοῦ δύο παραλλήλους πρὸς τὴν (ε), ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα (δ_1) // (δ_2).

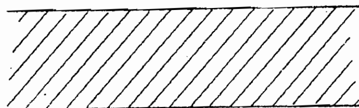
89. Θεώρημα. Ἐὰν εὐθεῖα (δ) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν μίαν ἐκ δύο παραλλήλων εὐθειῶν (ε_1) καὶ (ε_2), εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην.



Σχ. 80

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι (δ) $\perp$ (ε_1) καὶ Α τὸ σημεῖον τομῆς αὐτῶν (σχ. 80). Ἡ (δ), ἐφ' ὅσον τέμνει τὴν (ε_1) θὰ τέμνῃ καὶ τὴν παράλληλόν της (ε_2)

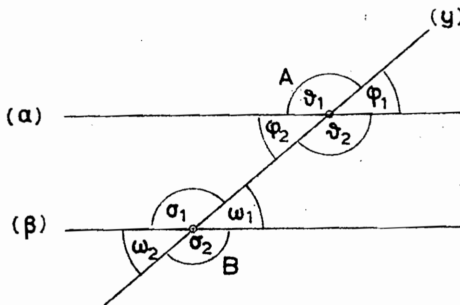
ἔστω εἰς σημεῖον Β. Ἐὰν ἡ (ε_2) δὲν ἦτο κάθετος ἐπὶ τὴν (δ) καὶ θεωρήσωμεν τὴν ἐκ τοῦ Β κάθετον ἐπὶ τὴν (δ), αὕτη θὰ ἦτο παράλληλος τῆς (ε_1) (§ 87), ὅπερ ἄτοπον διότι θὰ ὑπῆρχον ἐκ τοῦ σημείου Β δύο παράλληλοι πρὸς τὴν (ε_1). Ἄρα εἶναι καὶ $(\delta) \perp (\varepsilon_2)$.



Σχ. 81

90. Ζώνη ἢ ταινία δύο παραλλήλων εὐθειῶν καλεῖται τὸ ἐπίπεδον τμῆμα, ποὺ περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο παραλλήλων (σχ. 81).

91. Γωνίαι σχηματιζόμεναι ὑπὸ ζεύγους παραλλήλων καὶ τεμνούσης. Θεωροῦμεν δύο παραλλήλους εὐθείας (α) καὶ (β) καὶ μίαν εὐθεῖαν (y) τέμνουσαν αὐτὰς εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως (σχ. 82). Τότε σχηματίζονται τέσσαρα ζεύγη κυρτῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν καὶ ἂς τὰς συμβολίσωμεν μὲ φ_1, φ_2, θ_1, θ_2, καὶ ω_1, ω_2, σ_1, σ_2. Αἱ γωνίαι φ_1, θ_1, ω_2 καὶ σ_2 κεῖνται ἐκτὸς τῆς ζώνης τῶν παραλλήλων καὶ συντόμως θὰ καλοῦνται γωνίαι **ἐκτός**, ἐνῷ αἱ γωνίαι φ_2, θ_2, ω_1 καὶ σ_1 ἔχουν κοινὸν μέρος μὲ τὴν ζώνην τῶν παραλλήλων καὶ συντόμως θὰ καλοῦνται γωνίαι **ἐντός**. Ἐὰν ἐπὶ πλέον δύο γωνίαι ἐξ αὐτῶν κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης ΑΒ, ὅπως αἱ γωνίαι φ_1 καὶ ω_1, θὰ καλοῦνται συντόμως γωνίαι **ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη** καὶ τέλος ἐὰν δύο γωνίαι κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς τεμνούσης ΑΒ, ὅπως αἱ γωνίαι φ_2 καὶ ω_1, θὰ καλοῦνται συντόμως γωνίαι **ἐναλλάξ**. Σχετικῶς μὲ τὰς γωνίας αὐτὰς ἰσχύει τὸ κάτωθι θεώρημα.



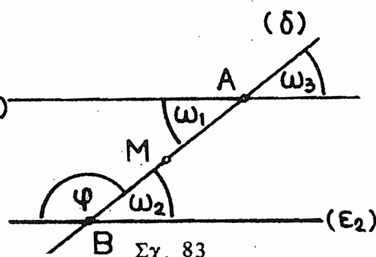
Σχ. 82

92. Θεώρημα. Ἐὰν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ τρίτης, τότε αἱ σχηματιζόμεναι μὴ κοινῆς κορυφῆς γωνίαι :

i) ἐντὸς ἐναλλὰξ εἶναι ἴσαι

ii) ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εἶναι ἴσαι.

iii) ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εἶναι παραπληρωματικαί. Καὶ ἀντιστρόφως.



Σχ. 83

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν (ε_1) καὶ (ε_2) δύο παράλληλοι εὐθεῖαι καὶ (δ) μία τέμνουσα αὐτὰς εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως (σχ. 83).

Εἰς τὴν παράγραφον 82 εἴδομεν ὅτι τὸ συμμετρικὸν εὐθείας (ε_1) ὡς πρὸς κέντρον σημεῖον κείμενον ἐκτὸς αὐτῆς, εἶναι εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν (ε_1).

Ἐὰν ἑπομένως Μ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΑΒ, ἡ κεντρικὴ συμμετρία μὲ κέντρον τὸ Μ μᾶς ἐξασφαλίζει προφανῶς τὸ Β συμμετρικὸν τοῦ Α. Τότε ἡ συμμετρικὴ εὐθεῖα τῆς (ε_1) θὰ εἶναι ἡ ἐκ τοῦ Β παράλληλος τῆς (ε_1), δηλαδὴ ἡ (ε_2).

i) Λόγῳ τῆς συμμετρίας ὡς πρὸς τὸ Μ ἔχομεν :

(1) $$\omega_1 = \omega_2,$$

ἤτοι αἱ ἐντὸς ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

ii) Ἐπειδὴ $\omega_1 = \omega_3$ ὡς κατὰ κορυφὴν καὶ λόγῳ τῆς (1) ἔχομεν :

$$\omega_2 = \omega_3$$

ἤτοι αἱ ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶναι ἴσαι.

iii) Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ω_2 καὶ φ εἶναι παραπληρωματικαί, ἤτοι $\omega_2 + \varphi = 2^{L}$ καὶ λόγῳ τῆς (1) ἔχομεν :

$$\omega_1 + \varphi = 2^{L},$$

ἤτοι αἱ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.

Ἀντιστρόφως Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, ἐπειδὴ ἔχει μίαν ὑπόθεσιν (ε_1) // (ε_2) καὶ τρία συμπεράσματα τὰς προτάσεις i), ii) καὶ iii), ἔχει τρία ἀντίστροφα, τὰ ὁποῖα ὅμως δύνανται νὰ συνοψισθοῦν εἰς τὸ ἑξῆς :

Ἐὰν ἀληθεύει μία τῶν προτάσεων i), ii), iii) ἀληθεύουν καὶ αἱ ἕτεραι δύο καὶ αἱ εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) εἶναι παράλληλοι.

Ἐὰν ἀληθεύῃ μία τῶν προτάσεων i), ii), iii) εὐκόλως φαίνεται ὅτι ἀληθεύουν καὶ αἱ ἕτεραι δύο (διατί ;). Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ δείξωμεν ὅτι ἐὰν ἀληθεύῃ μία ἐξ αὐτῶν, ἔστω ἡ i), ἤτοι ἐὰν αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῆς τεμνούσης ΑΒ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι ω_1 καὶ ω_2 εἶναι ἴσαι, τότε αἱ εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) εἶναι παράλληλοι (σχ. 84).

Τοῦτο πράγματι συμβαίνει, διότι ἐὰν αἱ (ε_1) καὶ (ε_2) ἐτέμνοντο ἔστω εἰς τὸ σημεῖον Ρ, θεωροῦμεν τὴν εὐθεῖαν (ε) ἐκ τοῦ Β παράλληλον τῆς (ε_1), ἡ ὁποία θὰ σχηματίζῃ μετ' αὐτῆς τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας, δηλαδὴ

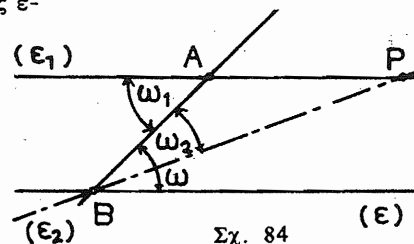
(1) $$\omega_1 = \omega$$

Ἐξ ὑποθέσεως ὅμως ἔχομεν

(2) $$\omega_1 = \omega_2$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι

(3) $$\omega = \omega_2$$

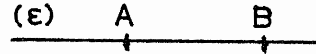


Σχ. 84

Αἱ γωνίαι ὅμως ω καὶ ω_2 ἔχουν τὴν αὐτὴν κορυφὴν Β, κοινὴν τὴν πλευρὰν ΒΑ καὶ κοινὸν μέρος. Ἑπομένως ταυτίζονται ἐφ' ὅσον εἶναι ἴσαι

καὶ ἄρα ἡ εὐθεῖα (ε_2) ταυτίζεται μὲ τὴν ἐκ τοῦ Β παράλληλον τῆς (ε_1), ἤτοι $(\varepsilon_2) \equiv (\varepsilon) // (\varepsilon_1)$.

93. Ὁμόρροπος καὶ ἀντίρροπος παραλληλία. Συνυφασμένη μὲ τὴν ἔννοιαν τῆς εὐθείας (γενικώτερον τῆς γραμμῆς) εἶναι καὶ ἡ φορὰ διαγραφῆς της. Ἐὰν ἐπὶ δεδομένης εὐθείας ἔχῃ καθορισθῆ καὶ ἡ φορὰ διαγραφῆς της, δηλαδὴ ἡ φορὰ κατὰ τὴν ὁποίαν κινητὸν σημεῖον ἄνευ παλινδρομήσεως διαγράφει τὴν εὐθεῖαν, τότε αὐτὴ λέγεται **προσανατολισμένη** εὐθεῖα. Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἐπὶ μιᾶς εὐθείας (ε) (σχ. 85), δύο μόνον φοραὶ διαγραφῆς ὑπάρχουν, ἡ ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β ἢ ἡ ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Α. Αὗται καλοῦνται ἀντίθετοι καὶ ἐὰν τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν τὴν καλέσωμεν θετικήν, ἡ ἄλλη θὰ λέγεται ἀρνητική. Τὴν εὐθεῖαν (ε) ἐπὶ τῆς ὁποίας ὡρίσθη ἡ θετικὴ καὶ ἡ ἀρνητικὴ φορὰ διαγραφῆς της, θὰ τὴν συμβολίζωμεν $\overrightarrow{(\varepsilon)}$.

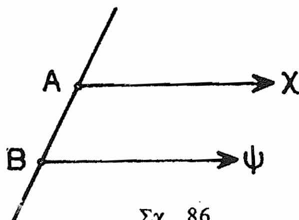


Σχ. 85

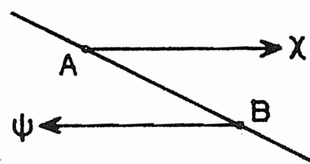
Ἡ ἔννοια τῆς ὁμορρόπου παραλληλίας ἀναφέρεται εἰς παραλλήλους εὐθείας τῆς αὐτῆς φορᾶς διαγραφῆς, ἀντιστοίχως ἡ ἔννοια τῆς ἀντιρρόπου παραλληλίας ἀναφέρεται εἰς παραλλήλους εὐθείας ἀντιθέτου φορᾶς διαγραφῆς.

Αἱ ἔννοιαι ἐπεκτείνονται καὶ εἰς παραλλήλους ἡμιευθείας ὡς καὶ εἰς παράλληλα εὐθύγραμμα τμήματα κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον. Φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ ἔννοια τοῦ «ὁμορρόπου» ἢ «ἀντιρρόπου» διὰ τὰς εὐθείας, ἡμιευθείας καὶ εὐθύγραμμα τμήματα, συνεπάγεται ὁπωσδήποτε καὶ τὴν ἔννοιαν τῆς παραλληλίας.

Εἰς τὸ σχῆμα 86 αἱ παράλληλοι ἡμιευθεῖαι $\overrightarrow{Ax}$ καὶ $\overrightarrow{By}$ εἶναι ὁμόρροποι καὶ τὸ χαρακτηριστικόν των εἶναι ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ τὰς ἀφήνει εἰς τὸ ἓν ἡμιεπίπεδον ἐκ τῶν δύο τὰ ὁποῖα ὁρίζει, ἐνῷ εἰς τὸ σχῆμα 87 αἱ ἡ μιευθεῖαι $\overrightarrow{Ax}$ καὶ



Σχ. 86



Σχ. 87

$\overrightarrow{By}$ εἶναι ἀντίρροποι καὶ τὸ χαρακτηριστικόν των εἶναι ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἔχει τὰς ἡμιευθείας ἑκατέρωθεν αὐτῆς.

Ἡ ὁμόρροπος παραλληλία δύο εὐθειῶν $\overrightarrow{(\varepsilon_1)}$ καὶ $\overrightarrow{(\varepsilon_2)}$ συμβολίζεται $(\varepsilon_1) \uparrow\uparrow (\varepsilon_2)$, ἀντιστοίχως ἡ ἀντίρροπος παραλληλία μὲ τὸ σύμβολον $\uparrow\downarrow$. Ὁμοίως καὶ διὰ τὰς ὁμορρόπους ἀντιστοίχως τὰς ἀντιρρόπους ἡμιευθείας ὡς καὶ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

36. Ἐκ τῶν ὀκτὼ γωνιῶν τὰς ὁποίας σχηματίζουν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης, ἡ μία ἰσοῦται πρὸς τὰ 4/5 τῆς ὀρθῆς. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ λοιπαὶ ἑπτὰ γωνίαι εἰς μέρη ὀρθῆς καὶ εἰς μοίρας.

37. Δίδονται δύο παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι ἡμιευθεῖαι $\overrightarrow{Ax}$ καὶ $\overrightarrow{By}$. Φέρομεν τὸ τμῆμα AB καὶ λαμβάνομεν σημεῖον O ἐντὸς τῆς ζώνης τῶν παραλλήλων ἡμιευθειῶν, φέρομεν δὲ καὶ τὰ τμήματα OA, OB, Δείξατε ὅτι :

$$\widehat{AOB} = \widehat{OAx} + \widehat{OBy}$$

38. Δίδεται εὐθεῖα (δ) καὶ δύο σημεῖα A καὶ B αὐτῆς. Ἄγομεν τὰς ἡμιευθείας Ax καὶ By παραλλήλους μεταξύ των καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς (δ), λαμβάνομεν δὲ σημεῖον O ἐκτὸς τῆς ζώνης τῶν παραλλήλων ἡμιευθειῶν καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς (δ) ὅπου εὑρίσκονται αἱ ἡμιευθεῖαι. Δείξατε ὅτι ἡ γωνία $\widehat{AOB}$ ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν γωνιῶν $\widehat{OAx}$ καὶ $\widehat{OBy}$.

39. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης σχηματίζουν τὰς ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἢ τὰς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας παραπληρωματικάς, τότε αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι.

40. Δίδεται ἡ κυρτὴ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΓΔ. Δείξατε ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν κυρτῶν γωνιῶν $\widehat{AB\Gamma}$ καὶ $\widehat{B\Gamma\Delta}$ τέμνονται.

41. Ἐὰν (ε_1) καὶ (ε_2) εἶναι δύο παράλληλοι εὐθεῖαι καὶ (δ) μία τέμνουσά αὐτάς, δείξατε ὅτι αἱ διχοτόμοι δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνιῶν εἶναι παράλληλοι, ἐνῷ αἱ διχοτόμοι δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνιῶν εἶναι κάθετοι.

42. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σχῆμα ποὺ ἀποτελοῦν δύο ἀντίρροποι ἡμιευθεῖαι, ἔχει κέντρον συμμετρίας.

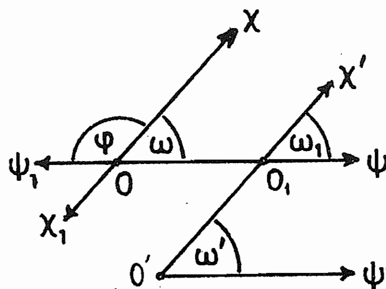
Β΄.

43. Δύο συνεπίπεδοι εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) ἔχουν τὴν ἀκόλουθον ἰδιότητα : Κάθε εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου τέμνουσα τὴν μίαν τέμνει καὶ τὴν ἄλλην. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$.

44. Ἐὰν δύο ἡμιεπίπεδα (Π_1) καὶ (Π_2) τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουν, δείξατε ὅτι αἱ ἀρχικαὶ των εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι ἢ ταυτίζονται.

Γωνίαι μὲ τὰς πλευράς των παραλλήλους ἢ καθέτους.

94. Θεώρημα. Δύο γωνίαι μὲ τὰς πλευράς των παραλλήλους εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί.



Σχ. 88

Ἀπόδειξις. i) Ἔστωσαν $x\widehat{O}y$ καὶ $x'\widehat{O'}y'$ δύο γωνίαι (σχ. 88), μὲ $Ox\uparrow\uparrow O'x'$ καὶ $Oy\uparrow\uparrow O'y'$. Ἡ εὐθεῖα Oy, ἐφ' ὅσον τέμνει τὴν Ox, θὰ τέμνῃ καὶ τὴν παράλληλόν της O'x' εἰς σημεῖον O_1. Τότε θὰ εἶναι : $\omega = \omega_1$ (1) λόγῳ τῶν παραλλήλων $Ox\uparrow\uparrow O'x'$ τεμνομένων ὑπὸ τῆς

Oy καὶ $\omega_1 = \omega'$ (2) λόγῳ τῶν παραλλήλων $Oy \uparrow\uparrow O'y'$ τεμνομένων ὑπὸ τῆς $O'x'$. Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἔπεται $\omega = \omega'$ (3) $\Rightarrow x\widehat{O}y = x'\widehat{O'}y'$.

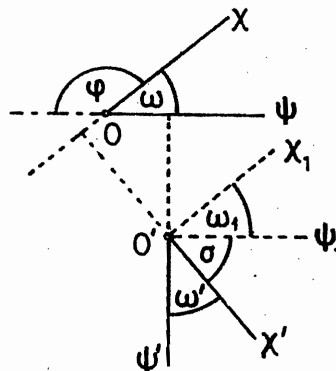
ii) Ἐπειδὴ εἶναι προφανῶς $\omega + \varphi = 2^{L}$, ἐπὶ τῇ βάσει τῆς σχέσεως (3), ἡ τελευταία γράφεται $\omega' + \varphi = 2^{L} \Rightarrow x'\widehat{O'}y' + x\widehat{O}y_1 = 2^{L}$.

Σημείωσις. Πρὸς διευκρίνισιν δυνάμεθα νὰ διαχωρίσωμεν τὰς δύο περιπτώσεις τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, ὡς ἀκολούθως :

Δύο γωνίαι μὲ τὰς πλευράς των παραλλήλους εἶναι ἴσαι, ἐὰν αἱ πλευραί των εἶναι ὁμόρροποι ἢ ἀντίρροποι, ἐνῷ εἶναι παραπληρωματικαί, ἐὰν ἓν ζεῦγος πλευρῶν εἶναι ὁμόρροποι, τὸ δὲ ἕτερον ζεῦγος πλευρῶν εἶναι ἀντίρροποι.

95. Θεώρημα. Δύο γωνίαι μὲ τὰς πλευράς των καθέτους εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί.

Ἀπόδειξις. i) Ἔστωσαν $x\widehat{O}y$ καὶ $x'\widehat{O'}y'$ δύο γωνίαι (σχ. 89), μὲ τὰς πλευράς των καθέτους, ἤτοι $Ox \perp O'x'$ (1) καὶ $Oy \perp O'y'$ (2). Ἐκ τῆς κορυφῆς O' φέρομεν $O'x_1 \perp O'x'$ (3) καὶ $O'y_1 \perp O'y'$ (4). Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (3) ἔπεται $Ox // O'x_1$ καὶ ἐκ τῶν (2) καὶ (4) ἔπεται $Oy // O'y_1$, ἤτοι (κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα) αἱ γωνίαι $x\widehat{O}y$ καὶ $x_1\widehat{O'}y_1$ εἶναι ἴσαι, μὲ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἔχουν τὰς πλευράς των ὁμορρόπους (ἀντιστοίχως ἀντιρρόπους), ἢ $\omega_1 = \omega$ (5). Εἶναι φανερὸν ὅμως ὅτι $\omega_1 = \omega'$ (6), διότι ἀμφότεραι εἶναι συμπληρωματικαὶ τῆς αὐτῆς γωνίας σ ($x_1\widehat{O'}x' = y_1\widehat{O'}y' = 1^{L}$). Ἐκ τῶν σχέσεων (5) καὶ (6) λαμβάνομεν $\omega = \omega' \Rightarrow x\widehat{O}y = x'\widehat{O'}y'$.



Σχ. 89

ii) Ἐπειδὴ εἶναι προφανῶς $\omega + \varphi = 2^{L} \Rightarrow \omega' + \varphi = 2^{L}$.

Παρατήρησις. Ἀπὸ τὰ δύο προηγούμενα θεωρήματα δύνανται νὰ ἐξαχθοῦν τὰ ἀκόλουθα συμπεράσματα διὰ δύο γωνίας μὲ τὰς πλευράς των παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν ἢ καθέτους μίαν πρὸς μίαν :

i) Αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι ἐὰν ἀμφότεραι εἶναι ὀξεῖαι.

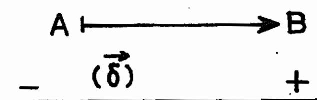
ii) Αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι ἐὰν ἀμφότεραι εἶναι ἀμβλεῖαι.

iii) Αἱ γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαὶ ἐὰν μία ἐξ αὐτῶν εἶναι ὀξεῖα καὶ ἡ ἄλλη ἀμβλεῖα.

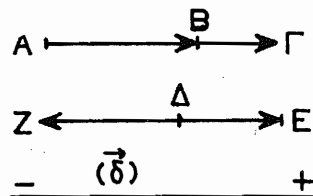
96. Ἰσότης καὶ πράξεις εἰς τὸ σύνολον τῶν προσανατολισμένων εὐθυγράμμων τμημάτων. Μία προσανατολισμένη εὐθεῖα $\overrightarrow{(\delta)}$ ἐφοδιάζει τὸ ἐπίπεδον μὲ μίαν θετικὴν φορὰν (καὶ τὴν ἀντίθετον αὐτῆς ἀρνητικήν). Τὸ σύνο-

λον ὅλων τῶν προσανατολισμένων εὐθυγράμμων τμημάτων τοῦ ἐπιπέδου, τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν διεύθυνσιν $(\vec{\delta})$, ἀποτελεῖ ἓν ὑποσύνολον Δ τοῦ συνόλου τῶν προσανατολισμένων εὐθυγράμμων τμημάτων τοῦ ἐπιπέδου. Κάθε εὐθύγραμμον τμῆμα τοῦ Δ μὲ ἄκρα σημεῖα Α καὶ Β καὶ φορὰν διαγραφῆς ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β, συμβολίζεται μὲ $\vec{AB}$. Τὸ Α καλεῖται **ἀρχὴ** αὐτοῦ καὶ τὸ Β **τέλος ἢ πέρας.** Εἰς τὴν σχηματικὴν ἀπεικόνισιν (σχ. 90), τοποθετοῦμεν αἰχμὴν βέλους εἰς τὸ τέλος Β τοῦ ΑΒ, ἐνδεικτικὴν τῆς φορᾶς διαγραφῆς του.

Δύο προσανατολισμένα τμήματα τῆς αὐτῆς διευθύνσεως καλοῦνται **διαδοχικά,** ὅταν τὸ τέλος τοῦ ἑνὸς εἶναι ἀρχὴ διὰ τὸ ἄλλο ἀνεξαρτήτως τοῦ ἐὰν αὐτὰ εἶναι ὁμόρροπα ἢ ἀντίρροπα.



Σχ. 90



Σχ. 91

Εἰς τὸ σχῆμα 91 τὰ $\vec{AB}$ καὶ $\vec{B\Gamma}$ εἶναι διαδοχικά, ὡς ἐπίσης καὶ τὰ $\vec{\Delta E}$ καὶ $\vec{EZ}$.

Ἴσα καλοῦνται δύο προσανατολισμένα τμήματα, τότε καὶ μόνον τότε ὅταν ἔχουν :

α) ἴσα μήκη

β) τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν [παράλληλα πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (δ)].

γ) τὴν αὐτὴν φορὰν (ὁμόρροπα).

Ἡ σχέσις τῆς ἰσότητος εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική, ἤτοι ἂν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ εἶναι προσανατολισμένα τμήματα, τότε :

i) $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$

ii) $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\beta} = \vec{\alpha}$

iii) $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \wedge \vec{\beta} = \vec{\gamma} \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\gamma}$

97. Ἄθροισμα προσανατολισμένων τμημάτων τῆς αὐτῆς διευθύνσεως. Ἄθροισμα δύο διαδοχικῶν προσανατολισμένων τμημάτων $\vec{AB}$ καὶ $\vec{B\Gamma}$ (σχ. 91) καλεῖται τὸ προσανατολισμένον τμῆμα $\vec{A\Gamma}$ μὲ ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου καὶ τέλος τὸ τέλος τοῦ δευτέρου τμήματος. Συμβολικῶς γράφομεν $\vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma}$ (ὁμοίως εἰς τὸ σχῆμα εἶναι $\vec{\Delta E} + \vec{EZ} = \vec{\Delta Z}$). Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ $\vec{A\Gamma}$ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν $(\vec{\delta})$ (διατί ;) καὶ ἑπομένως ἀνήκει καὶ αὐτὸ εἰς τὸ σύνολον Δ. Ἄρα ἡ πρᾶξις τῆς προσθέσεως (διαδικασία εὑρέσεως τοῦ ἀθροίσματος) εἶναι ἐσωτερικὴ πρᾶξις τοῦ συνόλου Δ, ἤτοι τὸ σύνολον Δ εἶναι κλειστὸν ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν.

'Εὰν τὰ πρὸς ἄθροισιν προσανατολισμένα τμήματα δὲν εἶναι διαδοχικά, ταῦτα δύνανται νὰ καταστοῦν διαδοχικὰ διὰ μετατοπίσεως.

'Αναλόγως ὁρίζεται τὸ ἄθροισμα περισσοτέρων τῶν δύο προσανατολισμένων τμημάτων, ἐὰν εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων προσθέσωμεν τὸ τρίτον κ.ο.κ.

'Η πρᾶξις τῆς προσθέσεως εἰς τὸ σύνολον Δ, εἶναι ἀντιμεταθετικὴ προσεταιριστικὴ καὶ μονότροπος, ἔχει δὲ οὐδέτερον στοιχεῖον τὸ μηδενικὸν προσανατολισμένον τμῆμα, συμβολιζόμενον μὲ $\vec{0}$, ἤτοι ἐὰν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ἀνήκουν εἰς τὸ Δ ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες :

i) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$

ii) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$

iii) $\vec{\alpha}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{\alpha}=\vec{\alpha}$

Αἱ ἀποδείξεις εἶναι περίπου ἀνάλογοι πρὸς ἐκείνας διὰ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα.

98. 'Αντίθετα καλοῦνται δύο προσανατολισμένα τμήματα τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν ἔχουν ἄθροισμα τὸ μηδενικὸν προσανατολισμένον τμῆμα. Δύο ἀντίθετα προσανατολισμένα τμήματα εἶναι ὁπωσδήποτε ἀντίρροπα. Διὰ κάθε τμῆμα $\vec{AB}$, ἀντίθετον εἶναι τὸ $\vec{BA}$, διότι $\vec{AB}+\vec{BA}=\vec{AA}=\vec{0}$. Ἄρα $\vec{AB}=-\vec{BA}+\vec{0} \Rightarrow \vec{AB}=-\vec{BA}$.

'Η διαφορὰ $\vec{AB}-\vec{\Gamma\Delta}$ δύο προσανατολισμένων τμημάτων, ἀνάγεται εἰς ἄθροισιν, διότι $\vec{AB}-\vec{\Gamma\Delta}=\vec{AB}-(-\vec{\Delta\Gamma})=\vec{AB}+\vec{\Delta\Gamma}$

'Ο πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις προσανατολισμένου τμήματος ἐπὶ ἀκέραιον, ἀντιστοίχως ρητόν, ἀνάγονται εἰς τὰς ἀντιστοίχους πράξεις τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων μὲ τὴν παρατήρησιν ὅτι ἐδῶ δυνάμεθα νὰ ἐπεκτείνωμεν τὰς πράξεις ταύτας καὶ δι' ἀρνητικοὺς πολλαπλασιαστὰς (ἀντιστοίχως διαιρέτας). Ὅταν εἶναι θετικὸς ὁ πολλαπλασιαστὴς (ἢ διαιρέτης), τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ὁμόρροπον τμῆμα τοῦ ἀρχικοῦ, ἐνῷ ὅταν εἶναι ἀρνητικὸς ὁ πολλαπλασιαστὴς (ἢ διαιρέτης), τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ἀντίρροπον τμῆμα τοῦ ἀρχικοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

45. Δίδονται δύο ζεύγη παραλλήλων εὐθειῶν $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$ καὶ $(\zeta_1)//(\zeta_2)$ αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ,Δ. Εἰς τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

i) Αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ἴσαι.

ii) Αἱ διπλαναὶ γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.

46. Δίδεται γωνία $\widehat{xOy}$. Φέρομεν $Ox_1 \perp Ox$ καὶ πρὸς τὸ μέρος ὅπου κεῖται ἡ Oy καὶ $Oy_1 \perp Oy$ καὶ ὄχι πρὸς τὸ μέρος ὅπου κεῖται ἡ Ox. Δεῖξατε ὅτι αἱ γωνίαι $\widehat{xOy}$, $\widehat{x_1Oy_1}$ εἶναι ἴσαι καὶ ὅτι αἱ διχοτόμοι των εἶναι κάθετοι.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

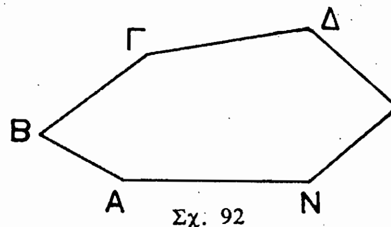
ΠΟΛΥΓΩΝΑ

99. Ὁρισμός. Πολύγωνον καλεῖται τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ μία κλειστὴ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΓ ··· ΝΑ.

Αἱ κορυφαὶ τῆς τεθλασμένης γραμμῆς καλοῦνται **κορυφαὶ** τοῦ πολυγώνου καὶ αἱ πλευραί της **πλευραὶ** αὐτοῦ.

Ἓν πολύγωνον δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ὀλιγωτέρας ἀπὸ τρεῖς κορυφάς, διότι ὀλιγώτερα ἀπὸ τρία σημεῖα δὲν ὁρίζουν τεθλασμένην γραμμήν.

Προσανατολισμένον καλεῖται τὸ πολύγωνον ὅταν ἡ τεθλασμένη γραμμή, ποὺ τὸ ἀποτελεῖ, εἶναι προσανατολισμένη, δηλαδὴ ὅταν ἔχῃ ὁρισθῆ ἡ φορὰ διαγραφῆς της.



Σχ. 92

100. Θεώρημα. Ἓν πολύγωνον ἔχει τὸν ἴδιον ἀριθμὸν κορυφῶν καὶ πλευρῶν.

Ἀπόδειξις. Ἔστω πολύγωνον ΑΒΓ···Ν μὲ ν τὸ πλῆθος πλευρὰς (σχ. 92). Παρατηροῦμεν ὅτι ὑπάρχει ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν κορυφῶν καὶ τῶν πλευρῶν του, κατὰ τὴν ἔννοιαν Α $\leftrightarrow$ ΑΒ, Β $\leftrightarrow$ ΒΓ,..., Ν $\leftrightarrow$ ΝΑ. Ἄρα οἱ κορυφαὶ τοῦ πολυγώνου εἶναι ἰσοπληθεῖς πρὸς τὰς πλευράς του.

Καθ' ὅσον ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν ἢ κορυφῶν ἑνὸς πολυγώνου, εἶναι 3,4,5,... ν, τὸ πολύγωνον καλεῖται τρίγωνον ἢ τρίπλευρον, τετράπλευρον, πεντάγωνον ἢ πεντάπλευρον, ...,ν /γωνον ἢ ν /πλευρον ἀντιστοίχως.

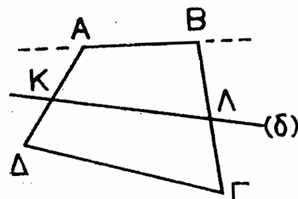
Περίμετρος ἑνὸς πολυγώνου καλεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

Διαδοχικαὶ κορυφαὶ καλοῦνται δύο κορυφαί, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἄκρα μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς.

Διαδοχικαὶ πλευραὶ καλοῦνται δύο πλευραί, αἱ ὁποῖαι συμβάλλουν εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν κορυφήν.

Διαγώνιος ἑνὸς πολυγώνου καλεῖται κάθε εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ἄκρα δύο μὴ διαδοχικὰς κορυφάς.

Κυρτὸν πολύγωνον καλεῖται κάθε πολύγωνον, ὅταν ἡ κλειστὴ τεθλασμένη γραμμή, ἡ ὁποία τὸ ἀποτελεῖ εἶναι κυρτή. Τότε ἓν κυρτὸν πολύγωνον εἰς δύο τὸ πολὺ σημεῖα δύναται νὰ τέμνεται ὑπὸ μιᾶς εὐθείας (δ) ἡ ὁποία δὲν περιέχει πλευρὰν αὐτοῦ (σχ. 93) καὶ κάθε πλευρά του προεκτεινομένη ἀφήνει τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ ἓν ἐκ τῶν δύο ἡμιεπιπέδων, τὰ ὁποῖα ὁρίζει.



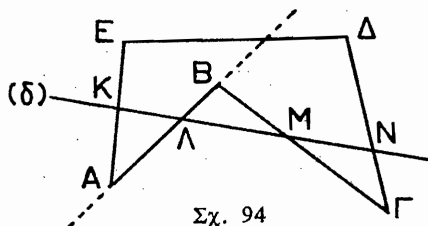
Σχ. 93

Μὴ κυρτὸν καλεῖται κάθε πολύγωνον ὅταν ἡ κλειστὴ τεθλασμένη γραμμή, ἡ ὁποία τὸ ἀποτελεῖ εἶναι μὴ κυρτή.

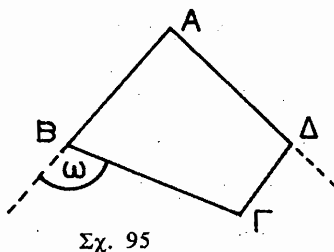
Τότε ὑπάρχει μία τοὐλάχιστον εὐθεῖα (δ), ἡ ὁποία δὲν περιέχει πλευρὰν αὐτοῦ καὶ ἡ ὁποία τὸ τέμνει εἰς περισσότερα τῶν δύο σημεῖα Κ,Λ,Μ,Ν (σχ. 94) καὶ ἐπὶ πλέον ὑπάρχει μία τοὐλάχιστον πλευρὰ αὐτοῦ ΑΒ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη χωρίζει τὸ πολύγωνον εἰς δύο μέρη ἑκατέρωθεν αὐτῆς.

Γωνία ἑνὸς κυρτοῦ πολυγώνου καλεῖται ἡ κυρτὴ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν δύο διαδοχικαὶ πλευραί του.

Κάθε γωνία κυρτοῦ πολυγώνου περιέχει ἐντὸς αὐτῆς ὁλόκληρον τὸ πολύγωνον (σχ. 95).



Σχ. 94

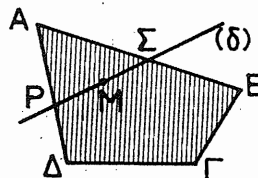


Σχ. 95

Ἐξωτερικὴ γωνία μιᾶς γωνίας $\widehat{B}$ κυρτοῦ πολυγώνου λέγεται ἡ ἐφεξῆς παραπληρωματικὴ αὐτῆς γωνία ω (σχ. 95).

Ἐσωτερικὸν σημεῖον ἑνὸς κυρτοῦ πολυγώνου καλεῖται κάθε σημεῖον Μ, ὅταν κάθε εὐθεῖα (δ) διερχομένη δι' αὐτοῦ τέμνει τὸ πολύγωνον εἰς δύο σημεῖα Ρ καὶ Σ (σχ. 96).

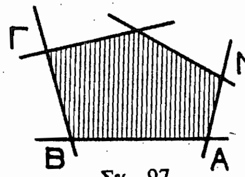
Τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἐσωτερικῶν σημείων καλεῖται ἐσωτερικὸν τοῦ πολυγώνου.



Σχ. 96

★ **Παρατήρησις.** Ἐπειδὴ παντὸς κυρτοῦ πολυγώνου ΑΒΓ...Ν, ἑκάστη γωνία περιέχει ἐντὸς αὐτῆς ὁλόκληρον τὸ πολύγωνον, τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πολυγώνου δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ κοινὸν μέρος τῶν ἐσωτερικῶν τῶν γωνιῶν του (σχ. 97), δηλαδὴ ὡς ἡ τομὴ

$$\text{ἐσ.}\widehat{A} \cap \text{ἐσ.}\widehat{B} \cap \cdots \cap \text{ἐσ.}\widehat{N}$$



Σχ. 97

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Β΄.

47. Δείξατε ὅτι τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ταυτίζεται μὲ τὴν τομὴν τῶν ἐσωτερικῶν δύο γωνιῶν αὐτοῦ, ἤτοι :

$$\text{ἐσ. ΑΒΓ} = \text{ἐσ.}\,\widehat{B} \cap \text{ἐσ.}\,\widehat{\Gamma}.$$

48. Δείξατε ὅτι τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ταυτίζεται μὲ τὴν τομὴν τῶν ἐσωτερικῶν δύο ἀπέναντι γωνιῶν αὐτοῦ, ἤτοι :

$$\text{ἐσ. ΑΒΓΔ} = \text{ἐσ.}\,\widehat{A} \cap \text{ἐσ.}\,\widehat{\Gamma} = \text{ἐσ.}\,\widehat{B} \cap \text{ἐσ.}\,\widehat{\Delta}.$$

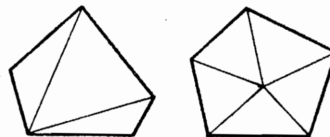
49. Δείξατε ὅτι τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς κυρτοῦ πολυγώνου $A_1A_2A_3...A_{2\nu}$ μὲ 2ν πλευρὰς ταυτίζεται μὲ τὴν τομὴν τῶν ἐσωτερικῶν ἀρτίας διαδοχικῆς τάξεως γωνιῶν του, ἤτοι

$$\text{ἐσ. } A_1A_2A_3...A_{2\nu} = \text{ἐσ. } A_2 \cap \text{ἐσ. } A_4 \cap ... \cap \text{ἐσ. } A_{2\nu}$$

ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟΝ

101. Τὸ τρίγωνον εἶναι τὸ ἁπλούστερον ἀλλὰ καὶ τὸ σημαντικώτερον τῶν πολυγώνων, διότι κάθε πολύγωνον δύναται κατὰ διαφόρους τρόπους νὰ ἀναλυθῇ εἰς τρίγωνα (σχ. 98).

Κύρια στοιχεῖα τοῦ τριγώνου καλοῦνται αἱ τρεῖς πλευραὶ καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι του. Οὕτως ἓν τρίγωνον ἔχει ἓξ κύρια στοιχεῖα. Ἑκάστη πλευρὰ τοῦ τριγώνου δύναται νὰ λέγεται καὶ βάσις αὐτοῦ.



Σχ. 98

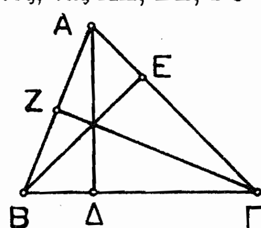
102. Ὕψη - διάμεσοι - διχοτόμοι. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ.

i) Τὸ κάθετον εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΔ ποὺ ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν, ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται ἡ ἀπέναντι πλευρὰ ΒΓ, καλεῖται **ὕψος** τοῦ τριγώνου ποὺ ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ. Ἀναλόγως ὁρίζονται καὶ τὰ ὕψη ἀπὸ τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ. Οὕτω κάθε τρίγωνον ἔχει τρία ὕψη ἀγόμενα ἐκ τῶν τριῶν κορυφῶν του, ἤτοι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ (σχ. 99).

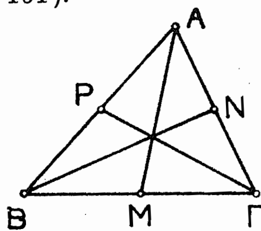
ii) Ἂν Μ εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ, τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΜ καλεῖται **διάμεσος** τοῦ τριγώνου ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α ἢ ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ. Ἀναλόγως ὁρίζονται καὶ αἱ διάμεσοι ἀπὸ τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ. Οὕτω κάθε τρίγωνον ἔχει τρεῖς διαμέσους ἀπὸ τὰς τρεῖς κορυφάς του, ἤτοι ΑΜ, ΒΝ, ΓΡ (σχ. 100).

iii) Ἔστω Αx ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A}$, ἡ ὁποία τέμνει εἰς τὸ σημεῖον Ε τὴν πλευρὰν ΒΓ. Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΕ καλεῖται **διχοτόμος** τῆς γωνίας $\widehat{A}$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἀναλόγως ὁρίζονται καὶ αἱ διχοτόμοι τῶν

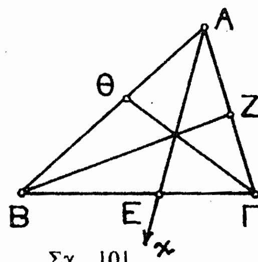
γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Οὕτω, κάθε τρίγωνον ἔχει τρεῖς διχοτόμους, τὰς ΑΕ, ΒΖ, ΓΘ (σχ. 101).



Σχ. 99



Σχ. 100



Σχ. 101

iv) Ἔστω Αy ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας $\widehat{A}$. Ἐὰν αὕτη τέμνῃ τὴν προέκτασιν τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ΒΓ εἰς τὸ Ε (σχ. 102), τὸ τμῆμα ΑΕ καλεῖται ἐξωτερικὴ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A}$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Οὕτω κάθε τρίγωνον ἔχει τρεῖς ἐξωτερικὰς διχοτόμους, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰς τρεῖς κορυφάς του.

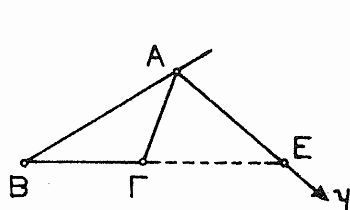
Τὰ ὕψη καὶ αἱ διάμεσοι ἑνὸς τριγώνου καθὼς καὶ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν αὐτοῦ καλοῦνται δευτερεύοντα στοιχεῖα τοῦ τριγώνου. Ὑπάρχουν καὶ ἄλλα δευτερεύοντα στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου τὰ ὁποῖα θὰ γνωρίσωμεν εἰς τὰ ἑπόμενα.

103. Συνηθέστεροι συμβολισμοί. Ἓν τρίγωνον μὲ κορυφὰς τὰ σημεῖα Α, Β καὶ Γ συμβολίζεται μὲ τριγ. ΑΒΓ ἢ $\overset{\Delta}{\text{ΑΒΓ}}$ ἢ ἁπλῶς ΑΒΓ ὅταν προηγουμένως ἔχῃ ἀναφερθῆ ἡ λέξις τρίγωνον.

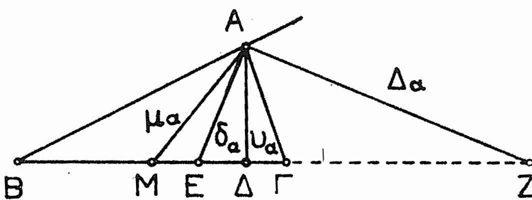
Αἱ πλευραὶ ΒΓ, ΓΑ καὶ ΑΒ ποὺ κεῖνται ἀπέναντι τῶν κορυφῶν Α, Β καὶ Γ ἀντιστοίχως, συμβολίζονται μὲ α, β καὶ γ ἀντιστοίχως, ἐνῷ ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου συμβολίζεται μὲ 2τ, ἤτοι

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\tau.$$

Τὰ ὕψη ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α, Β καὶ Γ συμβολίζονται μὲ υ_α, υ_β καὶ υ_γ ἀντιστοίχως, ὁμοίως αἱ ἀντίστοιχοι διάμεσοι μὲ μ_α, μ_β καὶ μ_γ καὶ αἱ ἀντίστοιχοι διχοτόμοι μὲ δ_α, δ_β καὶ δ_γ, ἐνῷ αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι μὲ Δ_α, Δ_β καὶ Δ_γ (σχ. 103).



Σχ. 102



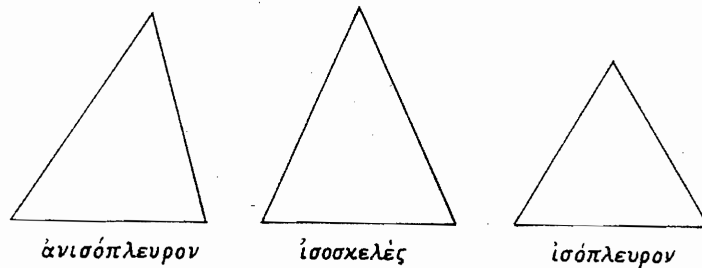
Σχ. 103

104. Εἴδη τριγώνων. Τὰ τρίγωνα δυνάμεθα νὰ τὰ κατατάξωμεν εἰς ἓξ κατηγορίας ἐξετάζοντες τὰ κύρια στοιχεῖα αὐτῶν, ἤτοι τὰς πλευρὰς καὶ τὰς γωνίας των. Καὶ ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς ἔχομεν τὰς ἑξῆς κατηγορίας.

i) **Ἀνισόπλευρον ἢ σκαληνὸν** καλεῖται ἓν τρίγωνον, ὅταν αἱ πλευραί του εἶναι ἄνισοι ἀνὰ δύο.

ii) **Ἰσοσκελὲς** καλεῖται ἓν τρίγωνον ὅταν δύο πλευραί του εἶναι ἴσαι. Ἡ τρίτη πλευρά του συνήθως καλεῖται βάσις.

iii) **Ἰσόπλευρον** καλεῖται ἓν τρίγωνον, ὅταν καὶ αἱ τρεῖς πλευραί του εἶναι ἴσαι.

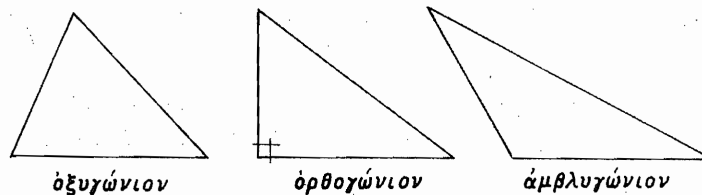


Σχ. 104

Ὡς πρὸς τὰς γωνίας ἔχομεν :

iv) **Ὀξυγώνιον** καλεῖται ἓν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι εἶναι ὀξεῖαι.

v) **Ὀρθογώνιον** καλεῖται ἓν τρίγωνον, ὅταν ἡ μία τῶν γωνιῶν του εἶναι



Σχ. 105

ὀρθή. Ἡ ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας πλευρὰ καλεῖται **ὑποτείνουσα,** αἱ ἄλλαι δὲ πλευραὶ καλοῦνται **κάθετοι πλευραὶ** τοῦ τριγώνου.

vi) **Ἀμβλυγώνιον** καλεῖται ἓν τρίγωνον, ὅταν ἡ μία ἐκ τῶν γωνιῶν του εἶναι ἀμβλεῖα.

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

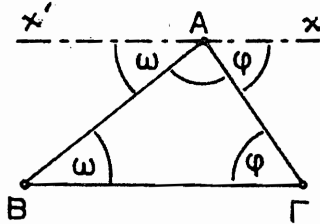
105. Θεώρημα. Εἰς κάθε τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του εἶναι 2L.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Θεωροῦμεν τὴν ἐκ τοῦ Α παράλ-

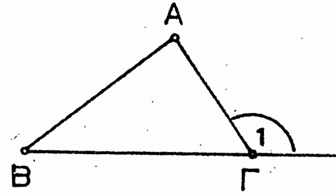
ληλον x'Ax τῆς ΒΓ (σχ. 106). Τότε θὰ εἶναι $x'\widehat{A}B = \widehat{B} = \omega$ καὶ $x\widehat{A}\Gamma = \widehat{\Gamma} = \varphi$, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων xx' καὶ ΒΓ τεμνομένων ὑπὸ τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως. Ἐπειδὴ xAx' εἶναι εὐθεῖα, ἔχομεν

$$x'\widehat{A}B + \widehat{A} + x\widehat{A}\Gamma = 2L \quad \text{ἢ} \quad \omega + \widehat{A} + \varphi = 2L$$

$$\text{ἢ} \quad \widehat{B} + \widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 2L.$$



Σχ. 106



Σχ. 107

Πόρισμα I. Κάθε ἐξωτερικὴ γωνία τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν αὐτοῦ.

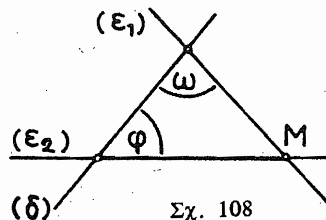
Πράγματι, ἂν $\widehat{\Gamma}_1$ εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ γωνία εἰς τὴν κορυφὴν Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 107), ἔχομεν ἀφ' ἑνὸς μὲν $\widehat{\Gamma}_1 + \widehat{\Gamma} = 2L$ ἀφ' ἑτέρου δὲ $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 2L$. Ἐξ αὐτῶν ἕπεται ὅτι $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{A} + \widehat{B}$.

Πόρισμα II. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας ἴσας μία πρὸς μίαν, θὰ ἔχουν καὶ τὴν τρίτην αὐτῶν γωνίαν ἴσην. Τὰ τρίγωνα τότε θὰ λέγωνται ἰσογώνια.

Πόρισμα III. Τὸ ἀμβλυγώνιον τρίγωνον, μίαν μόνον ἀμβλεῖαν γωνίαν δύναται νὰ ἔχῃ, τὸ δὲ ὀρθογώνιον μίαν μόνον ὀρθὴν καὶ τὰς ἄλλας δύο ὀξείας.

Πόρισμα IV. Αἱ δύο ὀξεῖαι γωνίαι ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι συμπληρωματικαί.

Πόρισμα V. Ἂν δύο εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης εὐθείας (δ) σχηματίζουν δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας μὲ ἄθροισμα μικρότερον τῶν 2L, αἱ εὐθεῖαι αὗται τέμνονται εἰς σημεῖον Μ πρὸς τὸ μέρος τῶν γωνιῶν τούτων (σχ. 108).

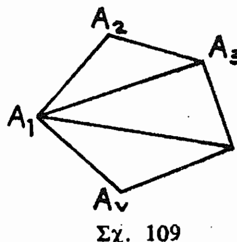


Σχ. 108

106. Θεώρημα. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κυρτοῦ πολυγώνου μὲ ν πλευρὰς ἰσοῦται μὲ 2ν - 4 ὀρθὰς γωνίας.

Ἀπόδειξις. Ἔστω $A_1A_2...A_\nu$ κυρτὸν ν/γωνον. Ἐκ μιᾶς κορυφῆς, ἔστω τῆς A_1 φέρομεν ὅλας τὰς διαγωνίους A_1A_3, A_1A_4..., $A_1A_{\nu-1}$, διὰ τῶν ὁποίων

τὸ πολύγωνον χωρίζεται εἰς ν - 2 τρίγωνα (σχ. 109). Τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων τούτων εἶναι προφανῶς ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου. Ἐπειδὴ τὸ κάθε τρίγωνον ἔχει ἄθροισμα γωνιῶν 2L, ἔπεται ὅτι τὰ ν - 2 τρίγωνα ἔχουν ἄθροισμα γωνιῶν 2L · (ν - 2), ἤτοι 2ν - 4 ὀρθὰς γωνίας.



Σχ. 109

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Α'.

50. Εἰς ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἡ γωνία $\widehat{A}$ εἶναι 70°, ἡ δὲ γωνία $\widehat{B}$ εἶναι τὰ 4/5 τῆς $\widehat{A}$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία $\widehat{\Gamma}$ αὐτοῦ.

51. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ δείξατε ὅτι : α) αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$, τεμνόμεναι εἰς σημεῖον Ο, σχηματίζουν γωνίαν ἴσην μὲ $1L + \frac{\widehat{A}}{2}$, β) αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ τεμνόμεναι εἰς τὸ Ζ σχηματίζουν γωνίαν ἴσην μὲ $1L - \frac{\widehat{A}}{2}$ καὶ γ) μία ἐσωτερικὴ καὶ μία ἐξωτερικὴ διχοτόμος τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ ἀντιστοίχως τεμνόμεναι εἰς τὸ Κ σχηματίζουν γωνίαν ἴσην μὲ $\widehat{A}/2$.

52. Δείξατε ὅτι ἡ γωνία τοῦ ὕψους καὶ τῆς διχοτόμου τριγώνου, ποὺ ἄγονται ἀπὸ τὴν αὐτὴν κορυφήν, ἰσοῦται πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν τοῦ τριγώνου.

53. Ἐὰν εἰς κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{A}$ καὶ $\widehat{B}$ αὐτοῦ τέμνονται εἰς σημεῖον Ε, δείξατε ὅτι $\widehat{E} = \frac{\widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta}}{2}$.

54. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς κυρτοῦ : α) πενταγώνου, β) ἑξαγώνου, γ) δωδεκαγώνου.

55. Ἐὰν δύο γωνίαι κυρτοῦ τετραπλεύρου εἶναι παραπληρωματικαί, δείξατε ὅτι καὶ αἱ ἄλλαι δύο γωνίαι αὐτοῦ θὰ εἶναι παραπληρωματικαί.

56. Πόσας πλευρὰς ἔχει ἓν κυρτὸν πολύγωνον, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του εἶναι α) 10 ὀρθαὶ γωνίαι, β) 16 ὀρθαὶ γωνίαι.

57. Δείξατε ὅτι, ἐὰν μία γωνία τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν του, τότε τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον.

58. Ἐὰν μία γωνία τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν του, τὸ τρίγωνον εἶναι ἀμβλυγώνιον.

59. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A}$ σχηματίζει μὲ τὴν πλευρὰν ΒΓ δύο γωνίας, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ τοῦ τριγώνου.

60. Δείξατε ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν κυρτοῦ τετραπλεύρου, τεμνόμεναι ἀνὰ δύο, σχηματίζουν τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.

61. Νὰ δειχθῇ τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰς διχοτόμους τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν κυρτοῦ τετραπλεύρου.

Β'.

62. Δείξατε ὅτι αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1\llcorner$), τέμνονται ὑπὸ γωνίαν 45^0.

63. Ἡ ὀξεῖα γωνία ποὺ σχηματίζουν αἱ διχοτόμοι δύο ἀπέναντι γωνιῶν κυρτοῦ τετραπλεύρου, ἰσοῦται μὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν του.

64. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν παντὸς κυρτοῦ πολυγώνου ἰσοῦται μὲ 4 ὀρθάς.

65. Ἐὰν ἡ γωνία $\widehat{A}$ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι 60^0, αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ αὐτοῦ εἶναι ἴσον κεκλιμέναι πρὸς τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως.

66. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\widehat{B} - \widehat{\Gamma} = 90^0$. Δείξατε ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A}$ σχηματίζει μὲ τὴν πλευρὰν ΒΓ γωνίαν 45^0.

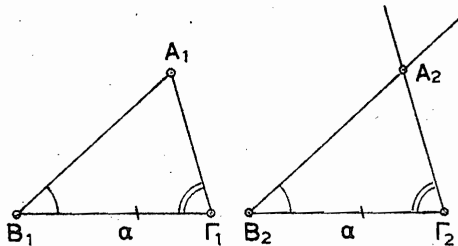
67. Ἑκάστη γωνία κυρτοῦ ν - γώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ. ($\nu \geqq 4$).

68. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν ἑνὸς κυρτοῦ πολυγώνου, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ εἶναι k ὀρθαὶ γωνίαι. Διερεύνησις.

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

107. Α' περίπτωσις. Θεώρημα. Ἐὰν μία πλευρὰ τριγώνου ἰσοῦται πρὸς μίαν πλευρὰν ἄλλου τριγώνου καὶ αἱ προσκείμεναι γωνίαι τῆς πλευρᾶς αὐτῆς τοῦ ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς προσκειμένας γωνίας τῆς ἴσης πλευρᾶς τοῦ ἄλλου τριγώνου, τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $A_2B_2\Gamma_2$ μὲ $B_1\Gamma_1 = B_2\Gamma_2 = \alpha$ καὶ $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$, $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Gamma}_2$ (σχ. 110). Μετατοπίζομεν τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν, ἔστω τὸ $A_1B_1\Gamma_1$ εἰς τρόπον, ὥστε ἡ πλευρὰ αὐτοῦ $B_1\Gamma_1$ νὰ ταυτισθῇ μὲ τὴν ἴσην της $B_2\Gamma_2$ ταυτιζομένων τῶν κορυφῶν εἰς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν ἴσαι γωνίαι καὶ ἐπὶ πλέον αἱ κορυφαὶ A_1 καὶ A_2 νὰ εὑρίσκωνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς $B_2\Gamma_2$. Τότε, ἐπειδὴ $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ καὶ $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Gamma}_2$, ἡ ἡμιευθεῖα B_1A_1 θὰ ταυτισθῇ μετὰ τῆς ἡμιευθείας B_2A_2 ὡς καὶ ἡ ἡμιευθεῖα Γ_1A_1 μετὰ τῆς Γ_2A_2. Τότε θὰ ταυτισθοῦν καὶ αἱ τομαὶ αὐτῶν A_1 καὶ A_2. Ἄρα τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα, διότι δύνανται νὰ ταυτισθοῦν διὰ μετατοπίσεως.



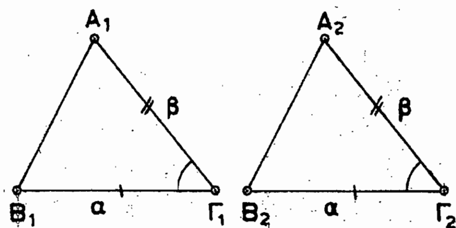
Σχ. 110

Παρατήρησις. Εἰς τὰ ἑπόμενα, ἐὰν δύο τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $A_2B_2\Gamma_2$ ἀποδειχθοῦν ἴσα ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ προηγουμένου κριτηρίου, χάριν συντομίας θὰ συμβολίζωμεν $A_1\overset{\Delta}{B_1}\Gamma_1 = A_2\overset{\Delta}{B_2}\Gamma_2$ (Γ - Π - Γ), ὅπου τὸ Γ - Π - Γ

θὰ σημαίνῃ Γωνία - Πλευρὰ - Γωνία, συμβολικὸν τοῦ προηγουμένου κριτηρίου.

108. Β' περίπτωσις. Θεώρημα. Ἐὰν δύο πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσαι μία πρὸς μίαν πρὸς δύο πλευρὰς ἄλλου τριγώνου καὶ ἡ γωνία τοῦ ἑνὸς τριγώνου ἡ περιεχομένη εἰς τὰς ἐν λόγῳ πλευρὰς εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν τοῦ ἄλλου τριγώνου τὴν περιεχομένην εἰς τὰς ἴσας πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ πρώτου τριγώνου, τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις. Ἂς θεωρήσωμεν τὰ τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $A_2B_2\Gamma_2$ μὲ $B_1\Gamma_1 = B_2\Gamma_2 = \alpha$, $\Gamma_1A_1 = \Gamma_2A_2 = \beta$ καὶ $\widehat{\Gamma_1} = \widehat{\Gamma_2}$ (σχ. 111). Μετατοπίζομεν τὸ τρίγωνον $A_1B_1\Gamma_1$ ἐπὶ τοῦ $A_2B_2\Gamma_2$ οὕτως, ὥστε ἡ γωνία $\widehat{\Gamma_1}$ νὰ ταυτισθῇ μὲ τὴν ἴσην της $\widehat{\Gamma_2}$ καὶ ἡ πλευρὰ $B_1\Gamma_1$ νὰ ταυτισθῇ μὲ τὴν ἴσην της $B_2\Gamma_2$. Τότε προφανῶς καὶ ἡ Γ_1A_1 θὰ ἔλθῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της Γ_2A_2 καὶ ἑπομένως τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα, ἐφ' ὅσον δύνανται διὰ μετατοπίσεως νὰ ταυτισθοῦν.

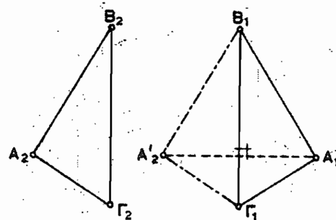


Σχ. 111

Παρατήρησις. Εἰς τὰ ἑπόμενα, ἡ ἰσότης δύο τριγώνων ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ προηγουμένου κριτηρίου θὰ συμβολίζεται, χάριν συντομίας, μὲ $A_1\overset{\Delta}{B_1}\Gamma_1 = A_2\overset{\Delta}{B_2}\Gamma_2$ (Π - Γ - Π), ὅπου τὸ Π - Γ - Π θὰ σημαίνῃ Πλευρὰ - Γωνία - Πλευρά, συμβολικὸν τοῦ προηγουμένου κριτηρίου.

109. Γ' Περίπτωσις. Θεώρημα. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν καὶ τὰς τρεῖς πλευράς των ἀντιστοίχως ἴσας εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $A_2B_2\Gamma_2$ μὲ $A_1B_1 = A_2B_2$, $B_1\Gamma_1 = B_2\Gamma_2$, $\Gamma_1A_1 = \Gamma_2A_2$ (σχ. 112). Μετατοπίζομεν τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν, ἔστω τὸ $A_2B_2\Gamma_2$, ὥστε ἡ πλευρὰ $B_2\Gamma_2$ νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν ἴσην της $B_1\Gamma_1$, ἡ κορυφὴ A_2 νὰ καταλάβῃ θέσιν A'_2 οὕτως, ὥστε τὰ σημεῖα A_1 αἱ A'_2 νὰ εἶναι ἑκατέρωθεν τῆς $B_1\Gamma_1$, ἀλλὰ καὶ εἰς τὰς κορυφὰς B_1 καὶ Γ_1 νὰ συντρέχουν ἴσαι πλευραὶ $B_1A_1 = B_1A'_2$ καὶ $\Gamma_1A_1 = \Gamma_1A'_2$. Τότε τὰ σημεῖα B_1 καὶ Γ_1, ὡς ἀπέχοντα ἕκαστον ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τὸ A_1 καὶ A'_2 κεῖνται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ τμήματος $A_1A'_2$. Ἄρα ἡ $B_1\Gamma_1$ εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος $A_1A'_2$. Τότε τὰ τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $A_2'B_1\Gamma_1$, εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν $B_1\Gamma_1$, ἄρα εἶναι ἴσα. Ἑπομένως θὰ εἶναι καὶ $A_1\overset{\Delta}{B_1}\Gamma_1 = A_2\overset{\Delta}{B_2}\Gamma_2$, διότι τὸ



Σχ. 112

$\overset{\Delta}{A_2B_2\Gamma_2}$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $\overset{\Delta}{A'_2B_1\Gamma_1}$, ἐφ' ὅσον τὸ τελευταῖον προέκυψε διὰ μετατοπίσεως τοῦ $A_2B_2\Gamma_2$.

Παρατηρήσεις i). Εἰς τὰ ἑπόμενα, ἡ ἰσότης δύο τριγώνων ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ προηγουμένου κριτηρίου θὰ συμβολίζεται, χάριν συντομίας, μὲ $\overset{\Delta}{A_1B_1\Gamma_1} = \overset{\Delta}{A_2B_2\Gamma_2}$ (Π - Π - Π), ὅπου τὸ Π - Π - Π θὰ σημαίνῃ Πλευρὰ - Πλευρὰ - Πλευρά, συμβολικὸν τοῦ προηγουμένου κρινηρίου.

ii). 'Εκ τῶν τριῶν ἀνωτέρω θεωρημάτων (κριτηρίων) ἕπεται ὅτι διὰ τὴν σύγκρισιν δύο τριγώνων, ἀπαιτοῦνται τρία ζεύγη ἀντιστοίχων στοιχείων, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν τοὐλάχιστον ζεῦγος νὰ εἶναι ζεῦγος πλευρῶν τῶν δύο τριγώνων.

iii). Εἰς δύο ἴσα τρίγωνα ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν κεῖνται ἴσαι γωνίαι καὶ ἀντιστρόφως.

iv). Κατὰ τὴν συμβολικὴν ἀναγραφὴν δύο ἴσων τριγώνων θὰ ἐπιδιώκωμεν αἱ κορυφαί, εἰς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν ἴσαι γωνίαι νὰ ἀναγράφωνται κατὰ τὴν αὐτὴν σειράν, δηλαδὴ $\overset{\Delta}{A_1B_1\Gamma_1} = \overset{\Delta}{A_2B_2\Gamma_2}$ καὶ ὄχι $\overset{\Delta}{A_1B_1\Gamma_1} = \overset{\Delta}{B_2A_2\Gamma_2}$. Αὐτὸ μᾶς διευκολύνει ἀπὸ τὴν ἀναγραφὴν τῆς ἰσότητος καὶ μόνον νὰ διακρίνωμεν τὰ ἴσα στοιχεῖα χωρὶς νὰ εἶναι ἀπαραίτητον νὰ ἀνατρέξωμεν εἰς τὸ σχῆμα.

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

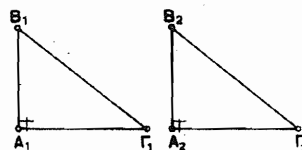
110. Θεώρημα. Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα ὅταν ἔχουν, (ἐκτὸς τῆς ὀρθῆς γωνίας), δύο ἐκ τῶν κυρίων στοιχείων των ἀντιστοίχως ἴσα ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν τοὐλάχιστον νὰ εἶναι πλευρά.

'Απόδειξις. Θεωροῦμεν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $A_2B_2\Gamma_2$ μὲ $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = 1^{L}$ (σχ. 113). Διακρίνομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις :

i). Ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας καὶ μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν των ἴσην, ἤτοι $B_1\Gamma_1 = B_2\Gamma_2$ καὶ $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$.

Τότε θὰ ἔχουν καὶ $\widehat{\Gamma_1} = \widehat{\Gamma_2}$ ὡς συμπληρώματα ἴσων γωνιῶν, ἄρα $\overset{\Delta}{B_1\Gamma_1A_1} = \overset{\Delta}{B_2\Gamma_2A_2}$ (Γ - Π - Γ) (§ 107).

ii). Ἔχουν μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην καὶ τὴν προσκειμένην αὐτῆς ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην ἀντιστοίχως, ἤτοι $A_1B_1 = A_2B_2$ καὶ $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$. 'Επειδὴ ἐπὶ πλέον ἔχουν $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = 1^{L}$, ἕπεται ὅτι $\overset{\Delta}{A_1B_1\Gamma_1} = \overset{\Delta}{A_2B_2\Gamma_2}$ (Γ - Π - Γ).

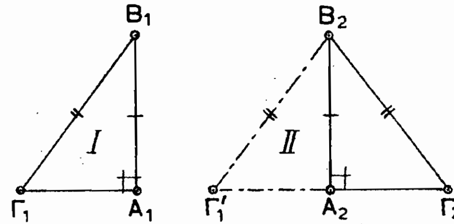


Σχ. 113

iii). Ἔχουν μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην καὶ τὴν ἀντικειμένην αὐτῆς γωνίαν ἴσην ἀντιστοίχως, ἤτοι $A_1B_1 = A_2B_2$ καὶ $\widehat{\Gamma_1} = \widehat{\Gamma_2}$.

Τότε θὰ ἔχουν καὶ $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ ὡς συμπληρώματα ἴσων γωνιῶν καὶ ἑπομένως $A_1\overset{\triangle}{B_1}\Gamma_1 = A_2\overset{\triangle}{B_2}\Gamma_2$ (Γ - Π - Γ).

iv). Τὰ τρίγωνα ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας καὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ἴσην ἀντιστοίχως, ἤτοι $B_1\Gamma_1 = B_2\Gamma_2$ καὶ $A_1B_1 = A_2B_2$ (σχ. 114).



Σχ. 114

Μετατοπίζομεν τὸ $A_1B_1\Gamma_1$ ἀπὸ τὴν θέσιν I εἰς τὴν θέσιν II οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ A_1B_1 νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν ἴσην της A_2B_2 καὶ ἔτσι ὥστε αἱ κορυφαὶ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν νὰ ταυτισθοῦν, ἡ δὲ κορυφὴ Γ_1 νὰ ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν Γ'_1 εἰς τρόπον, ὥστε τὰ σημεῖα Γ'_1 καὶ Γ_2 νὰ εὑρίσκωνται ἑκατέρωθεν τῆς A_2B_2. Ἡ $\Gamma'_1A_2\Gamma_2$ εἶναι εὐθεῖα δεδομένου ὅτι ἡ γωνία $\Gamma'_1\widehat{A_2}\Gamma_2$, ὡς ἄθροισμα δύο ὀρθῶν εἶναι πεπλατυσμένη. Ἐπειδὴ $B_2\Gamma'_1 = B_2\Gamma_2$, ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον B_2 ἀνήκει εἰς τὴν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος $\Gamma'_1\Gamma_2$, ἄρα ἡ B_2A_2 εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος $\Gamma'_1\Gamma_2$. Τότε θὰ εἶναι $A_2\Gamma'_1 = A_2\Gamma_2$, ἑπομένως εἶναι $A_2\overset{\triangle}{B_2}\Gamma_2 = A_2\overset{\triangle}{B_2}\Gamma'_1$ (Π - Π - Π). Ἄρα θὰ εἶναι καὶ $A_2\overset{\triangle}{B_2}\Gamma_2 = A_1\overset{\triangle}{B_1}\Gamma_1$, διότι τὸ $A_2\overset{\triangle}{B_2}\Gamma'_1$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $A_1B_1\Gamma_1$, ὡς προελθὸν ἐξ αὐτοῦ διὰ μετατοπίσεως.

v). Τὰ τρίγωνα ἔχουν τὰς δύο καθέτους πλευράς των ἴσας ἀντιστοίχως, ἤτοι $A_1B_1 = A_2B_2$ καὶ $A_1\Gamma_1 = A_2\Gamma_2$. Ἐπειδὴ ἐπὶ πλέον εἶναι $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 1^{L}$, ἕπεται ὅτι $B_1\overset{\triangle}{A_1}\Gamma_1 = B_2\overset{\triangle}{A_2}\Gamma_2$ (Π - Γ - Π).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

69. Ἐὰν δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, τότε καὶ αἱ διχοτόμοι τῶν ἴσων γωνιῶν των εἶναι ἴσαι.

70. Δύο εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) τέμνονται εἰς σημεῖον Ο. Ἐπὶ τῆς (ε_1) λαμβάνομεν σημεῖα Α καὶ Β οὕτως, ὥστε ΟΑ = ΟΒ καὶ ἐπὶ τῆς (ε_2) σημεῖα Γ καὶ Δ οὕτως, ὥστε ΟΓ = ΟΔ. Δείξατε ὅτι θὰ εἶναι ΑΓ = ΒΔ καὶ ΑΔ = ΒΓ.

71. Εἰς τὴν προέκτασιν τῆς διαμέσου ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν τμῆμα ΔΕ = ΑΔ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ΑΒ = ΕΓ.

72. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν γωνίας $x\widehat{O}y$ λαμβάνομεν τμήματα ΟΑ = ΟΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι πᾶν σημεῖον τῆς διχοτόμου ΟΖ τῆς γωνίας ἰσαπέχει ἀπὸ τὰ Α καὶ Β.

73. Ἐὰν δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα τότε καὶ αἱ διάμεσοι αὐτῶν ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς ἴσας πλευρὰς εἶναι ἴσαι.

74. Ἐὰν δύο κυρτὰ τετράπλευρα ἔχουν τὰς πλευράς των ἴσας, μίαν πρὸς μίαν καὶ

ὁμοίως κειμένας καὶ μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν, τὰ τετράπλευρα εἶναι ἴσα.

75. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Α καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τμήματα ΑΒ′ = ΑΒ καὶ ΑΓ′ = ΑΓ. Δείξατε ὅτι ἡ διάμεσος ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ προεκτεινομένη διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς Β′Γ′.

76. Δίδεται γωνία $x\widehat{O}y$ καὶ σημεῖον Δ τῆς διχοτόμου αὐτῆς. Θεωροῦμεν τὴν ἐκ τοῦ Δ κάθετον ἐπὶ τὴν διχοτόμον, ἡ ὁποία τέμνει τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς τὰ Α καὶ Β. Δείξατε ὅτι ΟΑ = ΟΒ καὶ ΔΑ = ΔΒ.

77. Ἐὰν δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, τότε καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς ἴσας πλευρὰς εἶναι ἴσα.

78. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἄγομεν τὴν διάμεσον ΑΜ. Δείξατε ὅτι αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ ἰσαπέχουν ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ΑΜ.

79. Ἀπὸ τὸ μέσον Ο εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ ἄγομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν (δ) πλαγίαν ὡς πρὸς τὴν ΑΒ. Ἐὰν αἱ κάθετοι ἐκ τῶν Α καὶ Β ἐπὶ τὴν ΑΒ τέμνουν τὴν (δ) εἰς τὰ Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως, δείξατε ὅτι ΟΕ = ΟΖ.

80. Ἀπὸ τὸ μέσον Ο εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν (δ) καὶ ἐκ τῶν Α καὶ Β καθέτους ΑΓ καὶ ΒΔ ἐπ' αὐτήν. Δείξατε ὅτι ΑΔ = ΒΓ.

Β′.

81. Δίδεται γωνία $x\widehat{O}y$. Ἐπὶ τῆς Οx λαμβάνομεν σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἐπὶ τῆς Οy σημεῖα Γ καὶ Δ οὕτως, ὥστε ΟΑ = ΟΓ καὶ ΟΒ = ΟΔ. Δείξατε ὅτι α) ΑΒ = ΓΔ, β) Ἂν Ε εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ΑΔ καὶ ΒΓ τότε τρίγ. ΕΑΒ = τριγ. ΕΓΔ, γ) ἡ ΕΟ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $x\widehat{O}y$.

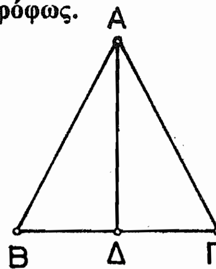
82. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐκ τῆς κορυφῆς Α φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ὄχι πρὸς τὸ μέρος τοῦ τριγώνου καὶ ἐπ' αὐτῶν λαμβάνομεν ἀντιστοίχως ΑΒ′ = ΑΒ καὶ ΑΓ′ = ΑΓ. Δείξατε ὅτι α) ΒΓ′ = ΓΒ′ καὶ β) ΒΓ′ ⊥ ΓΒ′.

83. Τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τὰ ὕψη ΒΔ καὶ ΓΕ. Προεκτείνομεν αὐτὰ πρὸς τὸ μέρος τῶν κορυφῶν καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λαμβάνομεν τμήματα ΒΒ′ = ΑΓ καὶ ΓΓ′ = ΑΒ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι α) ΑΒ′ = ΑΓ′ καὶ β) ΑΒ′ ⊥ ΑΓ′.

ΤΟ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΝ

111. Θεώρημα. Ἐὰν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ ΑΒ = ΑΓ, τότε αἱ παρὰ τὴν βάσιν ΒΓ γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Ἐκ τῆς κορυφῆς Α φέρομεν τὴν κάθετον ΑΔ ἐπὶ τὴν ΒΓ (σχ. 115). Ἐπειδὴ εἶναι ΑΒ = ΑΓ, ἡ ΑΔ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΒΓ, ἑπομένως ὑπάρχει συμμετρία ὡς πρὸς τὴν ΑΔ. Τότε θὰ εἶναι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ ὡς συμμετρικαὶ μεταξύ των.



Σχ 115

Ἀντιστρόφως. Ἔστω ὅτι εἶναι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές. Συγκρί-

νομεν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ. Ταῦτα ἔχουν τὴν ΑΔ κοινὴν καὶ τὰς ὀξείας γωνίας των $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ ἴσας, ἄρα εἶναι ἴσα. 'Εξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι ΑΒ = ΑΓ, ἄρα τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

Πόρισμα Ι. Κάθε ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι ἰσογώνιον καὶ ἑκάστη γωνία του ἰσοῦται πρὸς 60^0, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν του ἰσοῦται πρὸς 2^L ἤτοι 180^0.

Πόρισμα ΙΙ. 'Εὰν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἔχῃ μίαν τῶν γωνιῶν του 60^0, εἶναι ἰσόπλευρον.

Πόρισμα ΙΙΙ. 'Εὰν δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἔχουν τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς τῶν ἴσων πλευρῶν των ἴσην ἢ μίαν τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν ἴσην, τὰ τρίγωνα εἶναι ἰσογώνια.

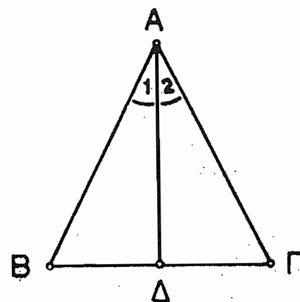
Πόρισμα IV. **'Εκάστη τῶν ἴσων γωνιῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ὀξεῖα.**

112. Θεώρημα. Εἰς πᾶν ἰσοσκελὲς τρίγωνον τὸ ὕψος ποὺ ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῶν ἴσων πλευρῶν, εἶναι καὶ διάμεσος καὶ διχοτόμος.

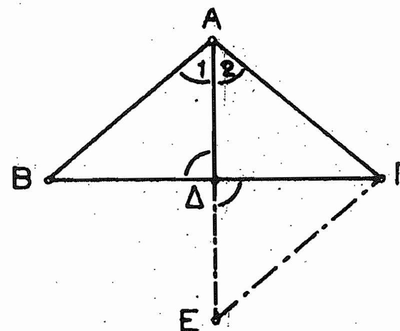
'Απόδειξις. Ἔστω ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ μὲ ΑΒ = ΑΓ (σχ. 116). Τότε τὸ ὕψος ΑΔ θὰ εἶναι καὶ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΒΓ, διότι τὸ σημεῖον Α ἰσαπέχει ἀπὸ τὰ ἄκρα Β καὶ Γ. 'Εφ' ὅσον εἶναι μεσοκάθετος εἶναι καὶ διάμεσος, διότι ΔΒ = ΔΓ. 'Επὶ πλέον εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A}$, διότι ὡς μεσοκάθετος τοῦ ΒΓ εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος, συνεπῶς $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$.

113. Θεώρημα. 'Εὰν εἰς ἕνα τρίγωνον συμβαίνει : i) ἕνα ὕψος νὰ εἶναι καὶ διάμεσος ἢ ii) ἕνα ὕψος νὰ εἶναι καὶ διχοτόμος ἢ iii) μία διάμεσος νὰ εἶναι καὶ διχοτόμος, τότε τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

'Απόδειξις. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 117), ἔνθα :



Σχ. 116



Σχ. 117

i) Τὸ ὕψος ΑΔ εἶναι καὶ διάμεσος. Τότε τὸ ΑΔ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΒΓ, συνεπῶς ἄξων συμμετρίας, ἄρα ΑΒ = ΑΓ. 'Επομένως τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

ii) Τὸ ὕψος ΑΔ εἶναι καὶ διχοτόμος. Τότε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ, ὡς ἔχοντα τὴν ΑΔ κοινὴν καὶ $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ εἶναι ἴσα, ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΑΒ = ΑΓ. Ἑπομένως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

iii) Ἡ διάμεσος ΑΔ εἶναι καὶ διχοτόμος. Εἰς τὴν προέκτασιν αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα ΔΕ = ΔΑ καὶ συγκρίνομεν τὰ τρίγωνα ΔΑΒ καὶ ΔΕΓ. Ταῦτα εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ΔΒ = ΔΓ ἐξ ὑποθέσεως, ΔΑ = ΔΕ καὶ τὰς γωνίας των εἰς τὸ Δ ἴσας ὡς κατὰ κορυφὴν (Π - Γ - Π). Ἄρα θὰ εἶναι

(1) ΑΒ = ΕΓ καὶ $\widehat{A}_1 = \widehat{E}$

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι καὶ $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ ἐξ ὑποθέσεως, ἕπεται ὅτι $\widehat{A}_2 = \widehat{E}$, ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΓΕ εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ

(2) ΑΓ = ΕΓ

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι

ΑΒ = ΑΓ.

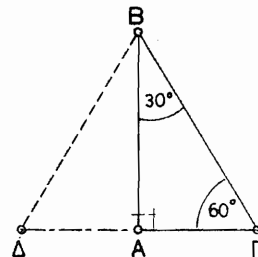
Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

114. Θεώρημα. Ἂν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἡ μία ὀξεῖα γωνία του εἶναι 30⁰, τότε ἡ ἀπέναντι αὐτῆς πλευρὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης καὶ ἀντιστρόφως.

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ μὲ $\widehat{B} = 30^0$. Θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι $ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $\widehat{B} = 30^0$ ἕπεται ὅτι $\widehat{Γ} = 60^0$. Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΑΓ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα ΑΔ = ΑΓ (σχ. 118). Φέρομεν τὴν ΒΔ καὶ τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΒΔΓ εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ ΒΔ = ΒΓ, διότι ἡ ΒΑ εἶναι ὕψος καὶ διάμεσος αὐτοῦ. Ἐπὶ πλέον μία γωνία του, ἡ $\widehat{Γ}$ εἶναι 60^0. Ἄρα τοῦτο εἶναι ἰσόπλευρον. Τότε θὰ εἶναι : ΔΓ = ΒΓ ἀλλὰ ΔΓ = 2ΑΓ. Ἐξ αὐτῶν ἕπεται :

$2ΑΓ = ΒΓ \Rightarrow ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}$ ὅ.ἔ.δ.



Σχ. 118

Ἀντιστρόφως. Ἂν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἡ μία κάθετος πλευρὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης, τότε ἡ ἀπέναντι αὐτῆς γωνία εἶναι 30^0.

Ἀπόδειξις. Ἔχομεν ὅτι $ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}$. Προεκτείνομεν ὡς καὶ προηγουμένως, τὴν ΑΓ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα ΑΔ =

ΑΓ. Τότε τὸ τρίγωνον ΒΔΓ εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ ΒΔ $=$ ΒΓ (1), διότι ἡ ΒΑ εἶναι ὕψος καὶ διάμεσος αὐτοῦ. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{\Delta B \Gamma}$. Ἐξ ὑποθέσεως ὅμως εἶναι $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} \Rightarrow 2.A\Gamma = B\Gamma$ ἢ $\Delta\Gamma = B\Gamma$ (2). Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι $B\Delta = B\Gamma = \Delta\Gamma$, ἤτοι τὸ τρίγωνον ΒΓΔ εἶναι ἰσόπλευρον. Ἑπομένως $\widehat{\Delta B \Gamma} = 60^0 \Rightarrow \widehat{AB\Gamma} = 30^0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

84. Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ βάσις εἶναι τὸ τρίτον ἑκάστης τῶν ἴσων πλευρῶν του. Ἂν ἡ περίμετρος αὐτοῦ εἶναι 35 m. νὰ εὑρεθοῦν αἱ πλευραί του.

85. Δίδεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Εἰς τὰς προεκτάσεις τῆς βάσεως ΒΓ καὶ ἑκατέρωθεν τῶν Β καὶ Γ λαμβάνομεν τμήματα ΒΒ' = ΓΓ'. Δείξατε ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒ'Γ' εἶναι ἰσοσκελές.

86. Τὰ ὕψη ποὺ ἄγονται ἐπὶ τῶν ἴσων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσα.

87. Ἐὰν τρίγωνον ἔχῃ δύο ἴσα ὕψη εἶναι ἰσοσκελές.

88. Αἱ διάμεσοι ποὺ ἄγονται ἐπὶ τῶν ἴσων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσαι.

89. Αἱ διχοτόμοι ποὺ ἄγονται ἐπὶ τῶν ἴσων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσαι.

90. Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι κορυφαὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

91. Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) προεκτείνομεν τὰς ἴσας πλευρὰς πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Α καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τμήματα ΑΕ = ΑΖ. Δείξατε ὅτι τὰ τρίγωνα ΕΒΔ καὶ ΖΓΔ εἶναι ἴσα καὶ ὅτι τὰ Ε καὶ Ζ ἰσαπέχουν ἀπὸ τὸ μέσον Δ τῆς ΒΓ.

92. Κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἔχει ΑΒ = ΒΓ καὶ $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$. Δείξατε ὅτι α) ΑΔ = ΔΓ καὶ β) αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ τέμνονται καθέτως.

93. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΔ καὶ ἐκ τοῦ Β κάθετον ἐπὶ τὴν διχοτόμον, ἡ ὁποία τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ Ε καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ. Δείξατε ὅτι ΕΒ = ΕΖ.

94. Τὸ μέσον τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰς ἴσας πλευράς του.

95. Δίδεται γωνία $\widehat{xOy}$. Ἐπὶ τῆς Οx λαμβάνομεν σημεῖον Α καὶ ἐξ αὐτοῦ φέρομεν $AB \perp Oy$. Ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{OAB}$ τέμνει τὴν Οy εἰς τὸ Γ, ἐκ τοῦ ὁποίου φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν Οy, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Οx εἰς τὸ Δ. Δείξατε ὅτι ΔΑ = ΔΓ.

96. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο, εἰς τὸ ὁποῖον τέμνονται αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ τριγώνου ΑΒΓ, φέρομεν παράλληλον τῆς ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι ΔΕ = ΒΔ + ΓΕ.

97. Δίδεται κυρτὴ γωνία $\widehat{xOy}$. Ἐκ τῆς κορυφῆς Ο φέρομεν $OA \perp Oy$ καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Οx λαμβάνομεν ΟΒ = ΟΑ, φέρομεν δὲ καὶ τὴν $B\Delta \perp Oy$. Δείξατε ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{\Delta BO}$ ἢ τῆς γωνίας $\widehat{\Delta Bx}$.

98. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ μὲ ΑΒ > ΑΓ. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα ΑΔ = ΑΓ. Δείξατε ὅτι

$$\widehat{\Delta\Gamma B} = \frac{\widehat{\Gamma} - \widehat{B}}{2}$$

99. Δίδεται ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1L$). Εἰς τὴν προέκτασιν τῆς πλευρᾶς ΒΑ λαμβάνομεν τμῆμα ΑΔ = ΑΒ καὶ μὲ πλευρὰν τὴν ΒΔ κατασκευάζομεν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΒΔΕ, φέρομεν δὲ καὶ τὴν ΓΕ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου ΓΒΕ (δύο περιπτώσεις).

100. Δίδεται γωνία $\widehat{xOy}$. Ἀπὸ σημεῖον Α τῆς Ox φέρομεν παράλληλον τῆς Oy καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν ΑΒ = ΑΟ. Δείξατε ὅτι ἡ ΟΒ εἶναι διχοτόμος (ἐσωτερικὴ ἢ ἐξωτερικὴ) τῆς γωνίας $\widehat{xOy}$.

101. Δίδεται ὀρθὴ γωνία $\widehat{B A \Gamma}$. Κατασκευάζομεν γωνίαν $\widehat{AB\Delta} = 30^0$ ἔνθα ἡ ΒΔ τέμνει τὴν ΑΓ ἢ τὴν προέκτασίν της εἰς τὸ Δ. Ἐπίσης κατασκευάζομεν γωνίαν $\widehat{A\Gamma E} = 30^0$, ἔνθα ἡ ΓΕ τέμνει τὴν ΑΒ ἢ τὴν προέκτασίν της εἰς τὸ Ε. Ἐὰν αἱ ΒΔ καὶ ΓΕ τέμνωνται εἰς τὸ Ζ, δείξατε ὅτι τὰ τρίγωνα ΒΕΖ καὶ ΖΔΓ εἶναι ἰσοσκελῆ ἢ ὀρθογώνια.

102. Δίδεται εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ καὶ σημεῖον Γ ἐπ' αὐτοῦ. Ἐκ τῶν Α καὶ Β ἄγομεν δύο παραλλήλους ἡμιευθείας Ax καὶ By πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ΑΒ καὶ ἐπ' αὐτῶν λαμβάνομεν τμήματα ΑΔ = ΑΓ καὶ ΒΕ = ΒΓ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι $\widehat{\Delta\Gamma E} = 1L$.

103. Ἐὰν ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος γωνίας τριγώνου εἶναι παράλληλος τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς, τότε τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

104. Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ. Μὲ βάσεις τὰς πλευράς του κατασκευάζομεν ἐκτὸς αὐτοῦ ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΕ, ΒΓΖ. Δείξατε ὅτι : α) αἱ γραμμαὶ ΔΑΕ, ΕΓΖ, ΖΒΔ εἶναι εὐθεῖαι β) τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ἰσόπλευρον.

Β'.

105. Μὲ βάσεις τὰς ἴσας πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν ἐκτὸς αὐτοῦ ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΓΕ. Δείξατε ὅτι ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος τῆς ΒΓ. Πότε ἡ γραμμὴ ΔΑΕ εἶναι εὐθεῖα ;

106. Δύο εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) τέμνονται εἰς σημεῖον Ο. Ἐπὶ τῆς (ε_1) λαμβάνομεν σημεῖα Β, Γ καὶ ἐπὶ τῆς (ε_2) σημεῖον Α, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ. Δείξατε ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον.

107. Τριγώνου ΑΒΓ εἶναι $\widehat{B} = 2\widehat{\Gamma}$. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ καὶ εἰς τὴν προέκτασιν τῆς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα ΒΕ = ΒΔ. Ἐὰν ἡ ΕΔ τέμνῃ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ, δείξατε ὅτι τὰ τρίγωνα ΖΔΓ καὶ ΖΔΑ εἶναι ἰσοσκελῆ.

108. Ἐπ' εὐθείας δίδονται διαδοχικῶς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ. Σχηματίζομεν τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΓΕ. Δείξατε ὅτι ΑΕ = ΓΔ.

109. Ἐὰν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) διαιρῆται διὰ τῆς ΒΔ εἰς δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΒΔΓ μὲ ΑΔ = ΔΒ καὶ ΒΔ = ΒΓ, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

ΑΝΙΣΟΤΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΔΙΑ ΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

115. Θεώρημα. i). Εἰς κάθε τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύουν αἱ ἓξ σχέσεις ἀνισότητος :

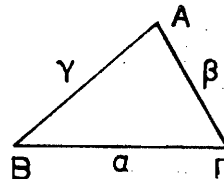
(1)	$\alpha < \beta + \gamma$	καὶ	(4)	$\alpha > \lvert \beta - \gamma \rvert$
(2)	$\beta < \alpha + \gamma$		(5)	$\beta > \lvert \alpha - \gamma \rvert$
(3)	$\gamma < \alpha + \beta$		(6)	$\gamma > \lvert \alpha - \beta \rvert$

ii). Αἱ ἀνωτέρω ἓξ σχέσεις συγχωνεύονται εἰς τὴν διπλῆν ἀνισότητα :

(7) $$\lvert \beta - \gamma \rvert < \alpha < \beta + \gamma$$

ὅπου α, β, γ αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου καὶ $\lvert \beta - \gamma \rvert = \beta - \gamma$ ἐὰν $\beta \geqslant \gamma$ ἐνῶ $\lvert \beta - \gamma \rvert = \gamma - \beta$ ἐὰν $\beta < \gamma$.

'Απόδειξις. i). Αἱ τρεῖς πρῶται εἶναι προφανεῖς βάσει τοῦ ἀξιώματος § 40 κατὰ τὸ ὁποῖον ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα εἶναι μικρότερον πάσης ἄλλης γραμμῆς μὲ τὰ αὐτὰ ἄκρα.



Σχ. 119

'Εκ τῶν (2) καὶ (3) λαμβάνομεν ἀντιστοίχως $\alpha > \beta - \gamma$ καὶ $\alpha > \gamma - \beta$.

'Εξ αὐτῶν ἕπεται ὅτι $\alpha > \lvert \beta - \gamma \rvert$, ἤτοι ἰσχύει ἡ σχέσις (4). 'Ομοίως ἐκ τῶν σχέσεων (1), (3) καὶ (1), (2) λαμβάνομεν ἀντιστοίχως :

$\beta > \lvert \alpha - \gamma \rvert$ καὶ $\gamma > \lvert \alpha - \beta \rvert$, ἤτοι ἰσχύουν αἱ σχέσεις (5) καὶ (6).

ii). 'Εὰν ἰσχύουν αἱ σχέσεις (1) ἕως (6) τότε προφανῶς ἰσχύει καὶ ἡ (7) διότι τὰ δύο σκέλη της ἀποτελοῦν αἱ (4) καὶ (1) ἀντιστοίχως.

'Αντιστρόφως. 'Εὰν ἰσχύῃ ἡ (7) θὰ δείξωμεν ὅτι ἰσχύουν αἱ (1) ἕως (6). 'Αμέσως ἐκ τῆς (7) ἕπεται ὅτι ἰσχύουν αἱ (4) καὶ (1), διότι εἶναι τὰ δύο σκέλη της.

Χωρὶς νὰ βλάπτεται ἡ γενικότης δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν μίαν τυχαίαν σχέσιν διατάξεως μεταξὺ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου καὶ ἔστω $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$. Τότε ἡ (7) γράφεται $\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma$ καὶ διασπᾶται εἰς τάς :

(8) $\beta - \gamma < \alpha$ καὶ

(9) $\alpha < \beta + \gamma$

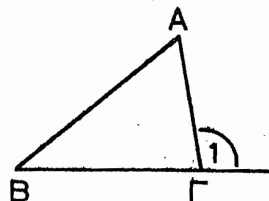
'Εκ τῆς (8) ἕπεται $\beta < \alpha + \gamma$, ἄρα ἰσχύει ἡ (2). 'Επειδὴ ἡ γ ὑπετέθη ἡ μικροτέρα πλευρὰ τοῦ τριγώνου, ἕπεται ὅτι εἶναι μικροτέρα καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων ἤτοι $\gamma < \alpha + \beta$, ἄρα ἰσχύει ἡ (3). 'Εκ τῆς (9) ἕπεται $\beta > \alpha - \gamma$ καὶ $\gamma > \alpha - \beta$, ἐπειδὴ δὲ ὑπετέθη $\alpha \geqslant \gamma$ καὶ $\alpha \geqslant \beta$, αἱ δύο τελευταῖαι σχέσεις δύνανται ἀκόμη νὰ γραφοῦν $\beta > \lvert \alpha - \gamma \rvert$ καὶ $\gamma > \lvert \alpha - \beta \rvert$. ῎Αρα ἰσχύουν καὶ αἱ (5) καὶ (6). 'Επομένος αἱ ἀνισότητες (1) ἕως (6) εἶναι ἰσοδύναμοι πρὸς τὴν (7).

116. Θεώρημα. Ἑκάστη ἐξωτερικὴ γωνία τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα ἑκάστης τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν τοῦ τριγώνου.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 120) καὶ $\widehat{\Gamma}_1$ ἡ ἐξωτερικὴ γωνία τῆς $\widehat{\Gamma}$. Γνωρίζομεν ὅτι (§ 105 πόρ. I) :

$$\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{A} + \widehat{B}$$

Ἄρα θὰ εἶναι $\widehat{\Gamma}_1 > \widehat{A}$ καὶ $\widehat{\Gamma}_1 > \widehat{B}$.

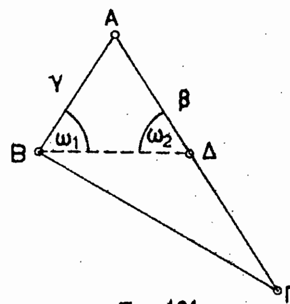


Σχ. 120

117. Θεώρημα. Ἂν αἱ δύο πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἄνισοι, τότε καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν γωνίαι εἶναι ἄνισοι, ἀπέναντι δὲ τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς κεῖται μεγαλυτέρα γωνία καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $\beta > \gamma$. Θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι καὶ $\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$ (σχ. 121).

Ἐπὶ τῆς $A\Gamma = \beta$ λαμβάνομεν τμῆμα $A\Delta = AB = \gamma$. Τότε τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἰσοσκελές, ἑπομένως



Σχ. 121

(1) $$\omega_1 = \omega_2$$

Τὸ σημεῖον Δ εἶναι προφανῶς ἐνδιάμεσον τῶν Α καὶ Γ, συνεπῶς ἡ ΒΔ εἶναι ἐσωτερικὴ διὰ τὴν γωνίαν $\widehat{B}$. Ἄρα :

(2) $$\widehat{B} > \omega_1$$

Ἐπὶ πλέον δὲ εἶναι :

(3) $$\omega_2 > \widehat{\Gamma}$$

διότι (§ 116) ἡ ω_2 εἶναι ἐξωτερικὴ τοῦ τριγώνου ΔΒΓ. Τότε ἐκ τῶν (2), (1) καὶ (3) λαμβάνομεν $\widehat{B} > \omega_1 = \omega_2 > \widehat{\Gamma}$. Ἄρα :

$$\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$$

Ἀντιστρόφως. Ἔστω ὅτι εἶναι $\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$. Θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι καὶ $\beta > \gamma$ (σχ. 122).

Ἐκ τοῦ Β φέρομεν ἡμιευθεῖαν ἐσωτερικὴν τῆς γωνίας $\widehat{B}$, ἡ ὁποία νὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς ΒΓ γωνίαν $\varphi = \widehat{\Gamma}$. Τότε τὸ σημεῖον Δ, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἡμιευθεῖα τέμνει τὴν ΑΓ, εἶναι ἐνδιάμεσον τῶν Α καὶ Γ καὶ τὸ τρίγωνον ΔΒΓ εἶναι ἰσοσκελές. Ἄρα :

(4) $$\Delta B = \Delta\Gamma$$

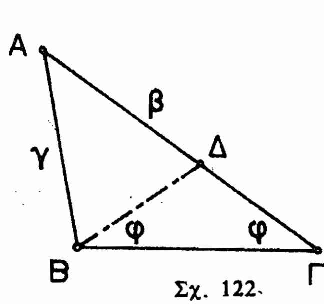
Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ ἔχομεν :

$$\gamma < A\Delta + \Delta B$$

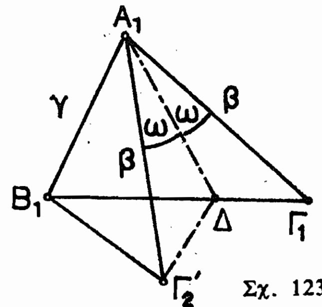
ἡ ὁποία, λόγῳ τῆς (4), γράφεται :

$$\gamma < \mathrm{A\Delta} + \mathrm{\Delta\Gamma} \quad \text{ἢ} \quad \gamma < \mathrm{A\Gamma}.$$

$$\text{Ἄρα :} \qquad \gamma < \beta$$



Σχ. 122.



Σχ. 123

118. Θεώρημα. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἀντιστοίχως ἴσας καὶ τὰς περιεχομένας ὑπ' αὐτῶν γωνίας ἀνίσους, τότε τὰ τρίγωνα εἶναι ἄνισα, ἀπέναντι δὲ τῆς μεγαλυτέρας γωνίας κεῖται μεγαλυτέρα πλευρὰ καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν δύο τρίγωνα $\mathrm{A_1B_1\Gamma_1}$ καὶ $\mathrm{A_2B_2\Gamma_2}$ μὲ $\mathrm{A_1B_1} = \mathrm{A_2B_2} = \gamma$ καὶ $\mathrm{A_1\Gamma_1} = \mathrm{A_2\Gamma_2} = \beta$ (σχ. 123). Ὑποθέτομεν ἐπὶ πλέον ὅτι εἶναι $\widehat{\mathrm{A}}_1 > \widehat{\mathrm{A}}_2$. Θὰ δείξωμεν ὅτι $\mathrm{B_1\Gamma_1} > \mathrm{B_2\Gamma_2}$.

Μετατοπίζομεν τὸ τρίγωνον $\mathrm{A_2B_2\Gamma_2}$ εἰς τὴν θέσιν $\mathrm{A_1B_1\Gamma'_2}$ οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ $\mathrm{A_2B_2}$ αὐτοῦ νὰ ταυτισθῇ μετὰ τῆς ἴσης της $\mathrm{A_1B_1}$ ἡ δὲ γωνία $\widehat{\mathrm{A}}_2$ αὐτοῦ νὰ ἀποκτήσῃ κοινὸν μέρος μετὰ τῆς $\widehat{\mathrm{A}}_1$. Τότε, ἐπειδὴ $\widehat{\mathrm{A}}_1 > \widehat{\mathrm{A}}_2$ ἡ $\mathrm{A_2\Gamma'_2}$ εἶναι ἐσωτερικὴ τῆς γωνίας $\widehat{\mathrm{A}}_1$ καὶ ἀρκεῖ πλέον νὰ δείξωμνν ὅτι $\mathrm{B_1\Gamma_1} > \mathrm{B_1\Gamma'_2}$.

Θεωροῦμεν τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας $\mathrm{\Gamma_1\widehat{A}_1\Gamma'_2}$ καὶ ἔστω ὅτι αὐτὴ τέμνει τὴν πλευρὰν $\mathrm{B_1\Gamma_1}$ εἰς τὸ σημεῖον Δ. Τότε εἶναι τριγ. $\mathrm{A_1\Gamma_1\Delta}$ = τριγ. $\mathrm{A_1\Gamma'_2\Delta}$ ὡς ἔχοντα $\mathrm{A_1\Gamma_1} = \mathrm{A_1\Gamma'_2}$, τὴν $\mathrm{A_1\Delta}$ κοινὴν καὶ $\mathrm{\Gamma_1\widehat{A}_1\Delta} = \mathrm{\Gamma'_2\widehat{A}_1\Delta} = \omega$. Ἄρα θὰ εἶναι :

(1) $$\mathrm{\Delta\Gamma_1} = \mathrm{\Delta\Gamma'_2}$$

Ἐκ τοῦ τριγώνου $\mathrm{B_1\Delta\Gamma'_2}$ ἔχομεν : $\mathrm{B_1\Gamma'_2} < \mathrm{B_1\Delta} + \mathrm{\Delta\Gamma'_2}$ καὶ λόγῳ τῆς σχέσεως (1), ἡ τελευταία γράφεται

$\mathrm{B_1\Gamma'_2} < \mathrm{B_1\Delta} + \mathrm{\Delta\Gamma_1}$ ἢ $\mathrm{B_1\Gamma'_2} < \mathrm{B_1\Gamma_1}$. Ἄρα $\mathrm{B_2\Gamma_2} < \mathrm{B_1\Gamma_1}$ ἢ $\mathrm{B_1\Gamma_1} > \mathrm{B_2\Gamma_2}$.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω ὅτι τὰ τρίγωνα $\mathrm{A_1B_1\Gamma_1}$ καὶ $\mathrm{A_2B_2\Gamma_2}$ ἔχουν $\mathrm{A_1B_1} = \mathrm{A_2B_2} = \gamma$, $\mathrm{A_1\Gamma_1} = \mathrm{A_2\Gamma_2} = \beta$ καὶ $\mathrm{B_1\Gamma_1} > \mathrm{B_2\Gamma_2}$. Θὰ δείξωμεν ὅτι : $\widehat{\mathrm{A}}_1 > \widehat{\mathrm{A}}_2$.

Πράγματι, ἡ περίπτωσις $\widehat{\mathrm{A}}_1 = \widehat{\mathrm{A}}_2$ ἀποκλείεται, διότι τότε τὰ τρίγωνα θὰ ἦσαν ἴσα, ὡς ἔχοντα δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν περιεχομένην ὑπ' αὐτῶν

γωνίαν ἴσην. Τοῦτο ὅμως ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἐπίσης ἀποκλείεται ἡ περίπτωσις $\widehat{A}_1 < \widehat{A}_2$, διότι τότε, ὡς ἐδείχθη, θὰ ἦτο καὶ $B_1\Gamma_1 < B_2\Gamma_2$, ἀλλὰ καὶ αὐτὸ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἄρα τὸ μόνον τὸ ὁποῖον δύναται νὰ συμβαίνῃ εἶναι $\widehat{A}_1 > \widehat{A}_2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

110. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν τρία τυχόντα σημεῖα Δ, Ε, Ζ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου ΔΕΖ εἶναι μικροτέρα τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

111. Ἑκάστη διάμεσος τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν πλευρῶν ποὺ τὴν περιέχουν καὶ μεγαλυτέρα τῆς ἡμιδιαφορᾶς αὐτῶν.

112. Ἐὰν Μ εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τριγώνου ΑΒΓ, δείξατε ὅτι $\tau <$ ΜΑ + ΜΒ + ΜΓ $< 2\tau$, ὅπου 2τ ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου.

113. Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\beta > \gamma$ καὶ Ε τυχὸν σημεῖον τῆς διαμέσου ΑΜ, δείξατε ὅτι ΕΓ > ΕΒ.

114. Δίδεται τμῆμα ΑΒ καὶ δύο σημεῖα Γ καὶ Δ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος του. Ἂν τὰ τμήματα ΓΒ καὶ ΔΑ τέμνωνται, δείξατε ὅτι ΑΓ + ΒΔ < ΑΔ + ΒΓ.

115. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A}$. Δείξατε ὅτι ΑΒ > ΒΔ καὶ ΑΓ > ΓΔ.

116. Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ οὕτως, ὥστε ἡ τεθλασμένη ΑΕΖΔ νὰ εἶναι κυρτή. Δείξατε ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ τετραπλεύρου ΑΕΖΔ εἶναι μικροτέρα τῆς περιμέτρου τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

117. Ἐὰν τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ εἶναι ἐσωτερικὰ τριγώνου ΑΒΓ, δείξατε ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου ΔΕΖ εἶναι μικροτέρα τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Β΄.

118. Ἐπὶ τῶν προεκτάσεων τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τμήματα ΒΔ = ΓΕ. Δείξατε ὅτι ΔΕ > ΒΓ.

119. Τὸ ἄθροισμα τῶν διαγωνίων κυρτοῦ τετραπλεύρου εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἡμιπεριμέτρου καὶ μικρότερον τῆς περιμέτρου αὐτοῦ.

120. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1^{L}$) φέρομεν τὴν διχοτόμον ΒΔ τῆς γωνίας $\widehat{B}$. Δείξατε ὅτι ΑΔ < ΓΔ.

121. Ἐὰν εἰς κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ΑΔ = ΒΓ καὶ $\widehat{A\Delta\Gamma} > \widehat{B\Gamma\Delta}$, νὰ συγκριθοῦν αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ.

122. Ἐὰν ἡ πλευρὰ ΒΓ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) εἶναι μικροτέρα, ἴση ἢ μεγαλυτέρα μιᾶς τῶν ἴσων πλευρῶν του, τότε ἡ γωνία $\widehat{A}$ θὰ εἶναι ἀντιστοίχως μικροτέρα, ἴση ἢ μεγαλυτέρα τῶν 60^0.

123. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΜ ἡ διάμεσος αὐτοῦ. Δείξατε ὅτι : α) ἐὰν ΑΜ $< \frac{B\Gamma}{2}$, τότε $\widehat{A} > 1^{L}$, β) ἐὰν ΑΜ $= \frac{B\Gamma}{2}$, τότε $\widehat{A} = 1^{L}$ καὶ γ) ἐὰν ΑΜ $> \frac{B\Gamma}{2}$, τότε $\widehat{A} < 1^{L}$.

124. Ἐὰν τὸ ὕψος ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς ΒΓ, δείξατε ὅτι ἡ γωνία $\widehat{A}$ εἶναι ὀξεῖα ἢ ὀρθή. Πότε εἶναι ὀρθή ;

125. Δίδεται κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα καὶ ἡ ΓΔ ἡ μικροτέρα. Δείξατε ὅτι $\widehat{ΒΓΔ} > \widehat{ΒΑΔ}$ καὶ $\widehat{ΑΔΓ} > \widehat{ΑΒΓ}$.

126. Ἐὰν ἡ διάμεσος τριγώνου περιέχεται μεταξὺ ἀνίσων πλευρῶν, σχηματίζει μὲ αὐτὰς ἀνίσους γωνίας καὶ μικροτέραν γωνίαν μὲ τὴν μεγαλυτέραν πλευράν. Ἐπίσης ἡ διάμεσος αὕτη σχηματίζει ἀμβλεῖαν γωνίαν μὲ τὸ τμῆμα τῆς τρίτης πλευρᾶς, τὸ ὁποῖον κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς μεγαλυτέρας ἐκ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

127. Ἐὰν ΑΒΓ εἶναι τυχὸν τρίγωνον, δείξατε ὅτι $υ_α \leqq δ_α \leqq μ_α$ ὅπου τὸ = ἰσχύει μόνον διὰ τὸ ἰσοσκελές.

128. Ἐὰν τριγώνου ΑΒΓ μὲ ΑΒ > ΑΓ, ΑΔ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A}$, τότε θὰ εἶναι ΔΒ > ΔΓ.

129. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ δείξατε ὅτι εἶναι $2μ_α > β + γ - α$.

ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

119. Τυχὸν τετράπλευρον. Τετράπλευρον εἶναι τὸ πολύγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει τέσσαρας πλευράς. Τότε θὰ ἔχῃ τέσσαρας κορυφάς, τέσσαρας γωνίας καὶ δύο διαγωνίους.

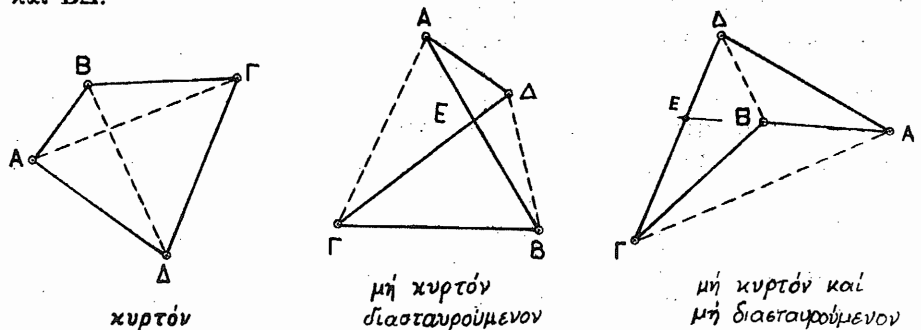
Εἰς ἓν τετράπλευρον ΑΒΓΔ θὰ λέγωμεν ὅτι εὑρίσκονται ἀπέναντι ἀλλήλων :

i) Αἱ κορυφαὶ Α καὶ Γ, Β καὶ Δ.

ii) Αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν γωνίαι $\widehat{A}$ καὶ $\widehat{Γ}$, $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{Δ}$.

iii) Αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΓΔ, ΒΓ καὶ ΑΔ.

Αἱ ἀπέναντι κορυφαὶ Α καὶ Γ, Β καὶ Δ ὁρίζουν τὰς δύο διαγωνίους ΑΓ καὶ ΒΔ.



Σχ. 124

Τετράπλευρα ὑπάρχουν κυρτὰ καὶ μὴ κυρτά. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κυρτοῦ τετραπλεύρου εἶναι 4 ὀρθαὶ (§ 106).

Ὅταν ἓν τετράπλευρον εἶναι μὴ κυρτόν, μία τοὐλάχιστον ἀπὸ τὰς εὐθείας ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ πλευραί του τέμνει τὴν ἀπέναντι αὐτῆς πλευρὰν (διατί;). Ἐὰν ἑνὸς μὴ κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (σχ. 124) ἡ εὐθεῖα ΑΒ τέμνῃ

τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς σημεῖον Ε καὶ συμβαίνῃ τὸ Ε νὰ εἶναι σημεῖον τοῦ τμήματος ΑΒ, τότε λέγομεν ὅτι αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΓΔ διασταυροῦνται καὶ τὸ τετράπλευρον καλεῖται **διασταυρούμενον.** Ἐὰν τὸ σημεῖον Ε τῆς εὐθείας ΑΒ δὲν εἶναι σημεῖον τοῦ τμήματος ΑΒ (σχ. 124), τότε αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΓΔ δὲν διασταυροῦνται καὶ τὸ τετράπλευρον καλεῖται **μὴ διασταυρούμενον.**

Τέλος παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὰ κυρτὰ τετράπλευρα αἱ διαγώνιοι εἶναι ἐσωτερικὰ τμήματα τοῦ τετραπλεύρου καὶ τέμνονται, ἐνῷ εἰς τὰ μὴ κυρτὰ δὲν τέμνονται. Εἰς τὰ μὴ κυρτὰ καὶ διασταυρούμενα αἱ διαγώνιοι εἶναι ἐξωτερικὰ τμήματα, ἐνῷ εἰς τὰ μὴ κυρτὰ καὶ μὴ διασταυρούμενα ἡ μία διαγώνιος εἶναι ἐσωτερικὸν καὶ ἡ ἄλλη ἐξωτερικὸν τμῆμα τοῦ τετραπλεύρου. Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ μὴ κυρτοῦ καὶ μὴ διασταυρουμένου τετραπλεύρου (σχ. 124), ἡ ἐσωτερικὴ διαγώνιος τὸ διαιρεῖ εἰς δύο τρίγωνα καὶ κατὰ συνέπειαν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου εἶναι 4^{L}. Δὲν συμβαίνει τὸ ἴδιο καὶ διὰ τὸ διασταυρούμενον τετράπλευρον.

Εἰς τὰ ἑπόμενα λέγοντες «τετράπλευρον» θὰ ἐννοοῦμεν κυρτὸν τετράπλευπλευρον ἐκτὸς ἐὰν γίνῃ ἰδιαίτερα μνεία περὶ μὴ κυρτοῦ τετραπλεύρου.

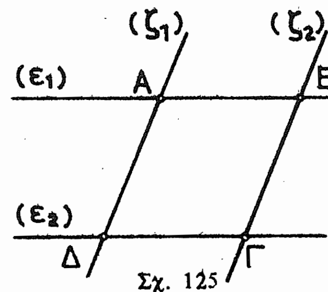
ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΝ

120. Ὁρισμός. Παραλληλόγραμμον καλεῖται τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευράς του παραλλήλους.

Δύο ζεύγη παραλλήλων εὐθειῶν (ε_1) (ε_2) καὶ (ζ_1), (ζ_2) τεμνόμενα ὁρίζουν ἓν παραλληλόγραμμον (σχ. 125). Ἓν παραλληλόγραμμον εἶναι πάντοτε κυρτόν.

121. Θεώρημα. Ἓν κυρτὸν τετράπλευρον διὰ νὰ εἶναι παραλληλόγραμμον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχῃ τὰς προσκειμένας εἰς δύο διαδοχικὰς πλευρὰς γωνίας παραπληρωματικάς.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι $\widehat{A} + \widehat{B} = 2^{L}$, $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 2^{L}$ (σχ. 125). Τότε, ἐκ τῆς πρώτης τῶν ἀνωτέρω σχέσεων ἕπεται ὅτι ΑΔ//ΒΓ, ὡς σχηματίζουσαι μετὰ τῆς τεμνούσης ΑΒ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας παραπληρωματικάς, ὁμοίως δὲ ἐκ τῆς δευτέρας τῶν ἄνω σχέσεων ἕπεται ὅτι ΑΒ//ΓΔ. Ἄρα κατὰ τὸν ὁρισμόν, τὸ ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον.



Σχ. 125

Ἀντιστρόφως. Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ προσκείμεναι εἰς δύο διαδοχικὰς πλευρὰς γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.

Πράγματι, εἶναι $\widehat{A} + \widehat{B} = 2^{L}$ ὡς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΑΔ καὶ ΒΓ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΒ. Ὁμοίως εἶναι $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 2^{L}$.

122. Θεώρημα. Ἓν κυρτὸν τετράπλευρον, διὰ νὰ εἶναι παραλληλόγραμμον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχῃ τὰς ἀπέναντι αὐτοῦ γωνίας ἴσας.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τὸ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 125) διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι :

$$(1) \qquad \widehat{A} = \widehat{\Gamma} \ \text{καὶ} \ \widehat{B} = \widehat{\Delta}$$

Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta} = 4^L$, ἐφ' ὅσον τοῦτο εἶναι κυρτὸν τετράπλευρον. Τότε ἡ τελευταία, λόγῳ τῶν σχέσεων (1), γράφεται :

$$2\widehat{A} + 2\widehat{B} = 4^L \Rightarrow$$

$$(2) \qquad \widehat{A} + \widehat{B} = 2^L$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι :

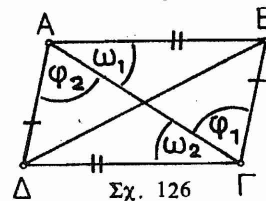
$$(3) \qquad \widehat{A} + \widehat{\Delta} = 2^L$$

Τότε, ἐκ τῶν (2), (3) καὶ δυνάμει τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, ἕπεται ὅτι τὸ ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, θὰ εἶναι $\widehat{A} + \widehat{B} = 2^L$ καὶ $\widehat{A} + \widehat{\Delta} = 2^L$. Ἐξ αὐτῶν ἕπεται ὅτι $\widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{A} + \widehat{\Delta} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{\Delta}$.

Ὁμοίως θὰ εἶναι καὶ $\widehat{A} + \widehat{B} = 2^L$ καὶ $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 2^L$ ἐκ τῶν ὁποίων ἕπεται ὅτι $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$. Ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ ἔχει τὰς ἀπέναντι γωνίας του ἴσας.

123. Θεώρημα. Ἓν κυρτὸν τετράπλευρον διὰ νὰ εἶναι παραλληλόγραμμον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχῃ τὰς ἀπέναντι πλευράς του ἴσας.



Σχ. 126

Ἀπόδειξις. Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ΑΒ = ΓΔ καὶ ΑΔ = ΒΓ (σχ. 126). Ἡ διαγώνιος ΑΓ χωρίζει τὸ τετράπλευρον εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ, τὰ ὁποῖα ἔχουν ΑΒ = ΓΔ, ΒΓ = ΑΔ καὶ τὴν ΑΓ κοινήν. Ἄρα εἶναι ἴσα (Π - Π - Π), ἑπομένως :

$$A\widehat{B}\Gamma = A\widehat{\Delta}\Gamma$$

Φέροντες καὶ τὴν διαγώνιον ΒΔ, ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι τριγ. ΑΒΔ = τριγ. ΓΒΔ ἄρα $B\widehat{A}\Delta = B\widehat{\Gamma}\Delta$. Τότε αὐτό, δυνάμει τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, εἶναι παραλληλόγραμμον, ὡς ἔχον τὰς ἀπέναντι γωνίας του ἴσας.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Θὰ δείξωμεν ὅτι ΑΒ = ΓΔ καὶ ΒΓ = ΑΔ. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΓΔΑ ἔχουν τὴν πλευρὰν ΑΓ κοινὴν καὶ τὰς γωνίας $\omega_1 = \omega_2$ καὶ $\varphi_1 = \varphi_2$, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλ-

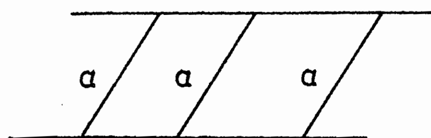
λήλων ΑΒ//ΓΔ καὶ ΒΓ//ΑΔ ἀντιστοίχως τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΓ. Ἄρα τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα (Γ - Π - Γ). Ἑπομένως ΑΒ = ΓΔ καὶ ΒΓ = ΑΔ.

Πόρισμα I. Ἑκάστη διαγώνιος παραλληλογράμμου χωρίζει αὐτὸ εἰς δύο ἴσα τρίγωνα.

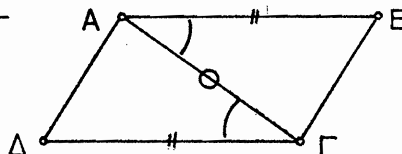
Πόρισμα II. Παράλληλα τμήματα ἔχοντα τὰ ἄκρα αὐτῶν ἐπὶ δύο παραλλήλων εὐθειῶν εἶναι ἴσα (σχ. 127).

124. Θεώρημα. Ἐὰν ἓν κυρτὸν τετράπλευρον ἔχῃ δύο ἀπέναντι πλευράς του ἴσας καὶ παραλλήλους, εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἀπόδειξις. Ἔστω κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 128) τοῦ ὁποίου θεωροῦμεν τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΓΔ ἴσας καὶ παραλλήλους. Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΑΓ, ἡ ὁποία χωρίζει τοῦτο εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΓΔΑ, τὰ ὁποῖα



Σχ. 127

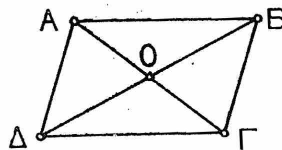


Σχ. 128

ἔχουν δύο πλευρὰς ἀντιστοίχως ἴσας ΑΓ = ΑΓ, ΑΒ = ΓΔ καὶ τὴν περιεχομένην ὑπ' αὐτῶν γωνίαν ἴσην λόγῳ τῶν ΑΒ//ΓΔ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΓ. Ἄρα εἶναι ἴσα (Π - Γ - Π), ἑπομένως θὰ εἶναι καὶ ΑΔ = ΒΓ. Ἤδη τὸ τετράπλευρον ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευράς του ἀνὰ δύο ἴσας. Ἄρα (§ 123) εἶναι παραλληλόγραμμον.

125. Θεώρημα. Ἓν κυρτὸν τετράπλευρον, διὰ νὰ εἶναι παραλληλόγραμμον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ διαγώνιοί του νὰ διχοτομοῦνται.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τὸ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 129), τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι τεμνόμεναι εἰς τὸ σημεῖον Ο διχοτομοῦνται, ἤτοι εἶναι ΟΑ = ΟΓ καὶ ΟΒ = ΟΔ. Τότε τὰ τρίγωνα ΑΟΒ καὶ ΓΟΔ, ὡς ἔχοντα δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν περιεχομένην ὑπ' αὐτῶν γωνίαν ἴσην, ὡς κατὰ κορυφήν, εἶναι ἴσα (Π - Γ - Π). Ἑπομένως ΑΒ = ΓΔ.' Ἐπὶ πλέον εἶναι ΑΒ//ΓΔ, διότι αὗται τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΑΓ σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας. Ἄρα, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα τὸ ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον.



Σχ. 129

Ἀντιστρόφως. Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ τέμνονται εἰς τὸ Ο. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ μέσον ἑκάστης.

Πράγματι, τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα ΑΟΒ καὶ ΓΟΔ εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα τὰς πλευράς των ΑΒ καὶ ΓΔ ἴσας καὶ τὰς προσκειμένας αὐτῶν γωνίας ἀνὰ δύο ἴσας λόγῳ τῶν παραλλήλων ΑΒ//ΓΔ τεμνομένων ὑπὸ τῶν ΑΓ καὶ ΒΔ

ἀντιστοίχως. Ἑπομένως θὰ εἶναι ΟΑ = ΟΓ καὶ ΟΒ = ΟΔ, ἤτοι αἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου διχοτομοῦνται.

126. Κέντρον συμμετρίας παραλληλογράμμου.

Θεώρημα. Τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων παραλληλογράμμου εἶναι κέντρον συμμετρίας αὐτοῦ.

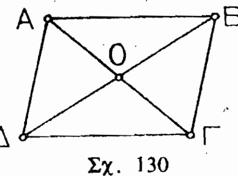
Ἀπόδειξις. Ἔστω παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 130) καὶ Ο τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων του. Ἐπειδὴ τὸ Ο εἶναι μέσον ἑκάστης τῶν διαγωνίων (§ 125), δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὰς ἀκολούθους ἀπεικονίσεις κεντρικῆς συμμετρίας ὡς πρὸς κέντρον τὸ Ο :

$$\left.\begin{array}{l} Α \longleftrightarrow Γ \\ Β \longleftrightarrow Δ \\ Γ \longleftrightarrow Α \\ Δ \longleftrightarrow Β \end{array}\right\} \Rightarrow ΑΒΓΔ \longleftrightarrow ΓΔΑΒ$$

Ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ ἀπεικονίζεται εἰς ἑαυτὸ μέσῳ κεντρικῆς συμμετρίας ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων του Ο, ἤτοι τὸ Ο εἶναι κέντρον συμμετρίας τοῦ παραλληλογράμμου.

127. Θεώρημα. (ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου). Ἐὰν ἓν τετράπλευρον ἔχει κέντρον συμμετρίας, εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 130) μὲ κέντρον συμμετρίας σημεῖον Ο. Ἡ πλευρὰ ΑΒ, μέσῳ τῆς συμμετρίας κέντρου Ο, ἀπεικονίζεται ὁπωσδήποτε ἐπὶ τῆς ΓΔ, διότι μετὰ τῶν ΑΔ καὶ ΒΓ ἔχει κοινὰ σημεῖα (§ 82). Τότε, λόγῳ τῆς κεντρικῆς συμμετρίας, θὰ εἶναι ΑΒ = ΓΔ καὶ ΑΒ//ΓΔ ⇒ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον (§ 124).



Σχ. 130

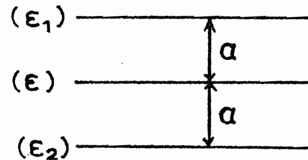
Σημείωσις. Τὸ κέντρον συμμετρίας Ο καλεῖται ἁπλῶς **κέντρον** τοῦ παραλληλογράμμου ἢ καὶ κέντρον βάρους αὐτοῦ. Ὁ ὅρος αὐτὸς ἔχει ληφθῆ ἀπὸ τὴν φυσικὴν διότι τὸ κέντρον τοῦ παραλληλογράμμου συμπίπτει μὲ τὸ κέντρον βάρους ὑλικῆς πλακὸς ἐξ ὁμογενοῦς ὑλικοῦ, σχήματος παραλληλογράμμου.

128. Ἀπόστασις δύο παραλλήλων εὐθειῶν καλεῖται τὸ μῆκος εὐθυγράμμου τμήματος καθέτου πρὸς αὐτὰς καὶ ἔχοντος τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν παραλλήλων.

129. Μεσοπαράλληλος δύο παραλλήλων εὐθειῶν ($ε_1$) καὶ ($ε_2$) καλεῖται

μία εὐθεῖα (ε) παράλληλος πρὸς αὐτὰς καὶ ἀπέχουσα ἴσας ἀποστάσεις ἀπ' αὐτάς (σχ. 131).

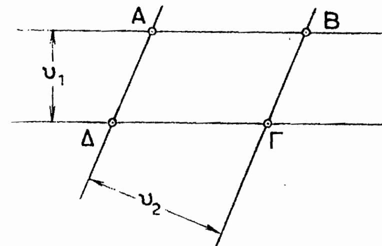
Ἡ μεσοπαράλληλος δύο παραλλήλων εὐθειῶν εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς ζώνης τὴν ὁποίαν ὁρίζουν αὗται.



Σχ. 131

130. Βάσις παραλληλογράμμου δύναται νὰ λέγεται οἱαδήποτε πλευρά του.

131. Ὕψος παραλληλογράμμου καλεῖται ἡ ἀπόστασις δύο παραλλήλων πλευρῶν του. Ἄρα κάθε παραλληλόγραμμον ἔχει δύο ὕψη $υ_1$ καὶ $υ_2$ (σχ. 132).



Σχ. 132

132. Σύνοψις τῶν ἰδιοτήτων τῶν παραλληλογράμμων.

Κάθε παραλληλόγραμμον ἔχει τὰς κάτωθι ἰδιότητας :

i) Αἱ ἀπέναντι αὐτοῦ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι.

ii) Αἱ γωνίαι αἱ προσκείμεναι εἰς ἑκάστην πλευρὰν εἶναι παραπληρωματικαί.

iii) Αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ἴσαι.

iv) Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι.

v) Αἱ διαγώνιοι διχοτομοῦνται.

vi) Τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων του εἶναι κέντρον συμμετρίας αὐτοῦ.

Αἱ προηγούμεναι ἰδιότητες δύνανται νὰ χρησιμεύσουν καὶ ὡς γνωρίσματα τῶν παραλληλογράμμων. Ἂν δηλαδὴ ἀνακαλύψωμεν ὅτι εἰς ἓν τετράπλευρον ἰσχύει μία ἐξ αὐτῶν, τότε τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

130. Αἱ διχοτόμοι τῶν ἀπέναντι γωνιῶν παραλληλογράμμου εἶναι παράλληλοι, ἐνῷ αἱ διχοτόμοι τῶν προσκειμένων γωνιῶν του εἶναι κάθετοι.

131. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Ἀπὸ σημεῖον Δ τῆς ΒΓ ἄγομεν παραλλήλους πρὸς τὰς δύο ἄλλας πλευράς του, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ἐκ τοῦ Α παράλληλον τῆς ΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Δείξατε ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἴσα.

132. Εἰς πᾶν παραλληλόγραμμον δείξατε ὅτι ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος εἶναι ἡ ἔχουσα ὡς ἄκρα τὰς κορυφὰς τῶν μικροτέρων γωνιῶν.

133. Εἰς παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ συνδέομεν δι' εὐθυγράμμων τμημάτων τὰ μέσα

Ε καὶ Ζ δύο ἀπέναντι πλευρῶν του, ἕκαστον μὲ τὰς δύο ἀπέναντι κορυφάς. Δείξατε ὅτι τὰ τέσσαρα τμήματα τεμνόμενα σχηματίζουν παραλληλόγραμμον.

134. Τὰ μέσα τῶν τεσσάρων τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ κέντρον ἑνὸς παραλληλογράμμου χωρίζει τὰς δύο διαγωνίους του, εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου μὲ τὸ αὐτὸ κέντρον.

135. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὰς διαμέσους ΑΔ καὶ ΒΕ καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων αὐτῶν λαμβάνομεν τμήματα ΔΗ = ΔΑ, ΕΖ = ΕΒ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι τὰ σημεῖα Η, Γ, Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ ὅτι τὸ Γ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΗΖ.

136. 'Από τὸ κέντρον Ο παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρομεν εὐθεῖαν (δ), ἡ ὁποία τέμνει τὰς δύο ἀπέναντι πλευρὰς ΑΒ, ΓΔ τοῦ παραλληλογράμμου εἰς τὰ Ε καὶ Ζ. Δείξατε ὅτι τὸ ΑΕΓΖ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Β'.

137. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἔστω ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A}$ αὐτοῦ. 'Εκ τοῦ Δ ἄγομεν παράλληλον τῆς ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε καὶ ἐκ τοῦ Ε παράλληλον τῆς ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ζ. Δείξατε ὅτι εἶναι ΑΕ = ΒΖ.

138. "Εστω ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) καὶ Μ τυχὸν σημεῖον τῆς πλευρᾶς ΒΓ. 'Εκ τοῦ Μ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς ἴσας πλευρὰς τοῦ τριγώνου, ἑκάστη τῶν ὁποίων τέμνει τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς τὰ Δ καὶ Ε. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα ΜΔ + ΜΕ παραμένει σταθερόν.

139. Παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ προεκτείνομεν τὰς πλευράς του κατὰ κυκλικὴν σειρὰν καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λαμβάνομεν τμήματα ΒΑ′ = ΒΑ, ΓΒ′ = ΓΒ, ΔΓ′ = ΔΓ, ΑΔ′ = ΑΔ. Δείξατε ὅτι :

α) τὸ τετράπλευρον Α′Β′Γ′Δ′ εἶναι παραλληλόγραμμον,

β) τὰ κέντρα τῶν δύο παραλληλογράμμων συμπίπτουν.

140. 'Από σημεῖον Δ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ ἄγομεν παραλλήλους πρὸς τὰς ἄλλας πλευράς του, αἱ ὁποῖαι τὰς τέμνουν εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. 'Εὰν $\beta > \gamma$, δείξατε ὅτι ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ΕΔΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γ καὶ μικροτέρα τῆς β.

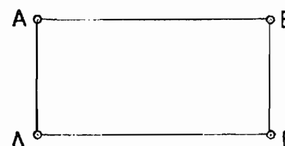
141. 'Εὰν κυρτοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ αἱ ἀπέναντι γωνία εἶναι ἴσαι, ἤτοι $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$, $\widehat{B} = \widehat{E}$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{Z}$, δείξατε ὅτι αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι, ἤτοι ΑΒ//ΔΕ, ΒΓ//ΕΖ, ΓΔ//ΖΑ.

ΕΙΔΙΚΑ ΤΙΝΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

133. 'Ορθογώνιον καλεῖται τὸ τετράπλευρον τὸ ὁποῖον ἔχει ὅλας τὰς γωνίας του ὀρθάς.

134. Θεώρημα. 'Εὰν τετραπλεύρου ὅλαι αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι, τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.

'Απόδειξις. Πράγματι, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κάθε τετραπλεύρου εἶναι τέσσαρες ὀρθαὶ γωνίαι καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὅλαι ἴσαι μεταξύ των, ἔπεται ὅτι ἑκάστη εἶναι ὀρθή. "Αρα τὸ τετράπλευρον εἶναι ὀρθογώνιον (σχ. 133).



Σχ. 133

135. Θεώρημα. Τὸ ὀρθογώνιον εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἀπόδειξις. Πράγματι, ἐφ' ὅσον αἱ προσκείμεναι εἰς ἑκάστην πλευρὰν γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαὶ (§ 121) τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον. Καλεῖται δὲ καὶ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον.

136. Θεώρημα. Ἐὰν ἓν παραλληλόγραμμον ἔχῃ μίαν γωνίαν ὀρθήν, εἶναι ὀρθογώνιον.

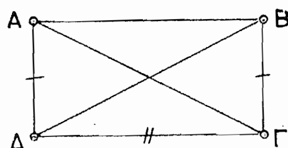
Ἀπόδειξις. Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον ἔχει $\widehat{A} = 1^{L}$ (σχ. 133). Τότε θὰ ἔχῃ καὶ $\widehat{B} = \widehat{\Delta} = 1^{L}$, ὡς παραπληρωματικαὶ τῆς $\widehat{A}$ (§ 121), ὡς ἐπίσης καὶ $\widehat{\Gamma} = 1^{L}$, ὡς ἴση πρὸς τὴν $\widehat{A}$ (§ 122). Ἄρα τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.

137. Θεώρημα. Τὸ ὀρθογώνιον ἔχει ἴσας διαγωνίους.

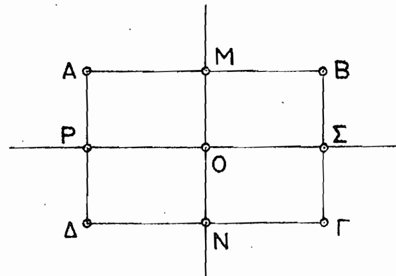
Ἀπόδειξις. Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ καὶ ΑΓ, ΒΔ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ (σχ. 134). Τὰ τρίγωνα ΑΔΓ καὶ ΒΓΔ εἶναι ὀρθογώνια, ἔχουν ΑΔ = ΒΓ, ὡς ἀπέναντι πλευρὰς ὀρθογωνίου καὶ τὴν ΔΓ κοινήν, ἄρα εἶναι ἴσα. Τότε θὰ εἶναι καὶ ΑΓ = ΒΔ.

138. Θεώρημα. Ἐὰν ἓν παραλληλόγραμμον ἔχῃ τὰς διαγωνίους του ἴσας, εἶναι ὀρθογώνιον.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 134). μὲ ΑΓ = ΒΔ. Τὰ τρίγωνα ΑΓΔ καὶ ΒΔΓ ἔχουν τότε καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς των ἴσας, ἄρα εἶναι ἴσα. Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν $A\widehat{\Delta}\Gamma = B\widehat{\Gamma}\Delta$. Ἀλλὰ αἱ γωνίαι αὗται εἶναι καὶ παραπληρωματικαί, ὡς προσκείμεναι τῆς πλευρᾶς ΓΔ τοῦ παραλληλογράμμου, συνεπῶς εἶναι ὀρθαί. Ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ὀρθογώνιον.



Σχ. 134



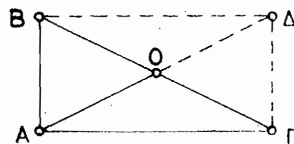
Σχ. 135

139. Ἄξονες συμμετρίας τοῦ ὀρθογωνίου. Εἰς ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ (σχ. 135), ἐὰν φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν τὴν ὁριζομένην ἀπὸ τὰ μέσα Μ καὶ Ν τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν του ΑΒ καὶ ΓΔ, αὕτη θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς ΑΔ καὶ

ΒΓ καὶ κάθετος πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ, διότι τὸ σχηματιζόμενον τετράπλευρον ΑΜΝΔ εἶναι ὀρθογώνιον, ὡς ἔχον ΑΜ // = ΔΝ καὶ τὴν γωνίαν $\widehat{A}$ ὀρθήν. Ἑπομένως ἡ εὐθεῖα ΜΝ εἶναι κοινὴ μεσοκάθετος τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, ἄρα εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος. Ἐπίσης ἡ ΡΣ, ἡ ὁριζομένη ἀπὸ τὰ μέσα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου, εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος. Ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ἔχει δύο ἄξονας συμμετρίας καθέτους.

140. Θεώρημα. Ἡ διάμεσος ὀρθογωνίου τριγώνου ποὺ ἄγεται ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας, εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης, καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 136) καὶ ΑΟ ἡ διάμεσος αὐτοῦ ἐκ τῆς κορυφῆς Α τῆς ὀρθῆς γωνίας. Εἰς τὴν προέκτασιν αὐτῆς λαμβάνομεν σημεῖον Δ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι ΟΑ = ΟΔ. Ἄρα :



Σχ. 136

(1) $2 \cdot OA = A\Delta$

Τὸ τετράπλευρον ΑΒΔΓ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦνται καὶ μάλιστα εἶναι ὀρθογώνιον, διότι ἔχει $\widehat{A} = 1^{L}$. Ἑπομένως αἱ διαγώνιοί του θὰ εἶναι ἴσαι, ἤτοι :

(2) $A\Delta = B\Gamma$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $2 \cdot OA = B\Gamma$ ἢ $OA = \frac{B\Gamma}{2}$.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω ὅτι ἡ διάμεσος ΑΟ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΒΓ.

Εἰς τὴν προέκτασιν τῆς ΑΟ λαμβάνομεν σημεῖον Δ οὕτως, ὥστε ΟΑ = ΟΔ. Τὸ σχηματιζόμενον τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦνται. Ἐξ ὑποθέσεως δὲ εἶναι $OA = \frac{B\Gamma}{2} \Rightarrow 2 \cdot OA = B\Gamma$ ἢ $A\Delta = B\Gamma$. Ἄρα, ἐφ' ὅσον ἔχει καὶ διαγωνίους ἴσας, εἶναι ὀρθογώνιον, ἑπομένως $\widehat{A} = 1^{L}$, ἤτοι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον.

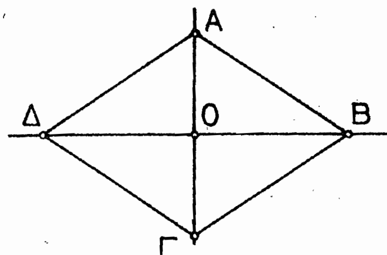
141. Ρόμβος καλεῖται τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὅλας τὰς πλευράς του ἴσας.

Ὁ ρόμβος εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρά του ἴσας.

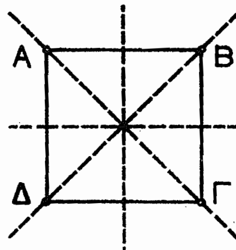
Πόρισμα. Τὸ παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον ἔχει δύο διαδοχικὰς πλευρὰς ἴσας, εἶναι ρόμβος.

142. Θεώρημα. Αἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου εἶναι κάθετοι.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὁ ρόμβος ΑΒΓΔ (σχ. 137). Τὸ σημεῖον Α ἰσαπέχει ἐκ τῶν Β καὶ Δ, ἐφ' ὅσον εἶναι ΑΒ = ΑΔ, ὡς πλευραὶ ρόμβου. Τότε τὸ σημεῖον Α ἀνήκει εἰς τὴν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος ΒΔ. Ὁμοίως τὸ σημεῖον Γ ἀνήκει εἰς τὴν μεσοκάθετον τοῦ ΒΔ. Ἑπομένως ἡ ΑΓ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΒΔ. Ἄρα ΑΓ⊥ΒΔ.



Σχ. 137



Σχ. 138

143. Θεώρημα (ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου). Ἐὰν αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου εἶναι κάθετοι, τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ρόμβος.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 137), τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ τέμνονται εἰς τὸ Ο καὶ εἶναι κάθετοι μεταξύ των. Τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ἔχει τὸ τμῆμα ΑΟ ὕψος καὶ διάμεσον. Ἄρα τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές, ἤτοι ΑΒ = ΑΔ. Τότε τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος (§ 141 πόρισμα).

Πόρισμα Ι. Αἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου εἶναι ἄξονες συμμετρίας τοῦ σχήματος.

Πόρισμα ΙΙ. Ἐὰν κυρτοῦ τετραπλεύρου αἱ διαγώνιοι εἶναι ἄξονες συμμετρίας αὐτοῦ, τὸ τετράπλευρον εἶναι ρόμβος.

144. Θεώρημα. Αἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου διχοτομοῦν τὰς γωνίας του.

Ἀπόδειξις. Τοῦτο ἕπεται ἐκ τοῦ ὅτι αἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου εἶναι ἄξονες συμμετρίας τοῦ σχήματος.

145. Θεώρημα (ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου). Ἐὰν αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου διχοτομοῦν τὰς γωνίας του, τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ρόμβος.

Ἀπόδειξις. Ἔστω παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 137), τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ διχοτομοῦν τὰς γωνίας του. Τότε τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, ἐφ' ὅσον ἔχει τὸ τμῆμα ΑΟ ὡς διάμεσον καὶ διχοτόμον, εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ ΑΒ = ΑΔ. Ἄρα τὸ ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος (§ 141 πόρισμα).

146. Τετράγωνον καλεῖται τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὅλας τὰς γωνίας του ὀρθὰς καὶ ὅλας τὰς πλευράς του ἴσας (σχ. 138).

Πόρισμα Ι. Τὸ τετράγωνον εἶναι ἕνας ὀρθογώνιος ρόμβος.

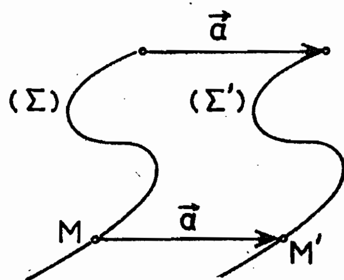
Πόρισμα II. Ἕνα παραλληλόγραμμον διὰ νὰ εἶναι τετράγωνον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ διαγώνιοί του νὰ εἶναι ἴσαι καὶ νὰ τέμνωνται καθέτως.

Πόρισμα III. Τὸ τετράγωνον, ὡς ὀρθογώνιον μὲν ἔχει δύο ἄξονας συμμετρίας, τὰς μεσοκαθέτους τῶν πλευρῶν του, ὡς ρόμβος δὲ ἔχει δύο ἄξονας συμμετρίας, τὰς εὐθείας τῶν διαγωνίων του. Ἄρα τὸ τετράγωνον ἔχει τέσσαρας ἄξονας συμμετρίας (σχ. 138).

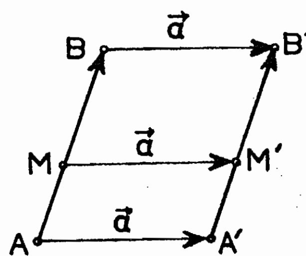
Πόρισμα IV. Αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραγώνου σχηματίζουν μὲ τὰς πλευράς του γωνίας 45°.

147. Παράλληλος μεταφορά. Παράλληλος μεταφορὰ σχήματος (Σ) καλεῖται ἡ ἀπεικόνισις αὐτοῦ εἰς σχῆμα (Σ′) διὰ τοῦ ἑξῆς νόμου ἀπεικονίσεως :

Κάθε σημεῖον Μ τοῦ σχήματος (Σ) ἀπεικονίζεται εἰς σημεῖον Μ′ τοῦ σχήματος (Σ′) διὰ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμένου τμήματος $\vec{\alpha}$, ἤτοι $\overrightarrow{MM'} = \vec{\alpha}$ (σχ. 139). Τὸ προσανατολισμένον τμῆμα $\vec{\alpha}$ καλεῖται **δείκτης** τῆς μεταφορᾶς.



Σχ. 139



Σχ. 140

148. Θεώρημα. Τυχὸν προσανατολισμένον τμῆμα $\overrightarrow{AB}$, ἀπεικονίζεται διὰ παραλλήλου μεταφορᾶς εἰς ἴσον προσανατολισμένον τμῆμα $\overrightarrow{A'B'}$.

Ἀπόδειξις. Ἔστω $\vec{\alpha}$ ὁ δείκτης τῆς μεταφορᾶς. Ἀπεικονίζομεν τὰ ἄκρα Α καὶ Β τοῦ προσανατολισμένου τμήματος $\overrightarrow{AB}$ κατὰ τὸν δείκτην $\vec{\alpha}$ εἰς τὰ Α′ καὶ Β′ ἀντιστοίχως, ἤτοι $\overrightarrow{AA'} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{BB'} = \vec{\alpha}$ (σχ. 140). Ἐξ αὐτῶν ἕπεται ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΑ′Β′Β εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \vec{\alpha}$ $\Rightarrow AA' \uparrow\uparrow = BB'$. Ἄρα εἶναι καὶ $AB \uparrow\uparrow = A'B' \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

Πρέπει ἀκόμη νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ $\overrightarrow{AB}$ ἀπεικονίζεται εἰς σημεῖον Μ′ τοῦ $\overrightarrow{A'B'}$ καὶ ἀντιστρόφως. Πράγματι, ἐὰν ἐκ τυχόντος σημείου Μ τοῦ $\overrightarrow{AB}$ φέρωμεν εὐθεῖαν ΜΜ′//ΑΑ′, ὅπου τὸ Μ′ εἶναι ἐπὶ τοῦ Α′Β′. Τὸ τετράπλευρον ΑΑ′Μ′Μ εἶναι παραλληλόγραμμον, ὡς ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευράς του παραλλήλους. Ἄρα θὰ εἶναι $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'} = \vec{\alpha}$, ἤτοι τὸ

Μ' εἶναι ἡ εἰκὼν τοῦ σημείου Μ κατὰ τὴν μεταφορὰν δείκτου $\vec{\alpha}$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ τὸ ἀντίστροφον, ἤτοι τυχὸν σημεῖον Μ' τοῦ $\overrightarrow{A'B'}$ ἔχει ὡς πρότυπον ἓν σημεῖον Μ τοῦ $\overrightarrow{AB}$ κατὰ τὴν μεταφορὰν δείκτου $\vec{\alpha}$.

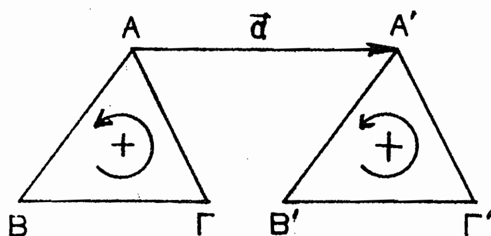
Ἀναφερόμενοι καὶ εἰς μὴ προσανατολισμένα τμήματα, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ παράλληλος μεταφορὰ τὰ ἀπεικονίζει εἰς παράλληλα καὶ ἴσα.

Πόρισμα I. Κάθε τρίγωνον ἀπεικονίζεται διὰ παραλλήλου μεταφορᾶς εἰς ἴσον τρίγωνον καὶ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ (φορᾶς διαγραφῆς).

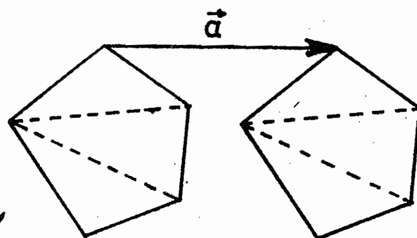
Πράγματι, ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἀπεικονίζεται διὰ τοῦ δείκτου μεταφορᾶς $\vec{\alpha}$ εἰς ἴσον τρίγωνον Α'Β'Γ' καὶ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ (σχ. 141), διότι τὰ δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς πλευράς των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ.

Πόρισμα II. Κάθε πολύγωνον ἀπεικονίζεται διὰ παραλλήλου μεταφορᾶς εἰς ἴσον πολύγωνον καὶ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ.

Πράγματι αὐτὸ συμβαίνει, διότι τὰ δύο πολύγωνα δύνανται νὰ διαιρεθοῦν εἰς ἴσα καὶ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ τρίγωνα (σχ. 142).



Σχ. 141



Σχ. 142

Τὰ ἀνωτέρω δύνανται νὰ γενικευθοῦν δι' οἱονδήποτε σχῆμα (Σ), τὸ ὁποῖον ἀπεικονίζεται διὰ παραλλήλου μεταφορᾶς εἰς ἴσον καὶ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ σχῆμα (Σ'). Κατὰ συνέπειαν ἡ παράλληλος μεταφορὰ εἶναι μετατόπισις καὶ ὡς ἐκ τούτου δύναται νὰ λέγεται καὶ **παράλληλος μετατόπισις.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

142. Δίδονται δύο εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) τεμνόμεναι εἰς τὸ Ο. Ἀπὸ σημεῖον Α τῆς (ε_1) φέρομεν καθέτους ΑΒ καὶ ΑΓ πρὸς τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν δύο εὐθειῶν. Δείξατε ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΟΓ εἶναι ὀρθογώνιον, ἡ δὲ ΒΓ εἶναι παράλληλος τῆς (ε_2).

143. Δίδεται γωνία $\widehat{xOy}$ καὶ σημεῖον Α ἐντὸς αὐτῆς. Φέρομεν $AB \perp Ox$, $A\Gamma \perp Oy$ καὶ ἐκ τοῦ μέσου Μ τοῦ τμήματος ΟΑ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ. Δείξατε ὅτι ἡ κάθετος αὕτη διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τοῦ τμήματος ΒΓ.

144. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1^{L}$) φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ. Ἐὰν Ε καὶ Ζ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ, δείξατε ὅτι $\widehat{E\Delta Z} = 1^{L}$.

145. Ἀπὸ σημεῖον Μ τῆς διχοτόμου γωνίας $\widehat{xOy}$ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευράς της, αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν ἐπ' αὐτῶν τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Δείξατε ὅτι τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΟΜ τέμνονται καθέτως καὶ ἀλληλοδιχοτομοῦνται.

146. Συνδέομεν τυχὸν σημεῖον Μ τῆς διαγωνίου ΑΓ ρόμβου ΑΒΓΔ μὲ τὰς κορυφὰς του Β καὶ Δ. Δείξατε ὅτι ὁ ρόμβος ἔχει χωρισθῆ εἰς δύο ζεύγη ἴσων τριγώνων.

147. Τετραγώνου ΑΒΓΔ προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΒΓ. Εἰς τὴν προέκτασιν τῆς ΑΒ καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β λαμβάνομεν σημεῖον Μ, εἰς δὲ τὴν προέκτασιν τῆς ΒΓ καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Γ λαμβάνομεν σημεῖον Ν τοιοῦτον, ὥστε ΓΝ=ΑΜ. Κατασκευάζομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΜΔΝΕ. Δείξατε ὅτι τοῦτο εἶναι τετράγωνον.

148. Δείξατε ὅτι τὰ ὕψη ρόμβου εἶναι ἴσα καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν παραλληλόγραμμον ἔχῃ ἴσα ὕψη εἶναι ρόμβος.

149. Δείξατε ὅτι εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἡ διχοτόμος τῆς ὀρθῆς γωνίας διχοτομεῖ καὶ τὴν γωνίαν τοῦ ὕψους καὶ τῆς διαμέσου ποὺ ἄγονται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας.

150. Ἐὰν παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ εἶναι ΑΒ = 2.ΒΓ καὶ Ε εἶναι τὸ μέσον τῆς ΓΔ, δείξατε ὅτι $\widehat{AEB} = 1^{L}$.

Β'.

151. Ἡ κάθετος ποὺ ἄγεται ἐκ τυχόντος σημείου Δ τῆς βάσεως ΒΓ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) ἐπ' αὐτήν, τέμνει τὴν μίαν πλευρὰν καὶ τὴν προέκτασιν τῆς ἄλλης εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα ΔΕ + ΔΖ εἶναι σταθερόν.

152. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1^{L}$) φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ καὶ ἐκ τοῦ Δ τὰς καθέτους ΔΕ καὶ ΔΖ ἐπὶ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Δείξατε ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάμεσον ΑΜ τοῦ τριγώνου.

153. Ἔστω ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) καὶ Μ τυχὸν σημεῖον τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Ἐκ τοῦ Μ φέρομεν καθέτους ΜΕ καὶ ΜΖ ἐπὶ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα ΜΕ + ΜΖ παραμένει σταθερόν.

154. Τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τὰ ὕψη ΒΔ καὶ ΓΕ. Δείξατε ὅτι ΔΕ<ΒΓ.

155. Ἐὰν Ο εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ, δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου εἶναι σταθερόν.

156. Τὰ τμήματα ποὺ ἄγονται ἀπὸ τυχὸν σημεῖον τῆς βάσεως ΒΓ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) καὶ τέμνουν τὰς ἴσας πλευράς του ὑπὸ τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν γωνίαν, ἔχουν ἄθροισμα σταθερόν.

157. Δίδονται δύο ἐφεξῆς γωνίαι $\widehat{xOy}$, $\widehat{yOz}$ ἑκάστη 60^0 καὶ Μ τυχὸν σημεῖον ἐσωτερικὸν τῆς $\widehat{xOy}$. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τοῦ Μ ἀπὸ τὰς Οx, καὶ Οy εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀπόστασιν τοῦ Μ ἀπὸ τὴν Οz.

158. Ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ φέρομεν ΑΑ'⊥ΒΔ καὶ ΓΓ'⊥ΒΔ. Ἐὰν Ε καὶ Ζ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΒΓ ἀντιστοίχως, δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι Α'Ε καὶ Γ'Ζ τέμνονται ὀρθογωνίως.

159. Δείξατε ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν παραλληλογράμμου τεμνόμεναι σχηματίζουν ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ παραλληλογράμμου. Πότε τοῦτο εἶναι τετράγωνον;

160. Ἐὰν Ε καὶ Ζ εἶναι σημεῖα τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ ἀντιστοίχως ρόμβου ΑΒΓΔ, αἱ εὐθεῖαι ΕΒ, ΕΔ, ΖΑ, ΖΓ τεμνόμεναι σχηματίζουν κυρτὸν τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.

ΤΡΑΠΕΖΙΟΝ

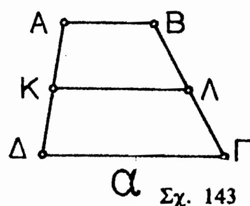
149. Ὁρισμός. Κάθε τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ δύο μόνον ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι, λέγεται τραπέζιον.

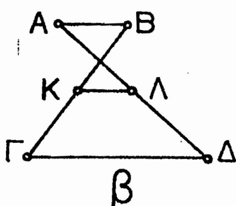
Ἕν τραπέζιον ΑΒΓΔ εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι κυρτὸν (σχ. 143α) ἢ καὶ μὴ κυρτὸν (σχ. 143β).

Αἱ παράλληλοι πλευραὶ ΑΒ καὶ ΓΔ τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ λέγονται **βάσεις** αὐτοῦ καὶ ἡ ἀπόστασίς των, **ὕψος** τοῦ τραπεζίου.

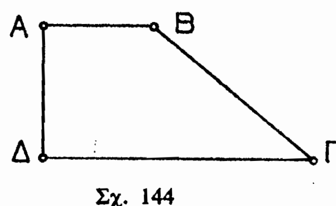
Διάμεσος τραπεζίου λέγεται τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΚΛ μὲ ἄκρα τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του.

150. Θεώρημα. Παντὸς κυρτοῦ τραπεζίου, αἱ γωνίαι αἱ προσκείμεναι εἰς ἑκάστην τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν, εἶναι παραπληρωματικαί





Σχ. 143



Σχ. 144

Ἀπόδειξις. Ἔστω κυρτὸν τραπέζιον ΑΒΓΔ μὲ ΑΒ//ΓΔ. (σχ. 143α). Ἡ πλευρὰ ΑΔ, ὡς τέμνουσα τὰς παραλλήλους ΑΒ καὶ ΓΔ, θὰ σχηματίζῃ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας παραπληρωματικάς. Ἄρα θὰ εἶναι $\widehat{Α} + \widehat{Δ} = 2^{L}$. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὰς γωνίας $\widehat{Β}$ καὶ $\widehat{Γ}$, ἤτοι $\widehat{Β} + \widehat{Γ} = 2^{L}$.

Πόρισμα. Ἐὰν ἓν τραπέζιον ἔχῃ μίαν γωνίαν ὀρθήν, ἔχει καὶ μίαν ἄλλην γωνίαν ὀρθήν. Τότε τὸ τραπέζιον λέγεται ὀρθογώνιον τραπέζιον (σχ. 144).

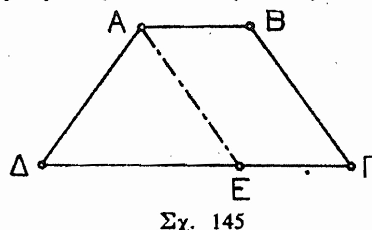
151. Ἰσοσκελὲς τραπέζιον καλεῖται τὸ τραπέζιον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἴσας τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς του (σχ. 145).

152. Θεώρημα. Παντὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου, αἱ προσκείμεναι εἰς ἑκάστην βάσιν γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ μὲ

(1) $ΒΓ = ΑΔ$

Θὰ δείξωμεν ὅτι $\widehat{Γ} = \widehat{Δ}$ καὶ $\widehat{Α} = \widehat{Β}$.



Σχ. 145

Ἐκ τοῦ ἄκρου Α τῆς μικροτέρας βάσεως ΑΒ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν βάσιν ΓΔ εἰς τὸ Ε (σχ. 145). Τότε θὰ εἶναι :

(2) $$ΒΓ = ΑΕ,$$

διότι εἶναι παράλληλα τμήματα κείμενα μεταξὺ παραλλήλων. Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι ΑΔ = ΑΕ, ἤτοι τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι ἰσοσκελές. Τότε θὰ ἔχῃ :

(3) $$\widehat{Δ} = Α\widehat{Ε}Δ.$$

Ἐπὶ πλέον ἔχομεν ὅτι :

(4) $$\widehat{Γ} = Α\widehat{Ε}Δ,$$

λόγῳ τῶν παραλλήλων ΑΕ // ΒΓ, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΓΕ. Ἐκ τῶν σχέσεων (3) καὶ (4) ἕπεται ὅτι $\widehat{Γ} = \widehat{Δ}$.

Τότε θὰ εἶναι καὶ $\widehat{Β} = \widehat{Α}$ ὡς παραπληρώματα τῶν ἴσων γωνιῶν $\widehat{Γ}$ καὶ $\widehat{Δ}$ ἀντιστοίχως. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ διὰ μὴ κυρτὸν τραπέζιον.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ (σχ. 145) μὲ

(5) $$\widehat{Γ} = \widehat{Δ},$$

Θὰ δείξωμε ὅτι τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές.

Ἐκ τῆς κορυφῆς Α τῆς μικροτέρας βάσεως ΑΒ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΓΔ εἰς τὸ Ε. Τότε θὰ εἶναι :

(6) $$\widehat{Γ} = Α\widehat{Ε}Δ,$$

λόγῳ τῶν παραλλήλων ΒΓ // ΑΕ, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΓΕ.

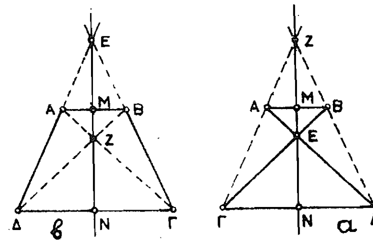
Ἐκ τῶν σχέσεων (5) καὶ (6) ἕπεται ὅτι $\widehat{Δ} = Α\widehat{Ε}Δ$, ἤτοι τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι ἰσοσκελές, ὡς ἔχον τὰς παρὰ τὴν βάσιν του ΔΕ γωνίας ἴσας. Ἐξ αὐτοῦ λαμβάνομεν :

(7) ΑΔ = ΑΕ,

Ἀλλὰ εἶναι καί :

(8) ΒΓ = ΑΕ,

ὡς παράλληλα τμήματα κείμενα μεταξὺ παραλλήλων. Ἐκ τῶν (7) καὶ (8) λαμβάνομεν ΑΔ = ΒΓ, ἤτοι τὸ τραπέζιον εἶναι ἰσοσκελές.



Σχ. 146

153. Ἄξων συμμετρίας ἰσοσκελοῦς τραπεζίου. Ἐπειδὴ παντὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου (κυρτοῦ ἢ μὴ κυρτοῦ σχ. 146α,β) αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ σχηματίζουν μεθ' ἑκάστης τῶν βάσεων γωνίας ἴσας, αὗται προεκτεινόμεναι (ἐν ἀνάγκῃ), τέμνονται εἰς σημεῖον Ε καὶ σχηματίζουν μετὰ τῶν βάσεων τοῦ

τραπεζίου δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα, τὰ ΕΑΒ καὶ ΕΓΔ. Τὸ ἐκ τῆς κορυφῆς Ε ὕψος αὐτῶν θὰ διέρχεται ἐκ τῶν μέσων Μ καὶ Ν τῶν βάσεων ΑΒ καὶ ΓΔ ἀντιστοίχως, ἤτοι θὰ εἶναι κοινὴ μεσοκάθετος τῶν βάσεων, ἄρα ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος.

Αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ, ὡς συμμετρικαὶ μεταξύ των, εἶναι ἴσαι καὶ τέμνονται εἰς σημεῖον Ζ ἐπὶ τοῦ ἄξονος συμμετρίας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

161. Δείξατε ὅτι ἐὰν αἱ διαγώνιοι τραπεζίου εἶναι ἴσαι, τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές.

162. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ μέσα δύο ἀπέναντι πλευρῶν τετραπλεύρου εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτάς, τὸ τετράπλευρον εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον.

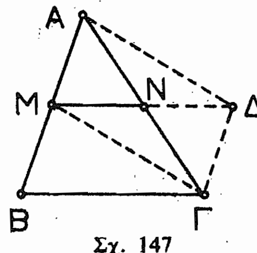
163. Ἐὰν ἡ βάσις ΓΔ τραπεζίου ΑΒΓΔ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ, δείξατε ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{A}$ καὶ $\widehat{B}$ τέμνονται ἐπὶ τῆς ΓΔ.

164. Δείξατε ὅτι εἰς κάθε τραπέζιον ἡ διαφορὰ τῶν δύο βάσεων εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν δύο μὴ παραλλήλων πλευρῶν καὶ μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

154. Θεώρημα. Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὰ μέσα δύο πλευρῶν τριγώνου, εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν καὶ ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Μ, Ν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως (σχ. 147). Φέρομεν τὸ τμῆμα ΜΝ καὶ εἰς τὴν προέκτασιν αὐτοῦ λαμβάνομεν τμῆμα ΝΔ = ΝΜ. Τότε, τοῦ τετραπλεύρου ΑΜΓΔ αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΜΔ τεμνόμεναι εἰς τὸ Ν, διχοτομοῦνται, ἄρα τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἐξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι :



Σχ. 147

(1) ΓΔ // = ΜΑ(*)

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι ΜΑ = ΜΒ καὶ τὸ τμῆμα ΜΒ κεῖται ἐπ' εὐθείας μετὰ τοῦ ΜΑ, ἕπεται ἐκ τῆς σχέσεως (1) ὅτι :

ΓΔ // = ΜΒ.

Ἄρα τὸ τετράπλευρον ΒΓΔΜ εἶναι παραλληλόγραμμον. Τότε θὰ εἶναι :

ΜΔ // = ΒΓ ἢ 2·ΜΝ // = ΒΓ ἄρα :

$$MN // = \frac{B\Gamma}{2}$$

* Ἡ ΓΔ//=ΜΑ συμβολίζει τὴν παραλληλίαν καὶ ἰσότητα διὰ τὰ τμήματα ΓΔ, ΜΑ καὶ ἑπομένως ἀντικαθιστᾷ τὰς ΓΔ//ΜΑ ∧ ΓΔ=ΜΑ.

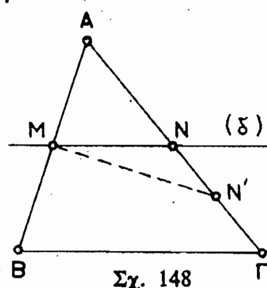
155. Θεώρημα. Ἐὰν εὐθεῖα (δ) εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν πλευρὰν ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ καὶ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον Μ τῆς πλευρᾶς ΑΒ, τότε θὰ διέρχεται καὶ ἀπὸ τὸ μέσον Ν τῆς πλευρᾶς ΑΓ καὶ τὸ ἀποκοπτόμενον ἀπ' αὐτὴν τμῆμα ΜΝ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι ἡ ἐκ τοῦ μέσου Μ τῆς ΑΒ παράλληλος τῆς ΒΓ, τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ν (σχ. 148). Ἐὰν τὸ Ν δὲν ἦτο μέσον τῆς πλευρᾶς ΑΓ καὶ ἦτο τὸ Ν′ μέσον αὐτῆς, τότε ἡ ΜΝ′, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, θὰ ἦτο παράλληλος τῆς ΒΓ. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον, διότι ἐκ τοῦ σημείου Μ θὰ εἴχομεν δύο παραλλήλους, τὰς ΜΝ καὶ ΜΝ′ πρὸς τὴν ΒΓ. Ἄρα ἡ ἐκ τοῦ Μ παράλληλος τῆς ΒΓ διέρχεται ἐκ τοῦ μέσου Ν τῆς ΑΓ.

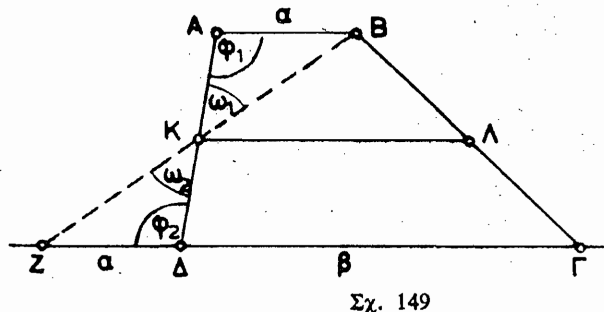
Τὸ τμῆμα ΜΝ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ΒΓ διότι, ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, ὁρίζεται ἐκ τῶν μέσων Μ καὶ Ν τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

156. Θεώρημα. Ἡ διάμεσος κυρτοῦ τραπεζίου εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις του καὶ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἔστω κυρτὸν τραπέζιον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι ΑΒ = α καὶ ΓΔ = β (σχ. 149). Ἂν Κ καὶ Λ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ ἀντιστοίχως, φέρομεν τὴν ΒΚ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς βάσεως ΓΔ εἰς τὸ Ζ.



Σχ. 148



Σχ. 149

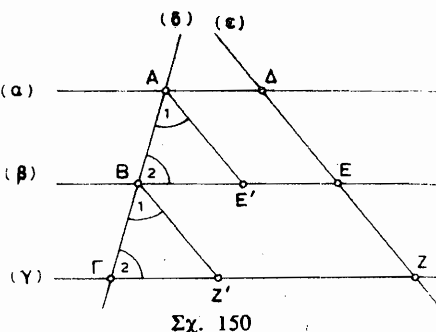
Τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα ΑΒΚ καὶ ΔΖΚ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ΚΑ = ΚΔ, $\omega_1 = \omega_2$ ὡς κατὰ κορυφὴν καὶ $\varphi_1 = \varphi_2$, λόγῳ τῶν ΑΒ // ΓΔ, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΔ. Τότε θὰ ἔχωμεν ΒΚ = ΚΖ, ἤτοι τὸ Κ εἶναι μέσον τοῦ ΒΖ καὶ ΑΒ = ΔΖ = α.

Τοῦ τριγώνου πλέον ΒΖΓ, ἡ πλευρὰ ΖΓ εἶναι ἴση μὲ α + β, ἤτοι μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου, ἐνῷ ἡ διάμεσος ΚΛ τοῦ τραπεζίου συνδέει τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΖ καὶ ΒΓ τοῦ τριγώνου ΒΖΓ. Ἄρα θὰ εἶναι

$$\text{ΚΛ} // = \frac{\text{ΖΓ}}{2}, \text{ ἤτοι } \text{ΚΛ} // \text{ΑΒ} // \text{ΓΔ} \;\wedge\; \text{ΚΛ} = \frac{\text{ΑΒ} + \text{ΓΔ}}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

157. Θεώρημα. Ἐὰν παράλληλοι εὐθεῖαι ἀποκόπτουν ἀπὸ εὐθεῖαν τέμνουσαν αὐτὰς ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα, τότε αὗται ἀποκόπτουν ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα καὶ ἀπὸ κάθε ἄλλην τέμνουσαν αὐτάς.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τρεῖς παραλλήλους εὐθείας (α), (β), (γ) καὶ εὐθεῖαν (δ) τέμνουσαν αὐτὰς εἰς τὰ σημεῖα Α,Β,Γ ἀντιστοίχως οὕτως, ὥστε ΑΒ = ΒΓ (σχ. 150). Ἔστω (ε), μία ἄλλη τέμνουσα τὰς παραλλήλους εἰς τὰ Δ, Ε, Ζ ἀντιστοίχως. Ἐκ τῶν Α καὶ Β θεωροῦμεν τὰς παραλλήλους τῆς (ε), αἱ ὁποῖαι τέμνουν ἡ μὲν πρώτη τὴν (β) εἰς τὸ Ε′, ἡ δὲ δευτέρα τὴν (γ) εἰς τὸ Ζ′. Τότε τὰ τετράπλευρα ΑΔΕΕ′ καὶ ΒΕΖΖ′ εἶναι παραλληλόγραμμα, ἑπομένως :



Σχ. 150

(1) ΔΕ = ΑΕ′ καὶ ΕΖ = ΒΖ′

Τὰ τμήματα ΑΕ′ καὶ ΒΖ′, ὡς παράλληλα πρὸς τὴν (ε) εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλα. Τότε θὰ εἶναι $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$ ὡς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΑΕ′ καὶ ΒΖ′ τεμνομένων ὑπὸ τῆς (δ). Ὁμοίως $\widehat{B_2} = \widehat{\Gamma_2}$, λόγῳ τῶν παραλλήλων (β) καὶ (γ), τεμνομένων ὑπὸ τῆς (δ). Τότε τὰ τρίγωνα ΑΒΕ′ καὶ ΒΓΖ′ εἶναι ἴσα, διότι ἐπὶ πλέον ἔχουν ἐξ ὑποθέσεως ΑΒ = ΒΓ. Ἐξ αὐτῶν ἕπεται ὅτι :

(2) ΑΕ′ = ΒΖ′.

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἕπεται ΔΕ = ΕΖ.

Πόρισμα. Ἐὰν παράλληλοι εὐθεῖαι ἀποκόπτουν ἀπὸ εὐθεῖαν τέμνουσαν αὐτὰς ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα, αὗται ἰσαπέχουν.

Παρατήρησις. Ἀπὸ τὸ προηγούμενον θεώρημα φαίνεται ἡ δυνατότης τῆς διαιρέσεως ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος εἰς ὁσαδήποτε ἴσα τμήματα (βλ. καὶ § 227).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α′.

165. Δείξατε ὅτι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν παντὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου, εἶναι κορυφαί, παραλληλογράμμου. Πότε τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον, πότε ρόμβος καὶ πότε τετράγωνον;

166. Τὰ τμήματα ποὺ συνδέουν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τριγώνου, διαιροῦν αὐτὸ εἰς τέσσαρα ἴσα τρίγωνα.

167. Εἰς κάθε τρίγωνον τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του καὶ τὸ ἴχνος ἑνὸς ὕψους του, εἶναι κορυφαὶ ἰσοσκελοῦς τραπεζίου.

168. Δείξατε ὅτι ἡ διάμεσος ἐπί τινα πλευρὰν τριγώνου τέμνει εἰς τὸ μέσον του τὸ τμῆμα ποὺ συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

169. Ἐὰν ἡ μία βάσις κυρτοῦ τραπεζίου εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης, τότε ἡ διάμεσος αὐτοῦ τριχοτομεῖται ὑπὸ τῶν διαγωνίων.

170. Ἐὰν ἡ διάμεσος ΚΛ τραπεζίου ΑΒΓΔ τέμνεται ὑπὸ τῶν διαγωνίων εἰς τὰ Ε καὶ Ζ δείξατε ὅτι ΚΕ = ΛΖ. Πότε ἡ διάμεσος τριχοτομεῖται ὑπὸ τῶν διαγωνίων;

171. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν ἑνὸς τριγώνου ἀπὸ τυχοῦσαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία δὲν τὸ τέμνει, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν μέσων τῶν πλευρῶν του ἀπ' αὐτήν.

172. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Ἄγομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν διὰ τῆς κορυφῆς Α καὶ ἀπὸ τὰ Β καὶ Γ φέρομεν καθέτους ΒΔ καὶ ΓΕ ἐπ' αὐτήν. Δείξατε ὅτι τὸ μέσον Μ τοῦ τμήματος ΒΓ ἰσαπέχει ἀπὸ τὰ Δ καὶ Ε.

Β.΄

173. Εἰς κάθε κυρτὸν τετράπλευρον τὰ τμήματα ποὺ ὁρίζονται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν καὶ ἀπὸ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον εἶναι μέσον ἑκάστου.

174. Ἡ εὐθεῖα ἡ διερχομένη διὰ τῆς κορυφῆς Α τριγώνου ΑΒΓ καὶ τοῦ μέσου Ε τῆς διαμέσου ΒΔ τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς σημεῖον Ζ. Δείξατε ὅτι ΖΓ = 2.ΒΖ.

175. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΔ καὶ ἐκ τοῦ Β κάθετον ἐπ' αὐτήν, ἡ ὁποία τὴν τέμνει εἰς τὸ Ε. Ἐὰν εἶναι Μ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ, δείξατε ὅτι ΕΜ // ΑΓ καὶ $\text{ΕΜ} = \frac{|\text{ΑΒ} - \text{ΑΓ}|}{2}$.

176. Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα μὲ ἄκρα τὰ μέσα τῶν διαγωνίων κυρτοῦ τραπεζίου, εἶναι παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις του καὶ ἴσον πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν αὐτῶν.

177. Ἔστω Δ τυχὸν σημεῖον τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Εἰς τὴν προέκτασιν τῆς πλευρᾶς ΑΓ λαμβάνομεν τμῆμα ΓΕ = ΒΔ. Δείξατε ὅτι τὸ τμῆμα ΔΕ διχοτομεῖται ἀπὸ τὴν ΒΓ.

178. Εἰς κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ φέρομεν τὴν ΒΕ παράλληλον καὶ ἴσην τῆς ΑΔ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος κειμένην μετὰ τῆς ΑΔ ὡς πρὸς τὴν ΑΒ. Δείξατε ὅτι τὸ τμῆμα ΓΕ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν ἑνοῦσαν τὰ μέσα τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου.

179. Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Ε τῆς πλευρᾶς ΑΒ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ αὐτοῦ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως σημεῖα Ζ καὶ Η οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι ΑΖ = ΑΕ καὶ ΒΗ=ΒΕ. Ἐὰν Μ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΖΗ, δείξατε ὅτι $\widehat{\text{ΑΜΒ}} = 1\llcorner$.

180. Διὰ τῆς κορυφῆς Α παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν (ε). Δείξατε ὅτι ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς Γ ἀπὸ τὴν (ε) ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ ἀπὸ τὴν (ε), ἀναλόγως τοῦ ἐὰν ἡ εὐθεῖα (ε) δὲν τέμνῃ ἢ τέμνῃ τὸ παραλληλόγραμμον.

181. Δίδεται παραλληλόγραμμον καὶ τυχοῦσα εὐθεῖα (ε) μὴ τέμνουσα αὐτό. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν τοῦ παραλληλογράμμου ἀπὸ τὴν (ε) ἰσοῦται πρὸς τὸ τετραπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου τοῦ παραλληλογράμμου ἀπὸ τὴν (ε).

182. Ἡ ἀπόστασις τοῦ μέσου εὐθυγράμμου τμήματος ἀπὸ τυχοῦσαν εὐθεῖαν ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα ἢ μὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν ἀποστάσεων τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν, ἀναλόγως τοῦ ἐὰν τὸ τμῆμα δὲν τέμνῃ ἢ τέμνῃ τὴν εὐθεῖαν.

ΚΕΝΤΡΑ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

158. Θεώρημα. Αἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν παντὸς τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς κορυφάς του.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 151). Θεωροῦμεν τὰς μεσοκαθέτους τῶν πλευρῶν ΒΓ καὶ ΑΓ. Αὗται εἶναι κάθετοι εἰς μὴ παραλλή-

λους πλευρὰς ΒΓ καὶ ΑΓ, συνεπῶς δὲν εἶναι παράλληλοι, ἄρα τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον Ο. Τὸ σημεῖον τοῦτο, ὡς ἀνῆκον εἰς τὴν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος ΒΓ ἰσαπέχει ἀπὸ τὰ ἄκρα του, ἤτοι :

(1) $$ΟΒ = ΟΓ.$$

'Ομοίως τὸ σημεῖον Ο ἰσαπέχει ἐκ τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος ΑΓ, ὡς ἀνῆκον εἰς τὴν μεσοκάθετον αὐτοῦ, ἤτοι :

(2) $$ΟΓ = ΟΑ.$$

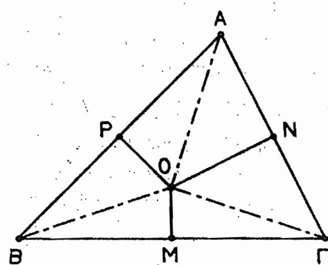
'Εκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἕπεται :

$$ΟΑ = ΟΒ,$$

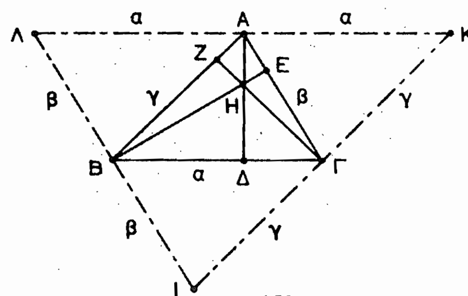
δηλαδὴ τὸ Ο ἰσαπέχει ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος ΑΒ, συνεπῶς ἀνήκει εἰς τὴν μεσοκάθετον αὐτοῦ. Ἄρα αἱ τρεῖς μεσοκάθετοι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο, τὸ ὁποῖον καλεῖται **περίκεντρον** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τὸ ὁποῖον ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς τρεῖς κορυφὰς τοῦ τριγώνου ὡς προκύπτει ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2).

159. Θεώρημα. Τὰ τρία ὕψη παντὸς τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

'Απόδειξις. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τὰ τρία ὕψη αὐτοῦ (σχ. 152). 'Εκ τῶν κορυφῶν Α, Β καὶ Γ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς ἀπέναντι αὐτῶν πλευράς, αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν τὸ τρίγωνον ΙΚΛ. Τὸ τετράπλευρον



Σχ. 151



Σχ. 152

ΑΒΓΚ ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευράς του παραλλήλους, συνεπῶς εἶναι παραλληλόγραμμον, ἄρα :

(1) $$ΑΚ = ΒΓ = α.$$

Τὸ ἴδιον συμβαίνει καὶ διὰ τὸ ΑΓΒΛ. 'Επομένως :

(2) $$ΑΛ = ΓΒ = α.$$

'Εκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι ΑΚ = ΑΛ, ἤτοι τὸ Α εἶναι μέσον τῆς πλευρᾶς ΚΛ τοῦ τριγώνου ΙΚΛ.

Τὸ ὕψος ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὡς κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, θὰ εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της ΚΛ καί, ἐπειδὴ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον Α τῆς ΚΛ, ἕπεται ὅτι εἶναι μεσοκάθετος τῆς πλευρᾶς ΚΛ τοῦ τριγώνου ΙΚΛ.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι τὰ ὕψη ΒΕ καὶ ΓΖ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν ΙΛ καὶ ΙΚ τοῦ τριγώνου ΙΚΛ ἀντιστοίχως. Τότε ταῦτα διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Η (§ 158). Τὸ σημεῖον Η καλεῖται **ὀρθόκεντρον** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

160. Ὀρθοκεντρικὴ τετρὰς σημείων. Αἱ τρεῖς κορυφαὶ παντὸς τριγώνου καὶ τὸ ὀρθόκεντρον αὐτοῦ λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν μίαν ὀρθοκεντρικὴν τετράδα σημείων, διότι εὐκόλως φαίνεται ὅτι τὰ οἱαδήποτε τρία ἐξ αὐτῶν ὁρίζουν τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ὀρθόκεντρον τὸ τέταρτον σημεῖον τῆς τετράδος.

★ **161. Θεώρημα. Ἐὰν Ε καὶ Ζ εἶναι σημεῖα τῶν πλευρῶν ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως τριγώνου ΑΒΓ, αἱ ἡμιευθεῖαι ΒΕ καὶ ΓΖ τέμνονται εἰς σημεῖον Σ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου καὶ ἡ ἡμιευθεῖα ΑΣ τέμνει τὴν ΒΓ εἰς σημεῖον Δ ἐνδιάμεσον τῶν Β καὶ Γ.**

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ εἶναι ἐσωτερικὰ τῶν γωνιῶν $\widehat{Β}$ καὶ $\widehat{Γ}$ ἀντιστοίχως ἕπεται ὅτι (σχ. 153):

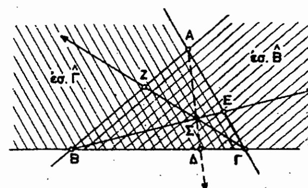
$$Ε\widehat{ΒΓ}<\widehat{Β} \quad \text{καὶ}$$

$$Ζ\widehat{ΓΒ}<\widehat{Γ}$$

Τότε θὰ εἶναι καὶ

$$Ε\widehat{ΒΓ}+Ζ\widehat{ΓΒ}<\widehat{Β}+\widehat{Γ}<2L$$

Ἄρα αἱ ἡμιευθεῖαι ΒΕ καὶ ΓΖ τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον Σ.



Σχ. 153

Αἱ ἡμιευθεῖαι ΒΕ καὶ ΓΖ εἶναι ἐσωτερικαὶ διὰ τὰς γωνίας $\widehat{Β}$ καὶ $\widehat{Γ}$ ἀντιστοίχως ἤτοι:

$$ΒΕ \in εσ.\ \widehat{Β} \quad \text{καὶ}$$

$$ΓΖ \in εσ.\ \widehat{Γ}.$$

Ἐξ αὐτῶν ἕπεται ὅτι:

$$(1) \qquad ΒΕ \cap ΓΖ \in (εσ.\ \widehat{Β}) \cap (εσ.\ \widehat{Γ})$$

Ἀλλὰ τὸ πρῶτον μέλος τῆς (1) εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ἡμιευθειῶν ΒΕ καὶ ΓΖ, δηλαδὴ τὸ Σ καὶ τὸ δεύτερον μέλος της εἶναι τὸ κοινὸν μέρος τῶν ἐσωτερικῶν τῶν γωνιῶν $\widehat{Β}$ καὶ $\widehat{Γ}$, δηλαδὴ τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Τότε ἡ (1) γράφεται.

$$Σ \in εσ.\ ΑΒΓ,$$

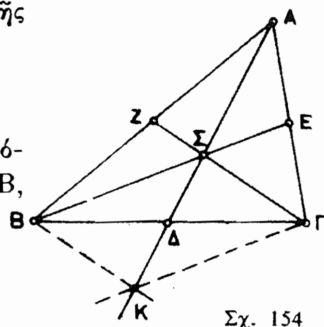
ἄρα τὸ Σ εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Κατὰ ταῦτα ἡ ΑΣ εἶναι ἐσωτερικὴ ἡμιευθεῖα τῆς κυρτῆς γωνίας $\widehat{Α}$, τὰ δὲ Β καὶ Γ, ὡς σημεῖα τῶν πλευρῶν τῆς $\widehat{Α}$, εὑρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς ΑΣ. Συνεπῶς τὸ τμῆμα ΒΓ τέμνει τὴν ἡμιευθεῖαν ΑΣ εἰς σημεῖον Δ ἢ ἰσοδυνάμως ἡ ἡμιευθεῖα ΑΣ τέμνει τὴν ΒΓ εἰς σημεῖον Δ ἐνδιάμεσον τῶν Β καὶ Γ.

162. Θεώρημα. Αἱ τρεῖς διάμεσοι παντὸς τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου, ἀπέχει δὲ ἀπὸ ἑκάστην κορυφὴν ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὰ 2/3 τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΒΕ, ΓΖ αἱ δύο διάμεσοι αὐτοῦ (σχ. 154). Αὗται τέμνονται εἰς σημεῖον Σ (βλ. § 161), τὸ ὁποῖον εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου.

Φέρομεν τὴν ΑΣ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Δ καὶ ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΒΓ.



Σχ. 154

Ἐπὶ τῆς ΑΔ, λαμβάνομεν τμῆμα :

(1) $ΣΚ = ΣΑ$,

ὥστε τὸ Σ νὰ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΑΚ. Τότε, ἐπειδὴ τὸ Ζ εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΑΒ, ἕπεται ὅτι ΖΣ//ΒΚ ἢ

(2) $ΖΓ // ΒΚ$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ΕΣ // ΓΚ ἢ

(3) $ΕΒ // ΓΚ$

Ἐκ τῶν σχέσεων (2) καὶ (3) ἕπεται ὅτι τὸ τετράπλευρον ΒΚΓΣ εἶναι παραλληλόγραμμον, ὡς ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευράς του παραλλήλους. Ἄρα αἱ διαγώνιοί του ΣΚ καὶ ΒΓ διχοτομοῦνται, ἤτοι τὸ Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΒΓ. Ἑπομένως καὶ ἡ ἐκ τοῦ Α διάμεσος τοῦ τριγώνου διέρχεται ἐκ τοῦ κοινοῦ σημείου Σ τῶν δύο ἄλλων διαμέσων.

Ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου ΒΚΓΣ λαμβάνομεν $ΣΚ = 2 \cdot ΣΔ$. Τότε ἡ σχέσις (1) γράφεται :

(4) $2 \cdot ΣΔ = ΣΑ$

Ἔχομεν ὅμως ὅτι $ΣΑ + ΣΔ = ΑΔ$ ἢ

$2ΣΑ + 2ΣΔ = 2ΑΔ$ καὶ λόγῳ τῆς (4) ἡ τελευταία γράφεται

$2ΣΑ + ΣΑ = 2ΑΔ \Rightarrow 3ΣΑ = 2ΑΔ$ ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται ὅτι :

$$ΣΑ = \frac{2}{3} ΑΔ,$$

ἤτοι τὸ σημεῖον Σ τῆς τομῆς τῶν διαμέσων, ἀπέχει ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὰ 2/3 τῆς διαμέσου ΑΔ.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι :

$$ΣΒ = \frac{2}{3} ΒΕ \quad \text{καὶ} \quad ΣΓ = \frac{2}{3} ΓΖ.$$

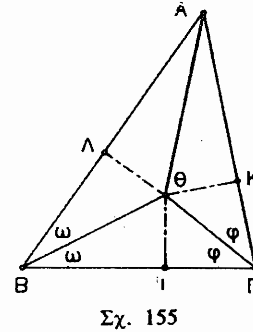
Τὸ κοινὸν σημεῖον Σ τῶν διαμέσων τριγώνου ὀνομάζεται **κέντρον βάρους** ἢ **βαρύκεντρον αὐτοῦ**. Ὁ ὅρος οὗτος ἔχει ληφθῆ ἐκ τῆς φυσικῆς, διότι τὸ Σ συμπίπτει μὲ τὸ κέντρον βάρους ὑλικῆς πλακὸς ἐξ ὁμογενοῦς ὑλικοῦ, σχήματος τριγώνου.

Σημείωσις. Εἶναι ἐπίσης $ΣΔ = \frac{1}{3} ΑΔ$, $ΣΕ = \frac{1}{3} ΒΕ$, $ΣΖ = \frac{1}{3} ΓΖ$.

163. Θεώρημα. Αἱ τρεῖς ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώ-

νου, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου καὶ ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς τρεῖς πλευράς.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ (σχ. 155). Αὗται εἶναι ἐσωτερικαὶ τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ ἀντιστοίχως, ἐπομένως, τέμνονται εἰς σημεῖον Θ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου. Ἐκ τοῦ Θ φέρομεν $\Theta I \perp B\Gamma$, $\Theta K \perp A\Gamma$ καὶ $\Theta\Lambda \perp AB$. Τὸ σημεῖον Θ, ὡς ἀνῆκον εἰς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας $\widehat{B}$, ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς πλευράς της, ἤτοι :



Σχ. 155

(1) $$\Theta I = \Theta\Lambda.$$

Ἐπειδὴ ἐπὶ πλέον τοῦτο ἀνήκει καὶ εἰς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας $\widehat{\Gamma}$ ἕπεται ὅτι :

(2) $$\Theta I = \Theta K$$

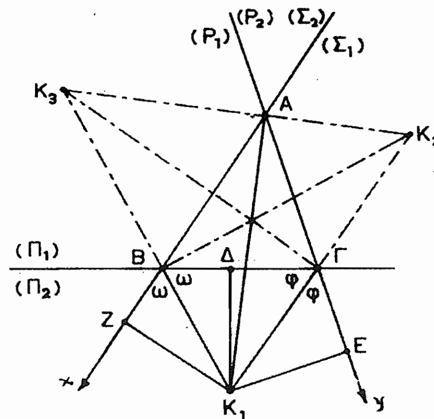
Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) συνεπάγεται ὅτι :

$$\Theta\Lambda = \Theta K.$$

Ἄρα τὸ σημεῖον Θ ἀνήκει καὶ εἰς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας $\widehat{A}$, ὡς ἰσαπέχον ἀπὸ τὰς πλευράς της. Ἑπομένως αἱ τρεῖς διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Θ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου. Τὸ σημεῖον Θ καλεῖται **ἔγκεντρον** τοῦ τριγώνου καὶ ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς τρεῖς πλευράς του.

★ **164. Θεώρημα. Εἰς κάθε τρίγωνον αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι δύο γωνιῶν του τέμνονται εἰς σημεῖον εὑρισκόμενον ἐντὸς τῆς τρίτης γωνίας του.**

Ἀπόδειξις. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 156). Ἡ εὐθεῖα ΒΓ, ἐπὶ τῆς ὁποίας εὑρίσκεται ἡ πλευρὰ τοῦ τριγώνου, χωρίζει τὸ ἐπίπεδον εἰς δύο ἡμιεπίεπδα (Π_1) καὶ (Π_2) ὅπου ἡ κορυφὴ Α εὑρίσκεται εἰς τὸ (Π_1), αἱ δὲ εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΑΒ χωρίζουν τὸ ἐπίπεδον εἰς δύο ἡμιεπίπεδα ἑκάστη, (P_1), (P_2) καὶ (Σ_1), (Σ_2) ἀντιστοίχως ὅπου αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ εὑρίσκονται εἰς τὰ (P_1) καὶ (Σ_1) ἀντιστοίχως. Ἄν 2ω καὶ 2φ εἶναι αἱ ἐξωτερικαὶ γωνίαι τῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ ἀντιστοίχως, ἔχομεν: $2\omega < 2^{L}$ καὶ $2\varphi < 2^{L}$ ὡς παραπληρωματικαὶ τῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$. Ἄρα $2\omega + 2\varphi < 4^{L}$ ἤ $\omega + \varphi < 2^{L}$. Ἐξ αὐτῆς ἕπεται ὅτι αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ τέμνονται εἰς σημεῖον K_1 ἐντὸς τοῦ ἡμιεπιεπιπέδου (Π_2). Τὸ σημεῖον K_1, ὡς σημεῖον τοῦ ἡμιεπιπέδου (Π_2) εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, διότι τὸ τρίγωνον κεῖται ἐντὸς τοῦ (Π_1).



Σχ. 156

Αἱ διχοτόμοι BK_1 καὶ ΓK_1 κεῖνται ἐντὸς τῶν κυρτῶν γωνιῶν $\Gamma\widehat{B}x$ καὶ $B\widehat{\Gamma}y$ ἤτοι :

$$BK_1 \in (\Pi_2) \cap (\Sigma_1) \quad \text{καὶ}$$
$$\Gamma K_1 \in (\Pi_2) \cap (P_1)$$

Ἐξ αὐτῶν ἕπεται ὅτι:

$(BK_1) \cap (\Gamma K_1) \in [(\Pi_2) \cap (\Sigma_1)] \cap [(\Pi_2) \cap (P_1)]$

ἢ $K_1 \in (\Pi_2) \cap (\Sigma_1) \cap (P_1)$

ἢ $K_1 \in (\Pi_2) \cap [(\Sigma_1) \cap (P_1)]$

ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται $K_1 \in (\Sigma_1) \cap (P_1)$ ἢ

$$K_1 \in \text{εσ.}\ \widehat{A}.$$

Ἄρα τὸ σημεῖον K_1 εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου καὶ ἐντὸς τῆς γωνίας $\widehat{A}$.

165. Θεώρημα. Εἰς κάθε τρίγωνον ἀνὰ δύο αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι τέμνονται εἰς σημεῖον, ἀπὸ τὸ ὁποῖον διέρχεται ἡ τρίτη ἐσωτερικὴ διχοτόμος καὶ τὸ ὁποῖον ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ. Φέρομεν τὰς ἐξωτερικὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$, αἱ ὁποῖαι τέμνονται, εἰς σημεῖον K_1 (βλ. § 164), ἐξωτερικὸν τοῦ τριγώνου καὶ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας $\widehat{A}$ (σχ. 156). Φέρομεν τὰς $K_1\Delta \perp B\Gamma$, $K_1E \perp A\Gamma$ καὶ $K_1Z \perp AB$. Τότε, ἐπειδὴ τὸ K_1 εἶναι σημεῖον τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν $\widehat{\Gamma B x}$ καὶ $\widehat{B\Gamma y}$, θὰ ἔχωμεν :

$$K_1\Delta = K_1Z \quad \text{καὶ} \quad K_1\Delta = K_1E$$

ἐκ τῶν ὁποίων ἕπεται ὅτι $K_1Z = K_1E$. Ἐκ τῆς τελευταίας ἕπεται ὅτι τὸ K_1 ἀνήκει εἰς τὴν ἐσωτερικὴν διχοτόμον τῆς γωνίας $\widehat{A}$, διότι ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς πλευράς της καὶ εὑρίσκεται καὶ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτῆς.

Τὸ σημεῖον τοῦτο ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου καὶ ὀνομάζεται **παράκεντρον** αὐτοῦ. Ἀντιστοίχως ὑπάρχουν καὶ δύο ἄλλα παράκεντρα K_2 καὶ K_3 τοῦ τριγώνου ἐντὸς τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ αὐτοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

183. Ἐὰν Α΄, Β΄, Γ΄ εἶναι τὰ συμμετρικὰ τοῦ περικέντρου τριγώνου ΑΒΓ ὡς πρὸς τὰς πλευράς του, δείξατε ὅτι τὸ τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΑΒΓ.

184. Τὸ ἄθροισμα τῶν διαμέσων παντὸς τριγώνου εἶναι μεγαλύτερον τῶν 3/4 καὶ μικρότερον τῶν 3/2 τῆς περιμέτρου αὐτοῦ.

185. Ἀπὸ τὸ κέντρον βάρους τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν εὐθεῖαν (ε), ἡ ὁποία ἀφήνει τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ πρὸς τὸ ἕνα μέρος αὐτῆς. Ἐὰν ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ εἶναι αἱ ἀποστάσεις τῶν τριῶν κορυφῶν ἀπὸ αὐτήν, δείξατε ὅτι εἶναι $AA' = BB' + \Gamma\Gamma'$.

186. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν τριγώνου ἀπὸ τυχοῦσαν εὐθεῖαν μὴ τέμνουσαν αὐτό, ἰσοῦται μὲ τὸ τριπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τριγώνου ἀπὸ αὐτήν.

187. Παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θεωροῦμεν τὰ μέσα Μ καὶ Ν τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΔ. Δείξατε ὅτι ἡ διαγώνιος ΒΔ τριχοτομεῖται ἀπὸ τὰς ΓΜ, ΓΝ.

188. Ἐὰν τρίγωνον ἔχῃ δύο ἴσας διαμέσους, τότε εἶναι ἰσοσκελές.

189. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ, ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ αἱ διάμεσοι αὐτοῦ καὶ Ο τὸ κέντρον βά-

ρους του. Προεκτείνομεν τὰς διαμέσους καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λαμβάνομεν τμήματα ΔΑ' = ΔΟ, ΕΒ' = ΕΟ, ΖΓ' = ΖΟ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ἴσα.

Β.'

190. 'Εὰν ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ προεκτείνωμεν τὰς πλευράς του κατὰ κύκλικὴν σειρὰν καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λάβωμεν τμήματα ΑΑ' = ΒΒ' = ΓΓ', δείξατε ὅτι τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' εἶναι ἰσόπλευρον, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον βάρους ταυτίζεται μὲ τὸ κέντρον βάρους τοῦ ΑΒΓ.

191. Μὲ πλευρὰς τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν ἐκτὸς αὐτοῦ τὰ τετράγωνα ΑΒΔΕ καὶ ΑΓΖΗ. Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΒΗ καὶ ΓΔ τέμνονται ἐπὶ τοῦ ὕψους ΑΘ τοῦ τριγώνου.

192. Δίδεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). 'Εὰν Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς πλευρᾶς ΑΒ καὶ λάβωμεν εἰς τὴν προέκτασιν τῆς ΑΓ σημεῖον Ν, τοιοῦτον ὥστε ΓΝ = ΒΜ, δείξατε ὅτι ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΜΝ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

193. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ. 'Εὰν Δ καὶ Ε εἶναι σημεῖα τῶν πλευρῶν ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως τοιαῦτα, ὥστε διὰ τὰ τμήματα ΒΔ καὶ ΓΕ τεμνόμενα εἰς σημεῖον Ο νὰ εἶναι ΒΟ = 2.ΟΔ καὶ ΓΟ = 2.ΟΕ, δείξατε ὅτι τὰ Δ καὶ Ε εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΓ καὶ ΑΒ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ

Β'.

194. 'Εὰν Ε καὶ Ζ εἶναι τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ἀπέναντι πλευρῶν κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, δείξατε ὅτι ἡ γωνία τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν $\widehat{E}$ καὶ $\widehat{Z}$ ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου.

195. 'Ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ΑΒ < ΑΓ. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ καὶ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης λαμβάνομεν τμῆμα ΔΕ = ΔΒ. 'Εκ τῆς κορυφῆς Γ φέρμεν ΓΖ ⊥ ΑΕ. Δείξατε ὅτι ἡ ΓΒ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{AΓZ}$.

196. 'Επὶ τῶν πλευρῶν ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ πλευρᾶς α λαμβάνομεν τμήματα $ΑΑ' = ΒΒ' = ΓΓ' = \frac{α}{3}$. Δείξατε ὅτι: α) τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' εἶναι ἰσόπλευρον, β) αἱ πλευραὶ τοῦ Α'Β'Γ' εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ ΑΒΓ καὶ γ) τὸ κέντρον βάρους τοῦ Α'Β'Γ' συμπίπτει μὲ τὸ κέντρον βάρους τοῦ ΑΒΓ.

197. Τριγώνου ΑΒΓ ἡ γωνία $\widehat{B}$ εἶναι ἴση μὲ 45^0. Φέρομεν τὰ ὕψη ΑΔ καὶ ΓΕ καὶ ἔστω Ζ τὸ μέσον τῆς ΑΓ. Δείξατε ὅτι ΖΔ ⊥ ΖΕ.

198. Αἱ διάμεσοι τριγώνου ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς ἀνίσους πλευράς, εἶναι ἄνισοι καὶ μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς μικροτέραν πλευράν.

199. Ἔστω Μ σημεῖον ἐσωτερικὸν ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ. 'Εὰν Ε, Ζ, Η, Θ εἶναι τὰ συμμετρικὰ τοῦ Μ ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ τοῦ ὀρθογωνίου, α) δείξατε ὅτι αἱ κορυφαὶ τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου ΕΖΗΘ, β) πότε τὸ ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον;

200. 'Εὰν Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῆς γωνίας $\widehat{A}$ τριγώνου ΑΒΓ, δείξατε ὅτι ΜΒ + ΜΓ > ΑΒ + ΑΓ.

201. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι $(ε_1)$, $(ε_2)$ καὶ ἐξ ἑνὸς σημείου Α τῆς $(ε_1)$ φέρομεν ΑΓ ⊥ $(ε_2)$ καὶ ΑΒ πλαγίαν ὡς πρὸς τὴν $(ε_2)$. 'Εκ τοῦ Β θεωροῦμεν εὐθεῖαν τέμνουσαν τὴν ΑΓ εἰς τὸ Δ καὶ τὴν $(ε_1)$ εἰς τὸ Ζ τοιαύτην, ὥστε ΔΖ = 2 ΑΒ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\widehat{AΒΓ} = 3 \cdot \widehat{ΔΒΓ}$.

202. 'Επὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ τετραγώνου ΑΒΓΔ λαμβάνομεν τὰ σημεῖα

Ε,Ζ,Η,Θ ἀντιστοίχως οὕτως, ὥστε ΑΕ = ΒΖ = ΓΗ = ΔΘ = λ. α) Δείξατε ὅτι τὸ ΕΖΗΘ εἶναι τέτραγωνον, β) νὰ προσδιορισθῇ τὸ λ, οὕτως, ὥστε τὸ τετράγωνον ΕΖΗΘ νὰ εἶναι τὸ ἐλάχιστον δυνατόν.

203. Τετραπλεύρου αἱ διαγώνιοι τέμνονται καθέτως. Δείξατε ὅτι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου.

204. Κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αἱ πλευραὶ ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι ἴσαι. Ἐὰν Ε καὶ Ζ εἶναι τὰ μέσα τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, δείξατε ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας τῶν πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ.

205. Δίδεται εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ καὶ Γ τυχὸν σημεῖον αὐτοῦ. Ἐκ τῶν Α καὶ Β φέρομεν τὰς παραλλήλους ἡμιευθείας Αx καὶ Βy πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ΑΒ, ἐπὶ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν τμήματα ΑΔ = ΑΓ καὶ ΒΕ = ΒΓ ἀντιστοίχως. Ἐὰν Ζ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΔΕ, δείξατε ὅτι ΖΑ ⊥ ΖΒ.

206. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐκ τῆς κορυφῆς Α φέρομεν καθέτους ἡμιευθείας ἐπὶ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ὄχι πρὸς τὸ μέρος τοῦ τριγώνου καὶ ἐπ' αὐτῶν λαμβάνομεν τμήματα ΑΒ' = = ΑΒ καὶ ΑΓ' = ΑΓ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι τὸ ὕψος ΑΔ τοῦ ΑΒΓ προεκτεινόμενον διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τοῦ τμήματος Β'Γ'. Τί παρατηρεῖται διὰ τὸ ὕψος ΑΕ τοῦ τριγώνου ΑΒ'Γ';

207. Ἀπὸ τὸ μέσον Μ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας $\widehat{A}$, ἡ ὁποία τέμνει τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ Β' καὶ Γ' ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι $ΑΒ' = ΑΓ' = \frac{ΑΒ + ΑΓ}{2}$.

208 Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν ἀνὰ μίαν κάθετον ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ, ἐπὶ τὰς τέσσαρας διχοτόμους τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{Γ}$. Δείξατε ὅτι τὰ σημεῖα Δ. Ε, Ζ, Η κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

209. Μὲ πλευρὰς τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\widehat{A}$ = 1L) κατασκευάζομεν ἐκτὸς αὐτοῦ τὰ τετράγωνα ΑΒΔΕ καὶ ΑΓΖΘ. Φέρομεν τὰς ΔΔ' ⊥ ΒΓ καὶ ΖΖ' ⊥ ΒΓ. Δείξατε ὅτι : α) ΔΔ' + ΖΖ' = ΒΓ, β) τὰ σημεῖα Δ, Α, Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ γ) αἱ ΔΕ καὶ ΖΘ τέμνονται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ὕψους ΑΗ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

210. Κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, αἱ δὲ ἀπέναντι πλευραὶ προεκτεινόμεναι τέμνονται εἰς τὰ Ε καὶ Ζ. Δείξατε ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{E}$ καὶ $\widehat{Z}$ τέμνουν τὰς πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου εἰς τέσσαρα σημεῖα, τὰ ὁποῖα εἶναι κορυφαὶ ρόμβου.

211. Ἐὰν Ε καὶ Ζ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΒΓ ἀντιστοίχως τριγώνου ΑΒΓ καὶ Δ τὸ ἴχνος τοῦ ὕψους ΑΔ, δείξατε ὅτι ἡ γωνία $Δ\widehat{E}Ζ$ ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{Γ}$ τοῦ τριγώνου.

212. Ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\widehat{A}$ = 1L) φέρομεν τὸ ὕψος ΑΗ καὶ ἐκ τοῦ Η τὰ καθέτους ΗΔ, ΗΕ ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΑΓ ἀντιστοίχως. Ἐκ τοῦ Β φέρομεν εὐθεῖαν (δ) παράλληλον τῆς ΔΕ. Ἐὰλ Λ καὶ Μ εἶναι τὰ μέσα τῶν ΑΒ καὶ ΒΓ ἀντιστοίχως, δείξατε ὅτι: α) ΑΜ ⊥ (δ), β) αἱ ΛΜ καὶ ΑΗ τέμνονται ἐπὶ τῆς (δ) καὶ γ) αἱ ΑΜ καὶ ΗΕ τέμνονται ἐπὶ τῆς (δ).

213. Αἱ μεσοκάθετοι ΔΟ, ΕΟ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ τέμνουν τὰς ΒΓ, ΑΒ εἰς τὰ Ζ, Η ἀντιστοίχως. Ἐὰν σχηματίσωμεν τὸ παραλληλόγραμμον ΗΒΖΘ, δείξατε ὅτι ἡ ΘΟ εἶναι μεσοκάθετος τῆς πλευρᾶς ΑΓ.

214. Ἐὰν τρίγωνον ἔχῃ δύο ἴσας διχοτόμους, τότε εἶναι ἰσοσκελές.

215. Ἔστω κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ ὁποίου κατασκευάζομεν ἐκτὸς αὐτοῦ τὰ τετράγωνα ΑΒΕΖ, ΒΓΗΘ, ΓΔΙΚ, ΑΔΛΜ. Ἐὰν Σ καὶ Τ εἶναι τὰ μέσα τῶν ΛΕ καὶ ΙΘ, δείξατε ὅτι τὸ τετράπλευρον ΒΣΔΤ εἶναι τετράγωνον.

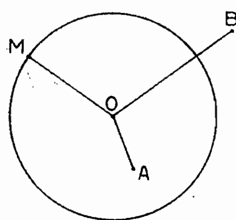
ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

Ο ΚΥΚΛΟΣ

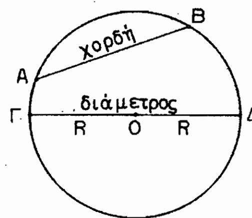
166. Ὁρισμοί: Κύκλος καλεῖται τὸ σύνολον τῶν σημείων (γ. τόπος) τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν ἰδιότητα νὰ ἀπέχουν ὡρισμένην ἀπόστασιν R ἀπὸ σταθερὸν σημεῖον O τοῦ ἐπιπέδου.

Τὸ σημειοσύνολον τοῦτο συμβολίζεται μὲ (O, R) καὶ τὸ O καλεῖται **κέντρον** τοῦ κύκλου. Ἐὰν M εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (σχ. 157), τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα OM = R καλεῖται **ἀκτὶς** τοῦ κύκλου.

Ἕν σημεῖον A καλεῖται **ἐσωτερικὸν σημεῖον** τοῦ κύκλου (O, R) τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν εἶναι $OA < R$. Τὸ σύνολον τῶν ἐσωτερικῶν σημείων καλεῖται **ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου** καὶ συμβολίζεται μὲ ἐσ.(O, R). Ἕν σημεῖον B καλεῖται **ἐξωτερικὸν σημεῖον** τοῦ κύκλου τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν εἶναι $OB > R$. Τὸ σύνολον τῶν ἐξωτερικῶν σημείων καλεῖται **ἐξωτερικὸν τοῦ κύκλου** καὶ συμβολίζεται μὲ ἐξ.(O, R).



Σχ. 157



Σχ. 158

Σημείωσις. Κατ' ἄλλον ὁρισμόν, κύκλος καλεῖται τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι $OM \leqq R$, ἐνῷ τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι OM = R καλεῖται περιφέρεια κύκλου. Ἐνταῦθα θὰ δεχθῶμεν τὸν προαναφερθέντα ὁρισμὸν § 166.

Χορδὴ τοῦ κύκλου (O, R) καλεῖται κάθε εὐθύγραμμον τμῆμα AB, τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα A καὶ B εἶναι σημεῖα τοῦ κύκλου (σχ. 158).

Διάμετρος τοῦ κύκλου (O, R) καλεῖται κάθε χορφὴ ΓΔ αὐτοῦ, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου O τοῦ κύκλου (σχ. 158). Τὸ μῆκος κάθε διαμέτρου εἶναι ἴσον μὲ τὸ διπλάσιον τῆς ἀκτῖνος, ἤτοι ΓΔ = 2R. Ἄρα ὅλαι αἱ διάμετροι τοῦ αὐτοῦ κύκλου εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Τὰ ἄκρα Γ καὶ Δ μιᾶς διαμέτρου ΓΔ καλοῦνται **ἀντιδιαμετρικὰ** σημεῖα.

Ἡ χάραξις τοῦ κύκλου ἐπιτυγχάνεται διὰ γνωστοῦ ὀργάνου, τοῦ διαβή-

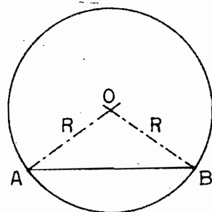
του, τὸ ὁποῖον διατηρεῖ σταθερὰν ἀπόστασιν μεταξὺ τῆς αἰχμῆς του, ἥτις καθορίζει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ τῆς γραφίδος του, ἥτις χαράσσει (γράφει) τὸν κύκλον.

167. Θεώρημα. Διὰ κάθε χορδὴν ΑΒ κύκλου (Ο,R) ἰσχύει ΑΒ $\leqq$ 2R.

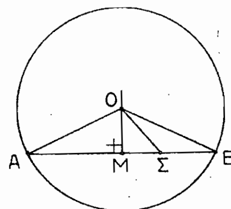
Ἀπόδειξις i) Ἐὰν ἡ χορδὴ ΑΒ δὲν εἶναι διάμετρος (σχ. 159), τὸ τρίγωνον ΟΑΒ εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ $OA = OB = R$. Ἐξ αὐτοῦ λαμβάνομεν $AB < OA + OB \Rightarrow AB < R + R \Rightarrow AB < 2R$.

ii) Ἐὰν ἡ χορδὴ ΑΒ εἶναι διάμετρος θὰ ἔχωμεν $AB = 2R$.

Ἄρα διὰ κάθε χορδὴν ΑΒ ἰσχύει $AB \leqq 2R$ καὶ ἡ μεγαλυτέρα χορδὴ εἶναι ἡ διάμετρος, ἴση πρὸς 2R.



Σχ. 159



Σχ. 160

168. Θεώρημα. Κάθε σημεῖον χορδῆς κύκλου, εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου.

Ἀπόδειξις. Ἔστω κύκλος (Ο,R), ΑΒ μία χορδὴ αὐτοῦ καὶ Σ τυχὸν σημεῖον τῆς χορδῆς (σχ. 160). Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι $OΣ < R$. Φέρομεν $OM \perp AB$. Τὸ σημεῖον Μ εἶναι μέσον τῆς χορδῆς ΑΒ, διότι τὸ τρίγωνον ΑΟΒ εἶναι ἰσοσκελὲς ($OA = OB = R$). Ἐπειδὴ τὸ Σ εἶναι σημεῖον τῆς χορδῆς, ἕπεται $MΣ < MB \Rightarrow OΣ < OB$ (§ 80) ἢ $OΣ < R$.

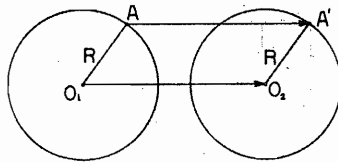
169. Ἴσοι κύκλοι. Δύο κύκλοι εἶναι ἴσοι τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν ἔχουν ἴσας ἀκτῖνας. Διότι δύνανται νὰ ταυτισθοῦν διὰ παραλλήλου μετατοπίσεως (σχ. 161).

170. Ἀξονικὴ συμμετρία εἰς τὸν κύκλον. Θεώρημα. Πᾶσα διάμετρος κύκλου εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτοῦ.

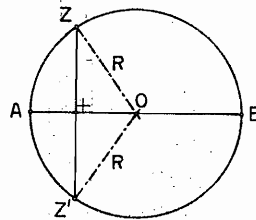
Ἀπόδειξις. Ἔστω ὁ κύκλος (Ο,R) καὶ ΑΒ μία διάμετρος αὐτοῦ. Ἂν Ζ εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου, θεωροῦμεν τὸ συμμετρικόν του Ζ′ ὡς πρὸς ἄξονα τὴν ΑΒ καὶ ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ Ζ′ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου (σχ. 162). Πράγματι τοῦτο συμβαίνει, διότι λόγῳ τῆς συμμετρίας εἶναι $OZ = OZ'$. Ἀλλὰ $OZ = R$. Ἄρα $OZ' = R$ καὶ ἑπομένως τὸ Ζ′ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου.

Πόρισμα I. Πᾶσα διάμετρος χωρίζει ἕνα κύκλον εἰς δύο ἴσα μέρη, ἕκαστον ἐκ τῶν ὁποίων καλεῖται ἡμικύκλιον.

Πόρισμα II. Ἡ ἀπὸ τὸ κέντρον ἑνὸς κύκλου κάθετος ἐπὶ μίαν χορδὴν αὐτοῦ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον αὐτῆς.



Σχ. 161



Σχ. 162

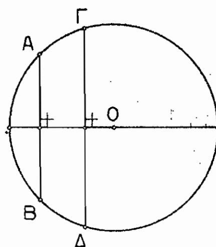
Πόρισμα III. Ἡ μεσοκάθετος μιᾶς χορδῆς κύκλου διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Διότι ἂν δὲν διήρχετο θὰ ὑπῆρχον δύο μεσοκάθετοι τοῦ αὐτοῦ τμήματος. Ἡ δευτέρα θὰ ἦτο ἡ ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

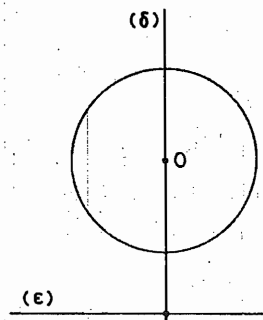
Πόρισμα IV. Δύο παράλληλοι χορδαὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἔχουν κοινὴν μεσοκάθετον, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου (σχ. 163).

Πόρισμα V. Δοθέντος κύκλου κέντρου O καὶ εὐθείας (ε), ἡ ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εὐθεῖα (δ), ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν (ε), εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος.

Πράγματι ἡ εὐθεῖα (δ) εἶναι ἄξων συμμετρίας διὰ τὸν κύκλον, ἐφ' ὅσον περιέχει διάμετρον αὐτοῦ. Ἐπὶ πλέον εἶναι καὶ ἄξων συμμετρίας διὰ τὴν εὐθεῖαν (ε), ἐφ' ὅσον εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν. Ἄρα εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος (σχ. 164).



Σχ. 163



Σχ. 164

Πόρισμα VI. Ἡ εὐθεῖα ποὺ ἑνώνει τὸ κέντρον μὲ τὸ μέσον μιᾶς χορδῆς εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδήν.

171. Κεντρικὴ συμμετρία εἰς τὸν κύκλον. Θεώρημα. Τὸ κέντρον ἑνὸς κύκλου εἶναι καὶ κέντρον συμετρίας αὐτοῦ.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὁ κύκλος (O, R) καὶ M τυχὸν σημεῖον του. Θεωροῦμεν τὸ συμμετρικὸν M' αὐτοῦ ὡς πρὸς κέντρον συμμετρίας τὸ O καὶ ἀρκεῖ νὰ

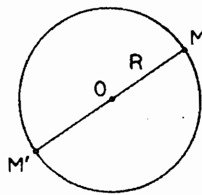
δείξωμεν ὅτι τὸ M′ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου (σχ. 165). Πράγματι τοῦτο συμβαίνει, διότι ἡ συμμετρία μᾶς ἐξασφαλίζει OM = OM′. Ἀλλὰ OM = R. Ἄρα OM′ = R. Ἑπομένως τὸ M′ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου.

172. Προσανατολισμὸς κύκλου. Εἷς κύκλος δύναται νὰ διαγραφῇ ὑπὸ κινητοῦ ἄνευ παλινδρομήσεως κατὰ δύο διαφόρους ἀλλήλων φοράς. Πρὸς διαφοροποίησιν αὐτῶν, μία αὐθαιρέτως ἐκλεγεῖσα φορὰ καλεῖται **θετικὴ** (σχ. 166). Τότε ἡ ἄλλη καλεῖται ἀντίθετος τῆς πρώτης ἢ **ἀρνητική**. Ὡς θετικὴ φορὰ διαγραφῆς λαμβάνεται συνήθως ἡ ἀντίθετος τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου.

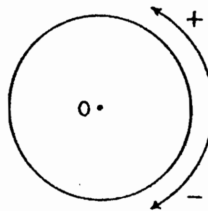
Εἷς κύκλος, εἰς τὸν ὁποῖον ἔχει ὁρισθῇ ἡ θετικὴ φορὰ διαγραφῆς του καλεῖται **προσανατολισμένος** κύκλος.

173. Ἐπίκεντρος γωνία. Κάθε γωνία, ἡ ὁποία ἔχει τὴν κορυφήν της εἰς τὸ κέντρον ἑνὸς κύκλου, καλεῖται ἐπίκεντρος γωνία. Ἑκάστη πλευρὰ τῆς ἐπικέντρου γωνίας, τέμνει τὸν κύκλον εἰς ἓν σημεῖον (σχ. 167).

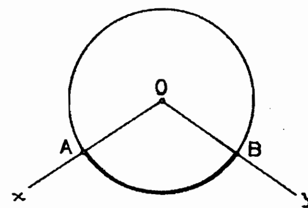
174. Τόξον καλεῖται τὸ μέρος τοῦ κύκλου, τὸ περιεχόμενον εἰς τὸ ἐσω-



Σχ. 165.



Σχ. 166



Σχ. 167

τερικὸν μιᾶς ἐπικέντρου γωνίας. Ἐὰν A καὶ B εἶναι τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ἐπίκεντρος γωνία $\widehat{xOy}$ τέμνει τὸν κύκλον (σχ. 167), τὰ A καὶ B καλοῦνται **ἄκρα** τοῦ τόξου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν $\widehat{xOy}$. Τὸ ἐν λόγῳ τόξον συμβολίζεται $\widehat{AB}$.

Παρατήρησις. Μεταξὺ τῶν τόξων ἑνὸς κύκλου (O, R) καὶ τῶν ἐπικέντρων αὐτοῦ γωνιῶν ὑφίσταται ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία, διότι εἰς κάθε ἐπίκεντρον γωνίαν $\widehat{xOy}$ ἀντιστοιχεῖ ἓν τόξον $\widehat{AB}$ τοῦ κύκλου (O, R), ἀλλὰ καὶ εἰς κάθε τόξον $\widehat{AB}$ τοῦ κύκλου (O, R) ἀντιστοιχεῖ μία ἐπίκεντρος γωνία, ἡ $\widehat{AOB} \equiv \widehat{xOy}$.

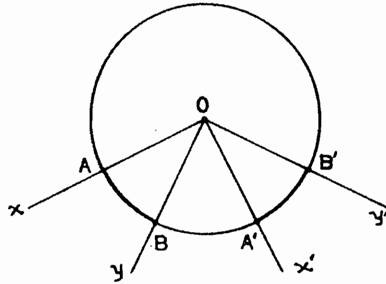
175. Ἰσότης - πράξεις - διάταξις εἰς τὸ σύνολον τῶν τόξων. Λόγῳ τῆς ὑφισταμένης ἀμφιμονοσημάντου ἀντιστοιχίας μεταξὺ τόξων καὶ ἐπικέντρων γωνιῶν, εὐκόλως ἀποδεικνύεται ἡ ἰσότης καὶ ὁρίζονται τὰ ἀκό-

λουθα. Τονίζομεν ὅτι ἀναφερόμεθα εἰς τόξα **τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἢ ἴσων κύκλων.**

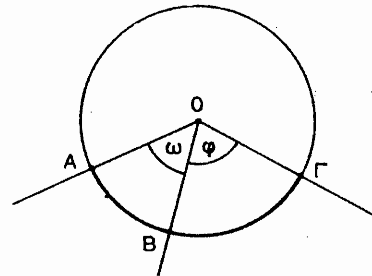
i) Δύο τόξα $\widehat{AB}$ καὶ $\widehat{A'B'}$ εἶναι ἴσα, τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν εἰς αὐτὰ ἀντιστοιχοῦν ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι $x\widehat{O}y$ καὶ $x'\widehat{O}y'$. Ἀποδεικνύεται διὰ μετατοπίσεως (σχ. 168).

ii) Ἄθροισμα δύο τόξων εἰς τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν ἐπίκεντροι γωνίαι ω καὶ φ, καλεῖται τόξον, εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρος γωνία ω + φ.

Εἰς τὸ σχῆμα 169 εἶναι $\widehat{AB} + \widehat{B\Gamma} = \widehat{A\Gamma}$, διότι $A\widehat{O}B + B\widehat{O}\Gamma = A\widehat{O}\Gamma$. Ἀναλόγως ὁρίζεται τὸ ἄθροισμα περισσοτέρων τῶν δύο τόξων.



Σχ. 168



Σχ. 169

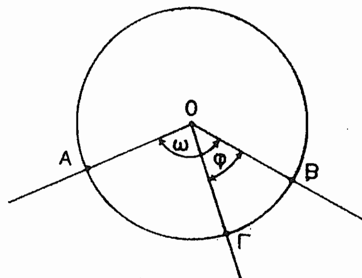
iii) Διαφορὰ δύο τόξων εἰς τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν ἐπίκεντροι γωνίαι ω καὶ φ μὲ ω>φ, καλεῖται τόξον, εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρος γωνία ω — φ.

Εἰς τὸ σχῆμα 170 εἶναι $\widehat{AB} - \widehat{B\Gamma} = \widehat{A\Gamma}$ διότι $A\widehat{O}B - B\widehat{O}\Gamma = A\widehat{O}\Gamma$.

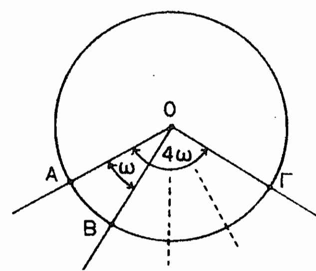
iv) Γινόμενον τόξου, εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρος γωνία ω, ἐπὶ φυσικὸν ἀριθμὸν ν, καλεῖται τόξον, εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρος γωνία ν·ω.

Εἰς τὸ σχῆμα 171 εἶναι $4\cdot\widehat{AB} = \widehat{A\Gamma}$, διότι $4\cdot A\widehat{O}B = A\widehat{O}\Gamma$.

v) Πηλίκον τόξου, εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρος γωνία φ, διὰ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν, καλεῖται τόξον, εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρος γωνία φ/ν.



Σχ. 170



Σχ. 171

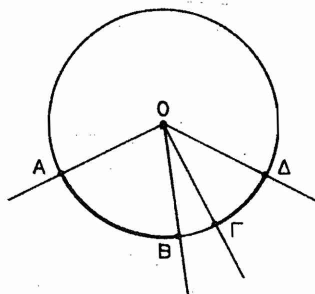
Εἰς τὸ σχῆμα 171 εἶναι $\frac{\widehat{\text{ΑΓ}}}{4} = \widehat{\text{ΑΒ}}$, διότι $\frac{\widehat{\text{ΑΟΓ}}}{4} = \widehat{\text{ΑΟΒ}}$.

vi) Γινόμενον τόξου, εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρος γωνία ω, ἐπὶ ρητὸν ἀδιθμὸν μ/ν, καλεῖται τὸ τόξον εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρος γωνία $\varphi = \frac{\mu}{\nu} \cdot \omega$.

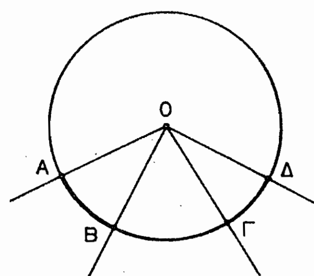
vii) Ἓν τόξον $\widehat{\text{ΑΒ}}$ (σχ. 172) καλεῖται μεγαλύτερον τόξου $\widehat{\text{ΓΔ}}$ καὶ συμβολίζεται $\widehat{\text{ΑΒ}} > \widehat{\text{ΓΔ}}$, τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίκεντροι γωνίαι εἶναι ὁμοίως ἄνισοι, ἤτοι ὅταν $\widehat{\text{ΑΟΒ}} > \widehat{\text{ΓΟΔ}}$. Ἀντιστοίχως ὁρίζεται καὶ ἡ σχέσις <.

176. Μέσον τόξου καλεῖται ἓν σημεῖον αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὸ τόξον εἰς δύο ἴσα τόξα. Ἀπὸ τὸ μέσον ἑνὸς τόξου διέρχεται καὶ ἡ διχοτόμος τῆς ἀντιστοίχου ἐπικέντρου γωνίας καὶ κατὰ συνέπειαν **ἓν τόξον ἔχει ἓν μόνον μέσον**, διότι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίκεντρος γωνία ἔχει μία μόνον διχοτόμον.

177. Διαδοχικὰ τόξα καλοῦνται δύο ἢ περισσότερα τόξα τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ὅταν αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίκεντροι γωνίαι εἶναι, ἐφεξῆς προκειμένου περὶ δύο, γενικῶς διαδοχικαὶ (σχ. 173).



Σχ. 172



Σχ. 173

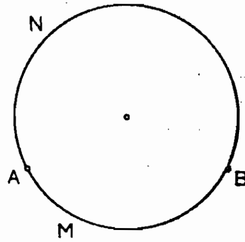
178. Παραπληρωματικὰ τόξα καλοῦνται δύο τόξα (τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἢ ἴσων κύκλων), ὅταν αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίκεντροι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.

Παρατήρησις. Δοθέντος κύκλου (Ο, R), δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐπ' αὐτοῦ εἶναι προφανῶς ἄκρα δύο τόξων (σχ. 174). Ἐξ αὐτῶν, ἐν γένει, τὸ ἓν εἶναι μικρότερον ἡμικυκλίου καὶ καλεῖται **ἔλασσον τόξον $\widehat{\text{ΑΒ}}$** ἢ ἁπλῶς **τόξον $\widehat{\text{ΑΒ}}$** καὶ τὸ ἄλλο εἶναι μεγαλύτερον ἡμικυκλίου καὶ καλεῖται **μεῖζον τόξον $\widehat{\text{ΑΒ}}$**. Ὁ καθορισμὸς ἑνὸς ἀπὸ τὰ τόξα $\widehat{\text{ΑΒ}}$ εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ καὶ μὲ τὴν παρεμβολὴν ἑνὸς τρίτου γράμματος ἀντιστοιχοῦντος εἰς σημεῖον τοῦ τόξου ἐνδιάμεσον τῶν

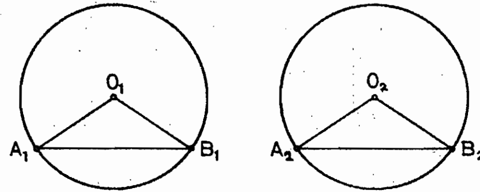
ἄκρων Α καὶ Β π.χ. $\widehat{AMB}$ ἢ $\widehat{ANB}$ διὰ τὰ δύο τόξα $\widehat{AB}$ τοῦ σχήματος 174.

179. Θεώρημα. Εἰς ἴσα τόξα δύο ἴσων κύκλων (ἢ τοῦ αὐτοῦ κύκλου) ἀντιστοιχοῦν ἴσαι χορδαί *.

Ἀπόδειξις. Ἂς θεωρήσωμεν δύο ἴσους κύκλους (O_1, R), (O_2, R) καὶ $\widehat{A_1B_1} = \widehat{A_2B_2}$ δύο ἴσα τόξα αὐτῶν (σχ. 175). Τότε θὰ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίκεντροι γωνίαι $A_1\widehat{O_1}B_1 = A_2\widehat{O_2}B_2$ τῶν τόξων. Ἄρα $\overset{\Delta}{A_1O_1B_1} = \overset{\Delta}{A_2O_2B_2}$ (Π – Γ – Π) διότι $O_1A_1 = O_1B_1 = O_2A_2 = O_2B_2 = R$. Ἐπομένως $A_1B_1 = A_2B_2$.



Σχ. 174



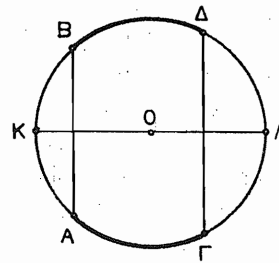
Σχ. 175

180. Θεώρημα. Εἰς ἴσας χορδὰς δύο ἴσων κύκλων (ἢ τοῦ αὐτοῦ κύκλου), ἀντιστοιχοῦν ἴσα ἐλάσσονα (ἀντιστοίχως μείζονα) τόξα.

Ἀπόδειξις. Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $A_1B_1 = A_2B_2$ (σχ. 175), $\Rightarrow \overset{\Delta}{A_1O_1B_1} = \overset{\Delta}{A_2O_2B_2}$ (Π – Π – Π), διότι $O_1A_1 = O_1B_1 = O_2A_2 = O_2B_2 = R$. Ἄρα $\widehat{A_1B_1} = \widehat{A_2B_2}$. Συμπερασματικῶς καὶ τὰ μείζονα τόξα μὲ τὰ αὐτὰ ἄκρα θὰ εἶναι ἴσα.

181. Θεώρημα. Δύο παράλληλοι χορδαὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ὁρίζουν ἐντὸς τῆς ζώνης αὐτῶν δύο ἴσα τόξα τοῦ κύκλου.

Ἀπόδειξις. Ἔστω κύκλος κέντρου Ο καὶ ΑΒ//ΓΔ δύο χορδαὶ αὐτοῦ. Φέρομεν τὴν διάμετρον ΚΟΛ, ἡ ὁποία εἶναι κοινὴ μεσοκάθετος τῶν δύο παραλλήλων χορδῶν (σχ. 176). Τότε ἡ ΚΛ εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος καὶ ἐπομένως εἶναι $\widehat{A\Gamma} = \widehat{B\Delta}$.



Σχ. 176

(*) Χορδὴ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τόξον $\widehat{AB}$ νοεῖται ἡ χορδὴ ΑΒ μὲ ἄκρα τὰ ἄκρα τοῦ τόξου. Εἰς ἓν τόξον $\widehat{AB}$ ἀντιστοιχεῖ μία χορδή, ἡ ΑΒ, ἐνῷ εἰς μίαν χορδὴν ΑΒ ἀντιστοιχοῦν τὰ δύο τόξα $\widehat{AB}$ (ἔλασσον καὶ μεῖζον).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

216. Ἐὰν δύο σημεῖα μιᾶς χορδῆς κύκλου ἰσαπέχουν τοῦ μέσου αὐτῆς, δείξατε ὅτι ἰσαπέχουν καὶ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

217. Δείξατε ὅτι δύο παράλληλοι χορδαὶ ἀγόμεναι ἐκ τῶν ἄκρων μιᾶς διαμέτρου κύκλου εἶναι ἴσαι καὶ ἡ ἑνοῦσα τὰ ἄλλα ἄκρα αὐτῶν χορδὴ εἶναι ἐπίσης διάμετρος.

218. Δείξατε ὅτι δύο χορδαὶ κύκλου κάθετοι εἰς τὰ ἄκρα τρίτης χορδῆς εἶναι ἴσαι.

219. Δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου ΑΚΒ. Ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ κέντρου Κ λαμβάνομεν σημεῖα Γ καὶ Δ οὕτως, ὥστε ΚΓ = ΚΔ καὶ ἐξ αὐτῶν φέρομεν δύο παραλλήλους, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὰ Ε καὶ Ζ. Δείξατε ὅτι ἡ χορδὴ ΕΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς παραλλήλους ταύτας.

220. Ἡ μεσοκάθετος μιᾶς ἀκτῖνος ΚΑ κύκλου κέντρου Κ τέμνει τὸν κύκλον εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Δείξατε ὅτι εἶναι $\widehat{ΒΚΓ} = 120^0$.

221. Δίδεται κύκλος διαμέτρου ΑΟΒ καὶ σημεῖον Γ τῆς ἀκτῖνος ΟΑ. Ἂν Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου, δείξατε ὅτι ΓΑ < ΓΜ < ΓΒ.

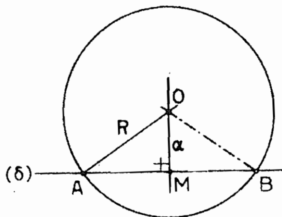
222. Δείξατε ὅτι δύο χορδαὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου δὲν δύνανται νὰ ἀλληλοδιχοτομοῦνται.

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ ΕΙΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

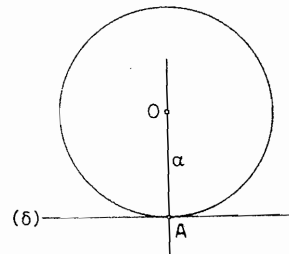
182. Θεώρημα. Ἐὰν μία εὐθεῖα (δ) καὶ εἷς κύκλος, (Ο, R) ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα, τότε εἶναι α<R, ὅπου α ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν.

Ἀπόδειξις. Κατ' ἀρχὰς ἂς παρατηρήσωμε ὅτι εἷς κύκλος καὶ μία εὐθεῖα δύνανται νὰ ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα, διότι δύο οἱαδήποτε σημεῖα ἑνὸς κύκλου ὁρίζουν μίαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία μετ' αὐτοῦ ἔχει προφανῶς κοινὰ τὰ σημεῖα αὐτά.

Ἔστω ὅτι ἡ εὐθεῖα (δ) μὲ τὸν κύκλον (Ο,R) ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα Α καὶ Β (σχ. 177). Θεωροῦμεν τὴν ἀπόστασιν ΟΜ = α τοῦ Ο ἀπὸ τὴν (δ). Τότε ἡ ΟΜ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν (δ) καὶ τὸ Μ εἶναι μέσον τῆς χορδῆς ΑΒ. Ἄρα ἡ ΟΑ = R θὰ εἶναι πλαγία ὡς πρὸς τὴν (δ), συνεπῶς θὰ εἶναι ΟΜ<ΟΑ ἢ α < R.



Σχ. 177



Σχ. 178

Εἰς τὴν θέσιν αὐτὴν τοῦ κύκλου καὶ τῆς εὐθείας, ἡ εὐθεῖα λέγεται **τέμνουσα** τοῦ κύκλου, ἢ λέγομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα **τέμνει** τὸν κύκλον ἢ ὅτι ὁ κύκλος **τέμνει** τὴν εὐθεῖαν εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β.

183. Ἐφαπτομένη εὐθεῖα κύκλου καλεῖται μία εὐθεῖα ἔχουσα ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μετὰ τοῦ κύκλου (σχ. 178). Τὸ κοινὸν σημεῖον καλεῖται **σημεῖον ἐπαφῆς.** Αἱ προτάσεις **εὐθεῖα ἐφάπτεται κύκλου** καὶ **κύκλος ἐφάπτεται εὐθείας** εἶναι ἰσοδύναμοι.

184. Θεώρημα. Ἐὰν εὐθεῖα (δ) ἐφάπτεται κύκλου (Ο, R), τότε εἶναι α = R, ὅπου α ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν.

Ἀπόδειξις. Γνωρίζομεν ὅτι τὸ σχῆμα ποὺ ἀπαρτίζεται ἀπὸ τὸν κύκλον (Ο,R) καὶ τὴν εὐθεῖαν (δ) ἔχει ὡς ἄξονα συμμετρίας τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου Ο κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (δ) (§ 170 πόρισμα V). Ἐὰν ἑπομένως ὁ κύκλος (Ο,R) καὶ ἡ εὐθεῖα (δ) ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον Α, πρέπει κατ' ἀνάγκην τοῦτο νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος συμμετρίας. Ἐὰν δὲν συνέβαινε τοῦτο, θὰ ὑπῆρχε καὶ δεύτερον κοινὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (Ο,R) μὲ τὴν εὐθεῖαν (δ), τὸ συμμετρικὸν τοῦ Α ὡς πρὸς τὸν ἄξονα συμμετρίας, ὅπερ ἄτομον, διότι τότε θὰ ὑπῆρχον δύο κοινὰ σημεῖα εὐθείας καὶ κύκλου. Ἄρα τὸ τμῆμα ΟΑ εἶναι τὸ κάθετον τμῆμα ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (δ), δηλαδὴ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν. Ἑπομένως εἶναι ΟΑ = R, διότι τὸ Α ἀνήκει εἰς τὸν κύκλον, ἤτοι α = R.

Πόρισμα. I. Μία ἐφαπτομένη ἑνὸς κύκλου εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς.

Πόρισμα II. Ἐὰν μία εὐθεῖα εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον μιᾶς ἀκτῖνος κύκλου, τότε ἡ εὐθεῖα ἐφάπτεται εἰς τὸν κύκλον.

Πόρισμα III. Ἐὰν Α εἶναι σημεῖον ἑνὸς κύκλου, ὑπάρχει μία καὶ μόνον μία εὐθεῖα ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον Α.

*** 185. Ἐφαπτομένη καμπύλης.** Ἐνῷ ὁ ὁρισμὸς τῆς ἐφαπτομένης εὐθείας εἰς κύκλον, ὡς ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία ἔχει ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μὲ τὸν κύκλον, ἐξυπηρετεῖ ἀπολύτως τὰς ἀνάγκας τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας, ἐν τούτοις ὁ ὁρισμὸς οὗτος δὲν ἀρκεῖ διὰ μίαν τυχοῦσαν καμπύλην (Γ). Γενικώτερον θὰ δώσωμεν τὸν ἑξῆς ὁρισμόν: Μία εὐθεῖα (ε) καλεῖται ἐφαπτομένη μιᾶς καμπύλης (Γ) εἰς σημεῖον της Α (σχ. 179), ὅταν ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι ἡ ὁριακὴ θέσις μιᾶς μεταβλητῆς τεμνούσης ΑΛ, ὅπου τὸ μεταβλητὸν σημεῖον Λ, διατρέχον τὴν ἀκολουθίαν τῶν σημείων $Λ_1$, $Λ_2$, $Λ_3$... τῆς καμπύλης (Γ), τείνει νὰ ταυτισθῇ μὲ τὸ Α.

Ἡ ἐφαπτομένη εὐθεία (ε), δυνατὸν νὰ ἔχῃ μετὰ τῆς καμπύλης (Γ) ἐκτὸς τοῦ Α καὶ δεύτερον κοινὸν σημεῖον Β. Τοῦτο ἐνδεχομένως νὰ συμβαίνῃ μόνον ὅταν ἡ καμπύλη (Γ) εἶναι μὴ κυρτή.

186. Θεώρημα. Ἐὰν μία εὐθεῖα (δ) καὶ εἷς κύκλος (Ο, R) δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον, τότε εἶναι α>R ὅπου α ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν.

Ἀπόδειξις. Ἐφ' ὅσον ἡ εὐθεῖα (δ) καὶ ὁ κύκλος (Ο,R) δὲν ἔχουν κοινὰ

σημεῖα, ἕπεται ὅτι δὲν ὑπάρχουν σημεῖα τῆς (δ) ἐσωτερικὰ διὰ τὸν κύκλον (Ο, R), διότι ἐὰν ὑπῆρχον ἡ εὐθεῖα θὰ ἔτεμνε τὸν κύκλον (σχ. 180). Τότε ἀπὸ

Σχ. 179

Σχ. 180

τὸ κέντρον Ο τοῦ κύκλου φέρομεν τὴν κάθετον ΟΑ ἐπὶ τὴν (δ) καὶ τὸ Α, ὡς σημεῖον τῆς (δ) θὰ εἶναι ἐξωτερικὸν τοῦ κύκλου. Ἄρα διὰ τὴν ἀπόστασιν ΟΑ = α τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου (Ο, R) ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν (δ) θὰ εἶναι ΟΑ > R ἢ α > R.

Εἰς τὴν θέσιν αὐτὴν τῆς εὐθείας καὶ τοῦ κύκλου, ἡ εὐθεῖα λέγεται ἐξωτερικὴ διὰ τὸν κύκλον, ἢ μὴ τέμνουσα αὐτόν.

Διὰ τὰ τρία προηγούμενα θεωρήματα ἰσχύουν καὶ τὰ ἀντίστροφα αὐτῶν τὰ ὁποῖα συνοψίζονται εἰς τὸ ἑπόμενον θεώρημα :

187. Θεώρημα. Ἔστω εὐθεῖα (δ), κύκλος (Ο, R) καὶ α ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου Ο τοῦ κύκλου ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν. Τότε ἐὰν εἶναι α < R ἢ α = R ἢ

Συνοπτικὴ ἀνακεφαλαίωσις

⟺ α < R

⟺ α = R

⟺ α > R

Σχ. 181

$\alpha > R$ ἡ εὐθεῖα μὲ τὸν κύκλον ἔχουν δύο ἢ ἕνα ἢ οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἀντιστοίχως.

'Απόδειξις. i). 'Εὰν εἶναι $\alpha < R$, τότε ἀποκλείεται ὁ κύκλος μὲ τὴν εὐθεῖαν νὰ ἔχουν ἓν ἢ οὐδὲν κοινὸν σημεῖον, διότι τότε θὰ ἔπρεπε νὰ εἶναι ἢ $\alpha = R$ ἢ $\alpha > R$ ἀντιστοίχως. Ἄρα ὁ κύκλος μὲ τὴν εὐθεῖαν ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα.

ii). 'Εὰν $\alpha = R$, τότε ἀποκλείεται ὁ κύκλος μὲ τὴν εὐθεῖαν νὰ ἔχουν δύο ἢ οὐδὲν κοινὰ σημεῖα, διότι τότε θὰ ἔπρεπε νὰ εἶναι ἢ $\alpha < R$ ἢ $\alpha > R$ ἀντιστοίχως. Ἄρα ὁ κύκλος μὲ τὴν εὐθεῖαν ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον.

iii). 'Εὰν τέλος εἶναι $\alpha > R$ τότε κατ' ἀνάγκην ὁ κύκλος μὲ τὴν εὐθεῖαν δὲν θὰ ἔχουν κοινὰ σημεῖα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

223. Δείξατε ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου κύκλου, εἶναι παράλληλοι.

224. Ἔστω ὀρθογώνιον τραπέζιον ΑΒΓΔ εἰς τὰς γωνίας $\widehat{A}$ καὶ $\widehat{\Delta}$. 'Εὰν ἡ πλευρὰ ΒΓ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα $AB + \Gamma\Delta$ τῶν δύο βάσεων, δείξατε ὅτι ὁ κύκλος μὲ διάμετρον τὴν ΒΓ ἐφάπτεται τῆς ΑΔ.

Β'.

225. 'Απὸ σημεῖον Α εὑρισκόμενον εἰς τὴν προέκτασιν μιᾶς διαμέτρου ΒΓ κύκλου κέντρου Κ καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Γ, φέρομεν τέμνουσαν τοῦ κύκλου ΑΔΕ οὕτως, ὥστε τὸ ἐκτὸς τοῦ κύκλου τμῆμα αὐτῆς ΑΔ νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα. Δείξατε ὅτι εἶναι $\widehat{BKE} = 3\cdot\widehat{\Gamma K\Delta}$.

226. Ἔστωσαν (δ_1) καὶ (δ_2) δύο παράλληλοι εὐθεῖαι, ΑΒ μία κοινὴ κάθετος αὐτῶν καὶ Μ τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΑΒ. Θεωροῦμεν ὀρθὴν γωνίαν μὲ κορυφὴν τὸ Μ, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ τέμνουν τὰς (δ_1) καὶ (δ_2) εἰς τὰ Γ καὶ Δ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι ἡ ΓΔ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου μὲ διάμετρον τὴν ΑΒ.

188. Θεώρημα. Ἔστω κύκλος (Ο, R) καὶ Σ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου του. Φέρομεν τὴν ΣΟ, ἡ ὁποία τέμνει τὸν κύκλον εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. 'Εὰν εἶναι $\Sigma A < \Sigma B$ καὶ Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου, τότε θὰ εἶναι καὶ $\Sigma A \leqq \Sigma M \leqq \Sigma B$.

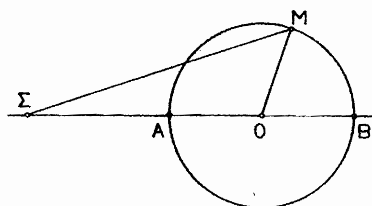
'Απόδειξις. Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΜ καὶ ἐκ τοῦ τριγώνου ΣΟΜ λαμβάνομεν (§ 115):

(1) $$|\Sigma O - OM| < \Sigma M$$

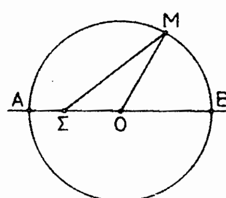
Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

i). 'Εὰν τὸ Σ εἶναι ἐξωτερικὸν τοῦ κύκλου (Ο,R) (σχ. 182), ἡ σχέσις (1) γράφεται:

$$ΣΟ - ΟΜ < ΣΜ \quad ἤ \quad ΣΑ + ΑΟ - ΟΜ < ΣΜ \quad ἤ$$
$$ΣΑ + R - R < ΣΜ \Rightarrow \mathbf{ΣΑ < ΣΜ}$$



Σχ. 182



Σχ. 183

ii). Ἐὰν τὸ Σ εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου (Ο,R) (σχ. 183), ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$ΟΜ - ΣΟ < ΣΜ \quad ἤ \quad ΟΜ - (ΟΑ - ΣΑ) < ΣΜ \quad ἤ$$
$$R - (R - ΣΑ) < ΣΜ \Rightarrow$$

(2) $$\mathbf{ΣΑ < ΣΜ}$$

Οὕτως ἀπεδείχθη τὸ πρῶτον σκέλος τῆς δοθείσης διπλῆς σχέσεως μὲ τὴν παρατήρησιν ὅτι τὸ ἴσον θὰ ἰσχύῃ, ὅταν τὸ Μ συμπέσῃ μὲ τὸ Α.

Ὁμοίως ἐκ τοῦ αὐτοῦ τριγώνου ΣΟΜ λαμβάνομεν καὶ διὰ τὰς δύο περιπτώσεις ὅτι :

$$ΣΜ < ΣΟ + ΟΜ \quad ἤ \quad ΣΜ < ΣΟ + R \quad ἤ$$
$$ΣΜ < ΣΟ + ΟΒ \quad ἤ$$

(3) $$\mathbf{ΣΜ < ΣΒ}$$

Αἱ σχέσεις (2) καὶ (3) συγχωνεύονται εἰς τήν :

$$\mathbf{ΣΑ \leqq ΣΜ \leqq ΣΒ}$$

ὅπου τὸ ἴσον ἰσχύει ἐὰν τὸ Μ συμπίπτῃ μὲ τὸ Α ἢ μὲ τὸ Β ἀντιστοίχως.

Παρατήρησις. Ἡ ἀπόστασις ΣΑ καλεῖται **ἐλαχίστη** ἀπόστασις τοῦ σημείου Σ ἀπὸ τὸν κύκλον (Ο,R) καὶ ἡ ΣΒ **μεγίστη** ἀπόστασις τοῦ Μ ἀπὸ τὸν κύκλον (Ο,R).

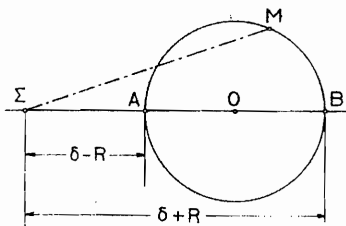
Πόρισμα. Ἐὰν δ εἶναι ἡ ἀπόστασις σημείου Σ ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου (Ο,R), τότε ἡ ἀπόστασις τοῦ τυχόντος σημείου Μ τοῦ κύκλου ἀπὸ τὸ Σ περιέχεται εἰς τὸ κλειστὸν διάστημα [|δ − R|, δ + R] (σχ. 184).

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ ΕΙΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

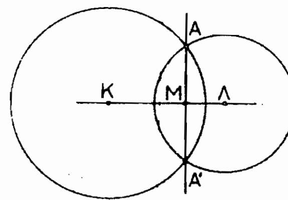
189. Διάκεντρος δύο κύκλων καλεῖται τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα μὲ ἄκρα τὰ κέντρα τῶν δύο κύκλων. Συμβολίζεται συνήθως ἡ διάκεντρος μὲ τὸ γράμμα δ.

190. Θεώρημα. Ἐὰν δύο κύκλοι ἔχουν ἕνα κοινὸν σημεῖον, ἔχουν κοινὸν καὶ τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν διάκεντρον.

Ἀπόδειξις. Ἡ διάκεντρος ΚΛ, δύο κύκλων κέντρων Κ καὶ Λ, προεκτεινομένη, περιέχει διαμέτρου αὐτῶν (σχ. 185). Ἐπειδὴ ἑκάστη διάμετρος κύκλου εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτοῦ, ἕπεται ὅτι ἡ εὐθεῖα ΚΛ εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ ὅλου σχήματος. Ἐὰν ἐπομένως ὑπάρχῃ σημεῖον Α ἀνῆκον καὶ εἰς τοὺς δύο κύκλους, τότε καὶ τὸ συμμετρικὸν Α′ αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν ΚΛ θὰ ἀνήκῃ καὶ εἰς τοὺς δύο κύκλους.



Σχ. 184



Σχ. 185

Πόρισμα Ι. Ἐὰν δύο κύκλοι ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα, τότε ἡ διάκεντρος αὐτῶν εἶναι μεσοκάθετος τῆς κοινῆς χορδῆς των.

Τότε λέγομεν ὅτι δύο κύκλοι τέμνονται.

Πόρισμα ΙΙ. Ἐὰν δύο κύκλοι ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, τοῦτο εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς διακέντρου αὐτῶν.

Ἔστω Α τὸ κοινὸν σημεῖον δύο κύκλων κέντρων Κ καὶ Λ (σχ. 187). Ἐὰν τὸ Α δὲν ἦτο ἐπὶ τῆς διακέντρου ΚΛ, τότε οἱ δύο κύκλοι θὰ εἶχον ὡς κοινὸν σημεῖον καὶ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Α ὡς πρὸς τὴν ΚΛ, δηλαδὴ θὰ εἶχον δύο κοινὰ σημεῖα, ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα τὸ κοινὸν σημεῖον Α εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ΚΛ.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ οἱ δύο κύκλοι ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, λέγομεν ὅτι **ἐφάπτονται** ὁ εἷς εἰς τὸν ἄλλον, τὸ δὲ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν λέγεται **σημεῖον ἐπαφῆς.**

191. Θεώρημα. Ἐὰν δύο κύκλοι (Κ, R) καὶ (Λ, ρ) τέμνωνται εἰς δύο σημεῖα, τότε εἶναι: $|R - \rho| < \delta < R + \rho$, ὅπου δ ἡ διάκεντρος αὐτῶν.

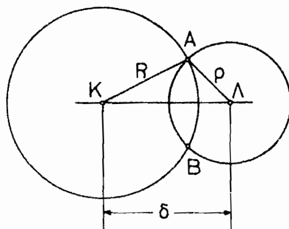
Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν Α καὶ Β τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν δύο κύκλων (σχ. 186). Ταῦτα θὰ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν διάκεντρον ΚΛ, ἐπομένως εὑρίσκονται ἑκατέρωθεν αὐτῆς. Τότε ὑπάρχει τρίγωνον ΑΚΛ, ἐκ τοῦ ὁποίου λαμβάνομεν (§ 115).

$|ΑΚ - ΑΛ| < ΚΛ < ΑΚ + ΑΛ$ ἢ $|R - \rho| < \delta < R + \rho$.

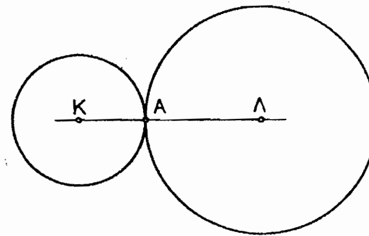
192. Θεώρημα. Ἐὰν δύο κύκλοι (Κ, R) καὶ (Λ, ρ) ἐφάπτωνται καὶ ὁ εἷς εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ ἄλλου, τότε εἶναι $\delta = R + \rho$, ὅπου δ ἡ διάκεντρος αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Α τὸ σημεῖον ἐπαφῆς των. Γνωρίζομεν ὅτι τοῦτο εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς διακέντρου ΚΛ (σχ. 187). Τὸ σημεῖον Α εἶναι ἐνδιάμεσον

τῶν κέντρων Κ καὶ Λ τῶν δύο κύκλων, διότι ὁ εἷς εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ ἄλλου. Ἄρα ΚΛ = ΚΑ + ΑΛ ⇒ **δ = R + ρ**. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι οἱ δύο κύκλοι **ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς**.



Σχ. 186

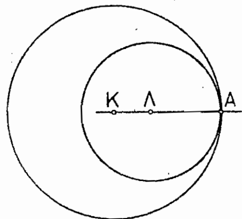


Σχ. 187

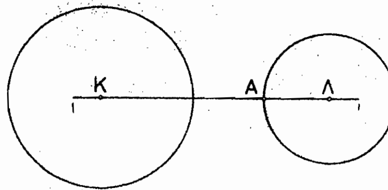
193. Θεώρημα. Ἐὰν δύο κύκλοι (Κ, R) καὶ (Λ, ρ) ἐφάπτωνται καὶ ὁ εἷς εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ ἄλλου, τότε εἶναι δ = | R — ρ |, ὅπου δ ἡ διάκεντρος αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Α τὸ σημεῖον ἐπαφῆς των, τὸ ὁποῖον θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ΚΛ (σχ. 188). Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ κύκλος (Λ, ρ) εἶναι ἐσωτερικὸς διὰ τὸν κύκλον (Κ, R). Τότε εἶναι R>ρ καὶ τὸ Λ, ὡς ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου (Κ, R), εἶναι ἐνδιάμεσον τῶν Κ καὶ Α. Ἄρα ΚΑ = ΚΛ + ΛΑ ⇒ R = δ + ρ ⇒ δ = R — ρ. Γενικῶς γράφομεν **δ = |R — ρ|**, ὅταν δὲν γνωρίζωμεν τὴν σχέσιν μεγέθους τῶν ἀκτίνων.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι οἱ δύο κύκλοι **ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς**.



Σχ. 188



Σχ. 189

194. Θεώρημα. Ἐὰν δύο κύκλοι (Κ, R) καὶ (Λ, ρ) δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον καὶ ὁ εἷς εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ ἄλλου, τότε εἶναι δ > R + ρ, ὅπου δ ἡ διάκεντρος αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἐφ' ὅσον ὁ κύκλος (Λ, ρ) εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ κύκλου (Κ, R) (σχ. 189), ἕπεται ὅτι κάθε σημεῖον τοῦ κύκλου (Λ, ρ) ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον Κ ἀπόστασιν μεγαλυτέραν τῆς ἀκτῖνος R τοῦ κύκλου (Κ, R). Τότε καὶ ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις ΚΑ τοῦ σημείου Κ ἀπὸ τὸν κύκλον (Λ,ρ) θὰ εἶναι

μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος R, ἤτοι (§ 188) θὰ εἶναι $KA > R$ ἢ $\delta - \rho > R \Rightarrow$ $\delta > R + \rho$.

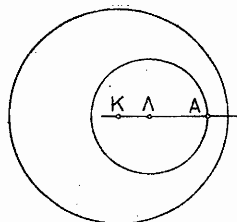
195. Θεώρημα. Ἐὰν δύο κύκλοι (K, R) καὶ (Λ, ρ) δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον καὶ ὁ εἷς εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ ἄλλου, τότε εἶναι $\delta < |R - \rho|$, ὅπου δ ἡ διάκεντρος αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι ὁ κύκλος (Λ, ρ) εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου (K, R) καὶ ἄρα εἶναι $R > \rho$. Τότε ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ (Λ, ρ) θὰ ἀπέχουν ἀπὸ τὸ κέντρον K τοῦ κύκλου (K, R) ἀπόστασιν μικροτέραν τῆς ἀκτῖνος R (σχ. 190). Ἄρα καὶ ἡ μεγίστη ἀπόστασις KA τοῦ σημείου K ἀπὸ τὸν κύκλον (Λ, ρ), θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος R, ἤτοι (§ 188) θὰ εἶναι

$$KA < R \quad \text{ἢ} \quad \delta + \rho < R$$
$$\text{ἢ} \quad \delta < R - \rho.$$

Ἐὰν εἶναι $R < \rho$, τότε θὰ ἔχωμεν $\delta < \rho - R$. Γενικῶς ἔχομεν :

$\delta < |R - \rho|$ ὅταν δὲν γνωρίζωμεν σχέσιν μεγέθους τῶν ἀκτίνων.



Σχ. 190

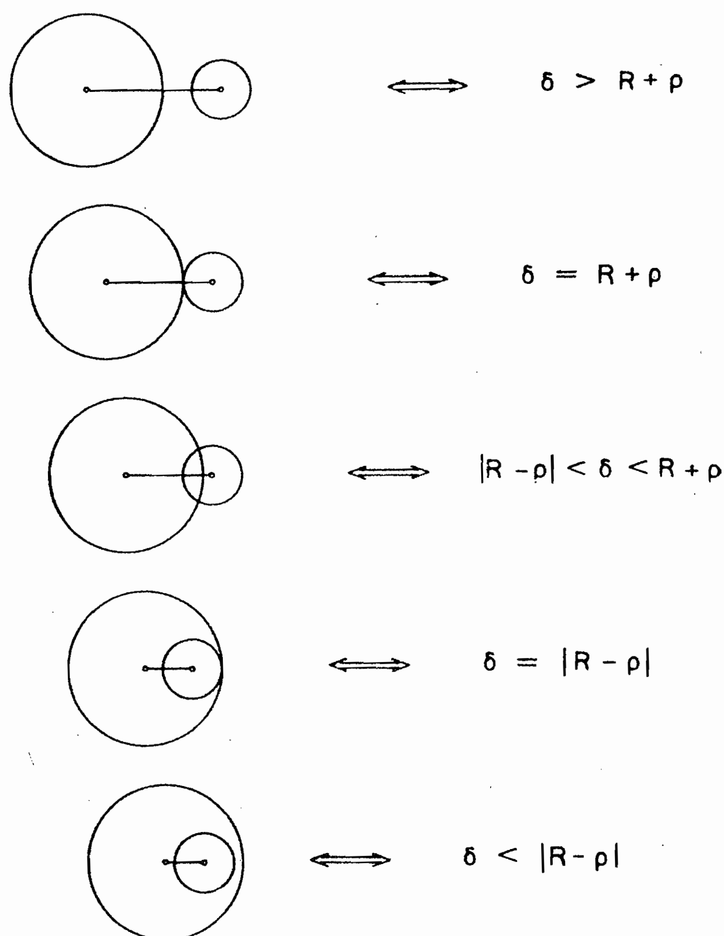
Διὰ τὰ προηγούμενα θεωρήματα τῶν σχετικῶν θέσεων δύο συνεπιπέδων κύκλων, ἰσχύουν καὶ τὰ ἀντίστροφα, τὰ ὁποῖα συνοψίζομεν εἰς τὸ ἑπόμενον θεώρημα :

196. Θεώρημα. Ἐὰν (K, R) καὶ (Λ, ρ) εἶναι δύο συνεπίπεδοι κύκλοι, διὰ τοὺς ὁποίους ἰσχύει: $|R - \rho| < \delta < R + \rho$, ἢ $\delta = R + \rho$, ἢ $\delta = |R - \rho|$, ἢ $\delta > |R + \rho|$, ἢ $\delta < |R - \rho|$, τότε οἱ δύο κύκλοι τέμνονται εἰς δύο σημεῖα, ἢ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς, ἢ ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς, ἢ ὁ εἷς εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ ἄλλου, ἢ ὁ εἷς εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ ἄλλου ἀντιστοίχως.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι διὰ τοὺς κύκλους (K, R) καὶ (Λ, ρ) ἰσχύει $|R - \rho| < \delta < R + \rho$. Τότε ἀποκλείεται τὸ ἐνδεχόμενον, οἱ δύο κύκλοι νὰ ἐφάπτωνται ἐξωτερικῶς ἢ ἐσωτερικῶς, διότι τότε θὰ ἦτο $\delta = R + \rho$ (§ 192) ἢ $\delta = |R - \rho|$ (§ 193) ἀντιστοίχως, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν γενομένην ὑπόθεσιν. Ἐπίσης ἀποκλείεται οἱ δύο κύκλοι νὰ μὴ ἔχουν κοινὸν σημεῖον, διότι τότε θὰ ἦτο ἢ $\delta > R + \rho$ (§ 194) ἢ $\delta < |R - \rho|$ (§ 195), ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἄρα κατ' ἀνάγκην οἱ δύο κύκλοι θὰ τέμνωνται εἰς δύο σημεῖα.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς ὅτι ἑκάστη τῶν ὑπολοίπων συνθηκῶν $\delta = R + \rho$, $\delta = |R - \rho|$, $\delta > R + \rho$ καὶ $\delta < |R - \rho|$, ἐξασφαλίζει τὴν ἀντίστοιχον θέσιν τῶν δύο κύκλων.

Συνοπτικὴ ἀνακεφαλαίωσις τῶν σχετικῶν θέσεων δύο κύκλων εἰς τὸ ἐπίπεδον.



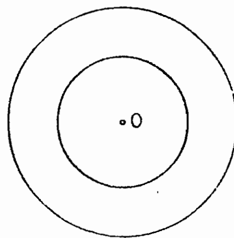
Σχ. 191

Μὲ δ συμβολίζομεν τὴν διάκεντρον ΚΛ τῶν δύο κύκλων (Κ, R) καὶ (Λ, ρ).

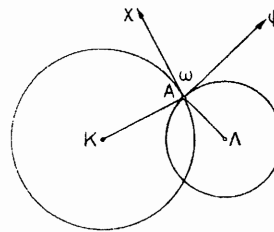
197. Ὁμόκεντροι κύκλοι καλοῦνται δύο κύκλοι ὅταν ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον. Ἡ διάκεντρος αὐτῶν εἶναι μηδενικὴ καὶ ὁ εἷς κύκλος εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ ἄλλου (σχ. 192).

198. Γωνία δύο τεμνομένων κύκλων καλεῖται ἡ κυρτὴ γωνία ω τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ ἐφαπτόμεναι ἡμιευθεῖαι Ax, Ay τῶν κύκλων εἰς ἓν τῶν κοινῶν σημείων των Α, ὅταν αὗται δὲν τέμνουν τοὺς κύκλους (σχ. 193). Ἡ γωνία αὐτῶν ω εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας $\widehat{ΚΑΛ}$, ποὺ σχηματίζουν αἱ ἐκ τοῦ κοινοῦ σημείου Α ἀγόμεναι ἀκτῖνες τῶν δύο κύκλων (διατί ;)

199. Ὀρθογώνιοι κύκλοι ἢ κύκλοι τεμνόμενοι ὀρθογωνίως καλοῦνται δύο κύκλοι, τῶν ὁποίων ἡ γωνία ω εἶναι ὀρθή.



Σχ. 192



Σχ. 193

200. Ἐφαπτόμενον τμῆμα. Ἐὰν Σ εἶναι σημεῖον ἐκτὸς κύκλου κέντρου Ο (σχ. 194) καὶ (ε) μία εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Σ καὶ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου εἰς σημεῖον Α, τὸ τμῆμα ΣΑ καλεῖται ἐφαπτόμενον τμῆμα ἐκ τοῦ σημείου Σ πρὸς τὸν κύκλον κέντρου Ο.

201. Θεώρημα. Ἐὰν ΣΑ εἶναι ἓν ἐφαπτόμενον τμῆμα ἐκ σημείου Σ ἐκτὸς κύκλου κέντρου Ο πρὸς τὸν κύκλον, τότε ὑπάρχει καὶ δεύτερον ἐφαπτόμενον τμῆμα ΣΑ′ ἐκ τοῦ σημείου Σ πρὸς τὸν κύκλον καὶ εἶναι:

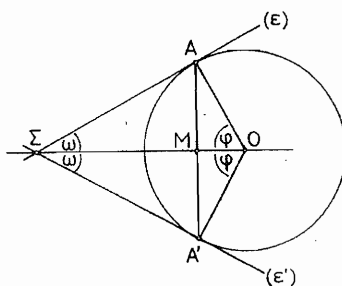
i) ΣΑ = ΣΑ′

ii) Ἡ ΣΟ εἶναι διχοτόμος τῆς κυρτῆς γωνίας $\widehat{A\Sigma A'}$.

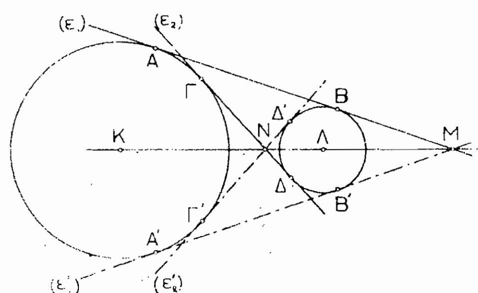
iii) Ἡ ΣΟ εἶναι διχοτόμος τῆς κυρτῆς γωνίας $\widehat{AOA'}$.

iv) Ἡ ΣΟ εἶναι μεσοκάθετος τῆς χορδῆς ΑΑ′.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ἡ ΣΟ περιέχει διάμετρον τοῦ κύκλου, ἔπεται ὅτι εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος (σχ. 194). Ἄρα τὸ τμῆμα ΣΑ′, συμμετρικὸν τοῦ ΣΑ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα ΣΟ, εἶναι καὶ αὐτὸ ἐφαπτόμενον τοῦ κύκλου καὶ μάλιστα εἰς σημεῖον Α′ συμμετρικὸν τοῦ Α ὡς πρὸς ἄξονα τὸν ΣΟ. Τότε, λόγῳ τῆς συμμετρίας ἰσχύουν αἱ προτάσεις i), ii), iii) καὶ iv).



Σχ. 194



Σχ. 195

202. Κοινὴ ἐφαπτομένη δύο κύκλων καλεῖται μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἐφάπτεται καὶ εἰς τοὺς δύο κύκλους.

Μία κοινὴ ἐφαπτομένη (ε_1) δύο κύκλων κέντρων Κ καὶ Λ καλεῖται **ἐξωτερική**, ἐὰν ἀφήνῃ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος της τοὺς δύο κύκλους, ὅπως ἡ ΑΒ (σχ. 195) καὶ μία κοινὴ ἐφαπτομένη (ε_2) καλεῖται **ἐσωτερική**, ἐὰν ἀφήνῃ ἑκατέρωθεν αὐτῆς τοὺς δύο κύκλους, ὅπως ἡ ΓΔ.

Ἐὰν εὐθεῖα (ε_1) εἶναι κοινὴ ἐφαπτομένη δύο κύκλων, τότε καὶ ἡ συμμετρικὴ αὐτῆς (ε_1') ὡς πρὸς τὴν διάκεντρον εἶναι κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν δύο κύκλων. Τοῦτο ἕπεται ἐκ τοῦ ὅτι ἡ διάκεντρος τῶν δύο κύκλων εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος. Κατὰ συνέπειαν ἐὰν δύο κοιναὶ ἐφαπτόμεναι (ε_1) καὶ (ε_1') τέμνωνται, τὸ σημεῖον τομῆς αὐτῶν Μ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΚΛ.

Κατὰ τὸ θεώρημα 201, ἔχομεν :

$$MA = MA' \quad \text{καὶ} \quad MB = MB'$$

Δι' ἀφαιρέσεως αὐτῶν κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν :

$$\mathbf{AB = A'B'}.$$

Ὁμοίως ἔχομεν $N\Gamma = N\Gamma'$ καὶ $N\Delta = N\Delta'$. Ἄρα $\Gamma\Delta = \Gamma'\Delta'$.

Ὥστε τὰ κοινὰ ἐφαπτόμενα τμήματα (ἐξωτερικὰ $AB = A'B'$ ἢ ἐσωτερικὰ $\Gamma\Delta = \Gamma'\Delta'$) δύο κύκλων εἶναι ἴσα.

Ἐὰν οἱ δύο κύκλοι εἶναι ἴσοι, τότε αἱ δύο κοιναὶ ἐξωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι εἶναι παράλληλοι (διατί ;).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

227. Δύο κύκλοι κέντρων Κ καὶ Λ τέμνονται εἰς τὰ Α καὶ Β. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν εὐθεῖαν ΓΑΔ // ΚΛ, τέμνουσαν αὐτοὺς εἰς τὰ Γ καὶ Δ. Δείξατε ὅτι εἶναι $\Gamma\Delta = 2K\Lambda$.

228. Δύο κύκλοι κέντρων Κ καὶ Λ τέμνονται εἰς τὰ Α καὶ Β. Δείξατε ὅτι ἐξ ὅλων τῶν τεμνουσῶν αὐτοὺς τῶν διερχομένων διὰ τοῦ Α, μεγαλυτέρα εἶναι ἡ παράλληλος τῆς ΚΛ.

229. Ἐὰν δύο κύκλοι ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον (εἶναι ὁμόκεντροι), ὅλαι αἱ χορδαὶ τοῦ μεγαλυτέρου αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται τοῦ μικροτέρου εἶναι ἴσαι.

230. Δύο κύκλοι ἐφάπτονται εἰς τὸ σημεῖον Α. Διὰ τοῦ Α φέρομεν εὐθεῖαν τέμνουσαν αὐτοὺς εἰς τὰ Β καὶ Γ. Δείξατε ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν κύκλων εἰς τὰ Β καὶ Γ εἶναι παράλληλοι.

231. Ἐκ σημείου Α ἐκτὸς κύκλου κέντρου Κ θεωροῦμεν τὰς ἐφαπτομένας ΑΒ, ΑΓ τοῦ κύκλου καὶ ἔστω Κ' τὸ συμμετρικὸν τοῦ Κ ὡς πρὸς τὴν ΑΓ. Δείξατε ὅτι $\widehat{BAK'} = 3.\widehat{BAK}$.

232. Δείξατε ὅτι ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη δύο κύκλων εἶναι μικροτέρα ἢ τὸ πολὺ ἴση πρὸς τὴν διάκεντρον τῶν κύκλων. Πότε εἶναι ἴση;

233. Δύο κύκλοι κέντρων Κ καὶ Λ ἐφάπτονται τρίτου κύκλου εἰς τὰ Α καὶ Β ἀντιστοίχως. Ἐὰν ἡ ΑΒ τέμνῃ τὸν κύκλον Λ εἰς τὸ Γ, δείξατε ὅτι ΚΑ // ΛΓ.

Β΄.

234. Δίδεται κύκλος κέντρου Κ καὶ διάμετρος ΑΒ αὐτοῦ. Μὲ κέντρον σημεῖον Γ τῆς ἀκτῖνος ΚΒ καὶ ἀκτῖνα ΓΚ γράφομεν κύκλον, ὁ ὁποῖος νὰ τέμνῃ τὸν (Κ, ΚΒ) εἰς τὰ

σημεῖα Δ καὶ Ε. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΔΓ τέμνῃ τὸν κύκλον (Κ, ΚΒ) εἰς τὸ Ζ, δείξατε ὅτι $\widehat{AKZ} = 3.\widehat{BK\Delta}$.

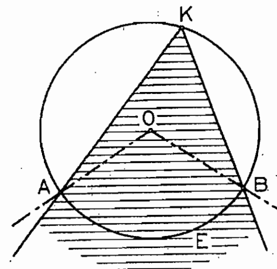
235. Δύο κύκλοι ἀκτίνων ρ καὶ 3ρ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνίαι τῶν κοινῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων αὐτῶν.

236. Δύο κύκλοι κέντρων Κ καὶ Λ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ Α. Ἐὰν ΒΓ εἶναι ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη αὐτῶν, δείξατε ὅτι εἶναι: α) $\widehat{BA\Gamma} = 1^L$, β) ὁ κύκλος μὲ διάμετρον τὴν ΒΓ ἐφάπτεται τῆς διακέντρου εἰς τὸ Α, γ) ὁ κύκλος μὲ διάμετρον τὴν ΚΛ ἐφάπτεται τῆς ΒΓ εἰς τὸ μέσον της.

237. Δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου ΑΚΒ. Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ἡμιευθείας Αx καὶ Βy πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἡμικυκλίου καὶ τρίτην ἐφαπτομένην αὐτοῦ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς Αx καὶ Βy εἰς τὰ Γ καὶ Δ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι: α) ΓΔ = ΑΓ + ΒΔ, β) $\widehat{\Gamma K\Delta} = 1^L$.

203. Ἐγγεγραμμένη γωνία εἰς κύκλον (Ο, R) καλεῖται κάθε γωνία $\widehat{AKB}$, ἡ ὁποία ἔχει τὴν κορυφήν της Κ ἐπὶ τοῦ κύκλου (Ο, R), αἱ δὲ πλευραί της τέμνουν αὐτὸν εἰς σημεῖα Α καὶ Β.

Λέγομεν ἀκόμη ὅτι ἡ $\widehat{AKB}$ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τόξον $\widehat{AKB}$, τὸ ὁποῖον δὲν περιέχεται ἐντὸς τῆς γωνίας καὶ **βαίνει** ἐπὶ τοῦ τόξου $\widehat{AEB}$ τὸ ὁποῖον περιέχεται ἐντὸς τῆς γωνίας (σχ. 196).



Σχ. 196

Ἡ ἐπίκεντρος γωνία $\widehat{AOB}$, ἡ ὁποία περιέχει τὸ αὐτὸ τόξον $\widehat{AB}$ μετὰ τῆς ἐγγεγραμμένης $\widehat{AKB}$, καλεῖται ἀντίστοιχος ἐπίκεντρος τῆς ἐγγεγραμμένης. Εἶναι προφανὲς ὅτι εἰς τὴν ἀντιστοιχίαν αὐτὴν κάθε ἐγγεγραμμένη γωνία ἔχει μίαν ἀντίστοιχον ἐπίκεντρον ἐνῷ κάθε ἐπίκεντρος γωνία εἶναι ἀντίστοιχος ἀπείρων ἐγγεγραμμένων γωνιῶν, τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ εἶναι σημεῖα τοῦ τόξου $\widehat{AKB}$.

ΣΧΕΣΙΣ ΕΠΙΚΕΝΤΡΟΥ ΓΩΝΙΑΣ ΠΡΟΣ ΜΙΑΝ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟΝ ΑΥΤΗΣ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗΝ

204. Θεώρημα. Εἰς δοθέντα κύκλον μία ἐπίκεντρος γωνία εἶναι διπλασία πάσης ἀντιστοίχου πρὸς αὐτὴν ἐγγεγραμμένης.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὁ κύκλος (Ο,R), $\widehat{AOB}$ ἡ ἐπίκεντρος γωνία βαίνουσα εἰς τόξον $\widehat{AB}$ καὶ $\widehat{AMB}$ μία ἀντίστοιχος αὐτῆς ἐγγεγραμμένη. Θὰ διακρίνωμεν τρεῖς περιπτώσεις :

i). Ἡ κορυφὴ Μ εὑρίσκεται εἰς τὴν προέκτασιν τῆς ΑΟ (σχ. 197). Τότε τὸ τρίγωνον ΟΜΒ εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ ΟΜ = ΟΒ = R.

Ἄρα $\widehat{OMB} = \widehat{OBM} = \omega$ ἢ

(1) $\widehat{AMB} = \omega$

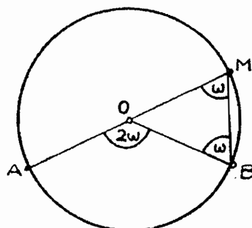
Ἑπομένως (§ 105 I) θὰ εἶναι καί :

(2) $\widehat{AOB} = \omega + \omega = 2\omega$

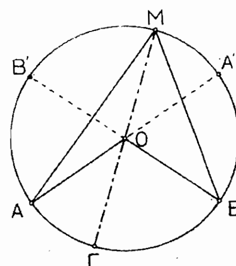
ὡς ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΟΜΒ.

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται :

$$\mathbf{\widehat{AOB} = 2 \cdot \widehat{AMB}}$$



Σχ. 197



Σχ. 198

ii). Ἡ κορυφὴ Μ, εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς κατὰ κορυφὴν τῆς $\widehat{AOB}$ (σχ. 198). Τότε ἡ ἡμιευθεῖα ΜΟ, ἡ ὁποία τέμνει τὸν κύκλον εἰς τὸ Γ, εἶναι ἐσωτερικὴ τῆς $\widehat{AMB}$ καὶ ἡ ΟΓ ἐσωτερικὴ τῆς $\widehat{AOB}$.

Ἑπομένως :

(3) $\widehat{AMB} = \widehat{AM\Gamma} + \widehat{\Gamma MB}$ καὶ

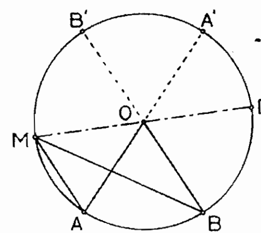
(4) $\widehat{AOB} = \widehat{AO\Gamma} + \widehat{\Gamma OB}$

Κατὰ τὴν περίπτωσιν (i) ἔχομεν :

(5) $\widehat{AO\Gamma} = 2 \cdot \widehat{AM\Gamma}$ καὶ

(6) $\widehat{\Gamma OB} = 2 \cdot \widehat{\Gamma MB}$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (5) καὶ (6) λαμβάνομεν :



Σχ. 199

$$\widehat{AO\Gamma} + \widehat{\Gamma OB} = 2(\widehat{AM\Gamma} + \widehat{\Gamma MB})$$

καὶ δυνάμει τῶν σχέσεων (3) καὶ (4) ἡ τελευταία γράφεται :

$$\mathbf{\widehat{AOB} = 2 \cdot \widehat{AMB}}$$

iii). Ἡ κορυφὴ Μ εὑρίσκεται ἐκτὸς τῆς κατὰ κορυφὴν τῆς $\widehat{AOB}$ (σχ. 199). Τότε ἡ ἡμιευθεῖα ΜΟ, ἡ ὁποία τέμνει τὸν κύκλον εἰς τὸ Γ, εἶναι ἐξωτερικὴ τόσον τῆς $\widehat{AMB}$ ὅσον καὶ τῆς $\widehat{AOB}$.

Ἑπομένως :

(7) $$\widehat{AMB} = \widehat{AM\Gamma} - \widehat{BM\Gamma} \quad \text{καὶ}$$

(8) $$\widehat{AOB} = \widehat{AO\Gamma} - \widehat{BO\Gamma}$$

Κατὰ τὴν περίπτωσιν (i) ἔχομεν :

(9) $$\widehat{AO\Gamma} = 2 \cdot \widehat{AM\Gamma} \quad \text{καὶ}$$

(10) $$\widehat{BO\Gamma} = 2 \cdot \widehat{BM\Gamma}$$

Δι' ἀφαιρέσεως τῶν (9) καὶ (10) κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$$\widehat{AO\Gamma} - \widehat{BO\Gamma} = 2(\widehat{AM\Gamma} - \widehat{BM\Gamma})$$

καὶ δυνάμει τῶν σχέσεων (7) καὶ (8) ἡ τελευταία γράφεται :

$$\widehat{AOB} = 2 \cdot \widehat{AMB}$$

Πόρισμα I. Εἰς δοθέντα κύκλον, ὅλαι αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ἢ ἐπὶ ἴσων τόξων, εἶναι ἴσαι.

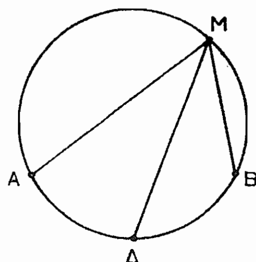
Πράγματι, διότι ὅλαι εἶναι ἴσαι πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς αὐτῆς ἐπικέντρου γωνίας ἢ ἴσων ἐπικέντρων γωνιῶν.

Πόρισμα II. Δύο ἴσαι ἐγγεγραμμέναι γωνίαι εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, ἀποτέμνουν ἴσα τόξα.

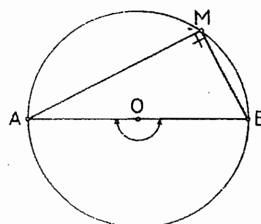
Πόρισμα III. Ἡ διχοτόμος ΜΔ μιᾶς ἐγγεγραμμένης γωνίας $\widehat{AMB}$, ἡ ὁποία βαίνει εἰς τὸ τόξον $\overset{\frown}{AB}$, χωρίζει τοῦτο εἰς δύο ἴσα τόξα $\overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{\Delta B}$. (σχ. 200).

Πόρισμα IV. Μία γωνία ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον εἶναι ὀρθή.

Πράγματι, ἀφοῦ ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς ἐπίκεντρος γωνία εἶναι πεπλατυσμένη (σχ. 201).



Σχ. 200



Σχ. 201

Ἰσχύει καὶ τὸ ἀντίστροφον, δηλαδὴ ἂν μία ὀρθὴ γωνία εἶναι ἐγγεγραμμένη, τότε βαίνει εἰς ἡμικύκλιον, διότι ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς ἐπίκεντρος θὰ εἶναι πεπλατυσμένη καὶ συνεπῶς θὰ χωρίζῃ τὸν κύκλον εἰς δύο ἡμικύκλια.

Παρατήρησις. Ἕν τμῆμα ΑΒ λέγομεν ὅτι φαίνεται ἀπὸ σημεῖον Μ ὑπὸ γωνίαν ω (σχ. 202), ὅταν εἶναι $\widehat{AMB} = \omega$. Τὸ αὐτὸ ἐννοοῦμεν ὅταν λέγωμεν ὅτι τὸ σημεῖον Μ βλέπει τὸ τμῆμα ΑΒ ὑπὸ γωνίαν ω.

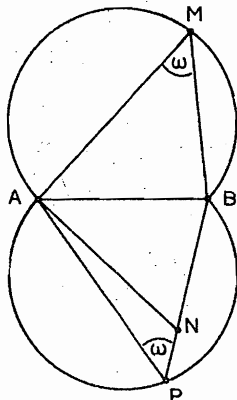
Πόρισμα V. Ἓν τόξον $\widehat{AMB}$ καὶ τὸ συμμετρικόν του ὡς πρὸς τὴν ΑΒ (σχ. 202), ἀποτελοῦν τὸν γ. τόπον τῶν σημείων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ τμῆμα ΑΒ φαίνεται ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν ω (ἢ τὰ ὁποῖα βλέπουν τὸ τμῆμα ΑΒ ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν ω).

Ἐὰν σημεῖον Ν δὲν ἀνήκῃ εἰς τὰ τόξα $\widehat{AB}$, ἀποκλείεται νὰ εἶναι $\widehat{ANB} = \omega$, διότι, ἐπειδὴ ἡ ΝΒ τέμνει τὸ τόξον $\widehat{AB}$ εἰς σημεῖον Ρ, θὰ εἶναι $\widehat{APB} = \omega$ καὶ ἑπομένως ἐὰν ἦτο καὶ $\widehat{ANB} = \omega \Rightarrow AP \parallel AN$, ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα ὁ γ. τόπος εἶναι τὰ δύο τόξα $\widehat{AB}$.

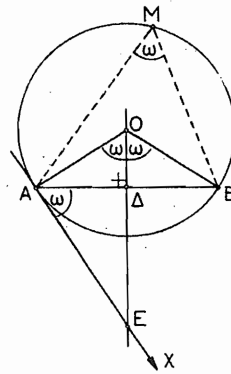
ΓΩΝΙΑ ΣΧΗΜΑΤΙΖΟΜΕΝΗ ΥΠΟ ΧΟΡΔΗΣ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΚΗΣ

205. Θεώρημα. Ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ χορδῆς κύκλου καὶ ἐφαπτομένης εἰς τὸ ἓν ἄκρον τῆς χορδῆς, εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐγγεγραμμένην γωνίαν εἰς τὸ τόξον ποὺ δὲν περιέχεται ἐντὸς τῆς πρώτης γωνίας.

Ἀπόδειξις. Ἔστω κύκλος κέντρου Ο, ΑΒ μία χορδὴ αὐτοῦ καὶ Αx ἡ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου εἰς τὸ ἄκρον Α τῆς χορδῆς.



Σχ. 202



Σχ. 203

i). Ἡ γωνία εἶναι ὀξεῖα. Ἐὰν ἡ χορδὴ δὲν εἶναι διάμετρος, θεωροῦμεν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ω, ἡ ὁποία σχηματίζεται ὑπ' αὐτῆς καὶ τῆς ἐφαπτομένης καὶ φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΑ, ἡ ὁποία θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην Αx (σχ. 203). Φέρομεν τὴν $O\Delta \perp AB$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Αx εἰς σημεῖον Ε. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΟΑΕ ἔχουν τὴν γωνίαν $\widehat{E}$ κοινήν. Ἄρα θὰ εἶναι ἰσογώνια καὶ ἑπομένως θὰ ἔχουν καὶ

$$(1) \qquad \Delta\widehat{A}E = A\widehat{O}E = \omega$$

Ἔχομεν ὅμως $B\widehat{O}\Delta = A\widehat{O}\Delta = \omega$ λόγῳ συμμετρίας ὡς πρὸς ἄξονα τὸν ΟΔ

καὶ ἐπομένως $\widehat{AOB} = 2\omega$. Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι εἶναι καὶ $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$ (§ 204). Ἄρα :

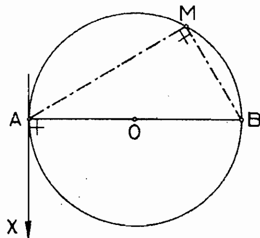
$$(2) \qquad \widehat{AMB} = \omega$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι εἶναι $\widehat{\Delta AE} = \widehat{AMB}$ ἤτοι :

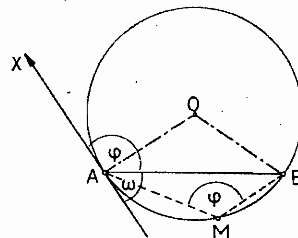
$$\widehat{BAx} = \widehat{AMB}$$

ii). Ἡ γωνία εἶναι ὀρθή. Τοῦτο συμβαίνει μόνον ὅταν ἡ χορδὴ AB εἶναι διάμετρος (σχ. 204). Ἀλλὰ τότε ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία $\widehat{AMB}$ εἶναι ὀρθὴ ὡς βαίνουσα εἰς ἡμικύκλιον.

Ἄρα : $$\widehat{BAx} = \widehat{AMB}$$



Σχ. 204



Σχ. 205

iii). Ἡ γωνία εἶναι ἀμβλεῖα. Ἔστω $\widehat{BAx} = \varphi > 1^{L}$ (σχ. 205). Τότε, ἂν ω εἶναι ἡ παραπληρωματική της, γνωρίζομεν ὅτι :

$$\omega = \frac{\widehat{AOB}}{2}. \text{ Ἄρα } \widehat{BAx} = \varphi = 2^{L} - \omega = 2^{L} - \frac{\widehat{AOB}}{2} =$$

$$= \frac{4^{L} - \widehat{AOB}}{2} = \frac{\overset{\smile}{AOB}}{2} = \widehat{AMB}$$

ὅπου μὲ τὸ σύμβολον $\overset{\smile}{AOB}$ ἐννοοῦμεν τὴν μὴ κυρτὴν γωνίαν μὲ πλευρὰς τὰς OA καὶ OB. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως ἕπεται :

$$\widehat{BAx} = \widehat{AMB}$$

ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΤΕΜΝΟΜΕΝΩΝ ΧΟΡΔΩΝ ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

206. Θεώρημα. Ἐὰν δύο χορδαὶ κύκλου τέμνωνται εἰς σημεῖον ἐσωτερικὸν αὐτοῦ, ἡ γωνία, τὴν ὁποία σχηματίζουν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἐπικέντρων γωνιῶν ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ τόξα τὰ περιλαμβανόμενα ἐντὸς τῆς γωνίας καὶ τῆς κατὰ κορυφήν της.

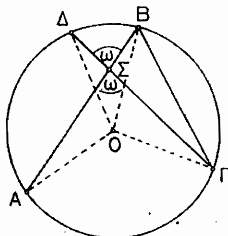
Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν αἱ χορδαὶ AB καὶ ΓΔ κύκλου (O, R) τεμνόμεναι

εἰς σημεῖον Σ ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου καὶ ω ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν (σχ. 206). Φέρομεν τὴν ΒΓ καὶ ἐκ τοῦ τριγώνου ΣΒΓ λαμβάνομεν :

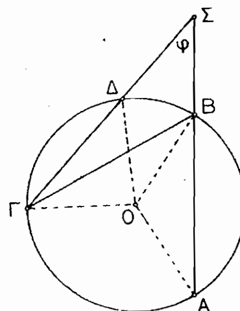
$$\omega = \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = A\widehat{B}\Gamma + B\widehat{\Gamma}\Delta = \frac{A\widehat{O}\Gamma}{2} + \frac{B\widehat{O}\Delta}{2}$$

Ἄρα :
$$\omega = \frac{A\widehat{O}\Gamma + B\widehat{O}\Delta}{2}$$

207. Θεώρημα. Ἐὰν δύο χορδαὶ κύκλου τέμνωνται προεκτεινόμεναι ἐκτὸς αὐτοῦ, ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν ἰσοῦται πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν ἐπικέντρων γωνιῶν ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ τόξα τὰ περιλαμβανόμενα ἐντὸς τῆς γωνίας.



Σχ. 206



Σχ. 207

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν αἱ χορδαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ κύκλου (Ο, R), αἱ ὁποῖαι προεκτεινόμεναι τέμνονται εἰς σημεῖον Σ ἐκτὸς τοῦ κύκλου καὶ φ ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν (σχ. 207). Φέρομεν τὴν ΒΓ καὶ ἐκ τοῦ τριγώνου ΣΒΓ λαμβάνομεν :

$$A\widehat{B}\Gamma = \varphi + B\widehat{\Gamma}\Delta \quad \text{ἤ}$$

$$\varphi = A\widehat{B}\Gamma - B\widehat{\Gamma}\Delta = \frac{A\widehat{O}\Gamma}{2} - \frac{B\widehat{O}\Delta}{2}$$

ἄρα:
$$\varphi = \frac{A\widehat{O}\Gamma - B\widehat{O}\Delta}{2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α.΄

238. Δύο ἴσοι κύκλοι τέμνονται εἰς τὰ Α καὶ Β. Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν αὐτοὺς ΓΑΔ καὶ ἐκ τοῦ Β φέρομεν κάθετον ΒΜ ἐπ' αὐτήν. Δείξατε ὅτι τὸ Μ εἶναι μέσον τοῦ τμήματος ΓΔ.

239. Διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Α δύο ἐφαπτομένων κύκλων φέρομεν δύο τεμνούσας αὐτῶν. Δείξατε ὅτι αἱ δύο χορδαὶ ποὺ ὁρίζονται ἀπὸ τὰ δεύτερα σημεῖα τομῆς τῶν κύκλων μετὰ τῶν εὐθειῶν τούτων εἶναι παράλληλοι.

240. Δύο κύκλοι ἀκτίνων ρ καὶ 2ρ ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς τὸ Α. Δείξατε ὅτι κάθε χορδὴ τοῦ μεγαλυτέρου ποὺ ἄγεται ἀπὸ τὸ Α διχοτομεῖται ἀπὸ τὸν μικρότερον κύκλον.

241. Μὲ διαμέτρους τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ γράφομεν δύο κύκλους. Δείξατε ὅτι τὸ δεύτερον σημεῖον Δ τῆς τομῆς των εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ΒΓ καὶ ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ.

242. Ἐὰν Α, Β, Γ, Δ εἶναι τέσσαρα σημεῖα διαδοχικὰ ἑνὸς κύκλου καὶ Κ, Λ, Μ, Ν τὰ μέσα τῶν τόξων $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{\Gamma\Delta}$, $\widehat{\Delta A}$, δείξατε ὅτι αἱ χορδαὶ ΚΜ καὶ ΛΝ τέμνονται καθέτως.

243. Μὲ διαμέτρους τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ γράφομεν δύο κύκλους. Ἀπὸ τὰ Β καὶ Γ φέρομεν παραλλήλους χορδὰς ΒΔ, ΓΕ. Δείξατε ὅτι τὰ σημεῖα Δ, Α, Ε κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

244. Κύκλος κέντρου Κ ἐφάπτεται εἰς ἄλλον κύκλον κέντρου Λ εἰς τὸ Α καὶ εὐθείας (ε) εἰς τὸ Β. Ἐὰν ἡ ΒΑ τέμνῃ τὸν δεύτερον κύκλον εἰς τὸ Γ, δείξατε ὅτι εἶναι $\Gamma\Lambda \perp (\varepsilon)$

245. Μὲ διάμετρον τὴν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου γράφομεν κύκλον. Ἐὰν οὗτος τέμνῃ τὴν ὑποτείνουσαν εἰς σημεῖον Μ, δείξατε ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον Μ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς τρίτης πλευρᾶς.

Β'.

246. Δίδεται κύκλος κέντρου Ο καὶ διάμετρος ΑΒ αὐτοῦ. Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ τυχοῦσαν χορδὴν ΓΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ε. Ἐὰν ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ Δ τέμνῃ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ζ, δείξατε ὅτι εἶναι ΖΔ = ΖΕ.

247. Δύο κύκλοι τέμνονται εἰς τὰ Α καὶ Β καὶ ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τῆς κοινῆς χορδῆς ΑΒ. Διὰ τοῦ Μ θεωροῦμεν τυχοῦσαν τέμνουσαν τοὺς κύκλους εἰς τὰ σημεῖα Γ, Δ, Ε, Ζ διαδοχικῶς. Δείξατε ὅτι $\widehat{\Gamma A\Delta} = \widehat{EBZ}$.

248. Ἔστω κύκλος κέντρου Κ καὶ Α, Β, Γ τρία σημεῖα αὐτοῦ. Φέρομεν τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὸν κύκλον εἰς τὰ Δ καὶ Ε. Δείξατε ὅτι ἡ ΔΕ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΑΟ, ὅπου Ο εἶναι τὸ ἔγκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

249. Ἐπ' εὐθείας (δ) λαμβάνομεν διαδοχικῶς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Μὲ διαμέτρους τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ γράφομεν δύο κύκλους καὶ θεωροῦμεν τὴν κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην ΕΖ αὐτῶν, ὅπου τὸ Ε εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου διαμέτρου ΑΒ. Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΕ, ΒΕ, ΓΖ, ΔΖ τεμνόμεναι σχηματίζουν ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ ἄλλη διαγώνιος εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον.

250. Διὰ τοῦ ἑνὸς κοινοῦ σημείου Α δύο τεμνομένων κύκλων θεωροῦμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΒΑΓ τέμνουσαν αὐτούς. Δείξατε ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ Β καὶ Γ τέμνονται ὑπὸ γωνίαν σταθεράν.

251. Δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς τὸ Α. Θεωροῦμεν χορδὴν ΒΓ τοῦ μεγαλυτέρου κύκλου, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τοῦ μικροτέρου εἰς τὸ Δ. Δείξατε ὅτι ἡ ΑΔ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν $\widehat{BA\Gamma}$.

252. Δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ Α. Θεωροῦμεν χορδὴν ΒΓ τοῦ ἑνὸς κύκλου, ἡ ὁποία προεκτεινομένη ἐφάπτεται τοῦ ἄλλου εἰς τὸ Δ. Δείξατε ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας $\widehat{A}$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΕΙΣ ΚΥΚΛΟΝ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

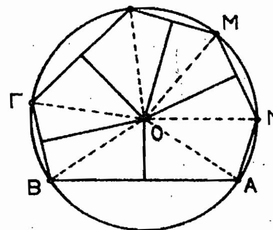
208. Ὁρισμός. Ἓν πολύγωνον ΑΒΓ...Ν καλεῖται ἐγγεγραμμένον (ἢ ἐγγράψιμον) εἰς κύκλον τότε καὶ μόνον τότε ὅταν αἱ κορυφαί του εἶναι (ἢ δύνανται νὰ εἶναι) σημεῖα ἑνὸς κύκλου.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἕπεται ὅτι αἱ πλευραὶ ὡς καὶ αἱ διαγώνιοι τοῦ πολυγώνου εἶναι χορδαὶ τοῦ κύκλου.

Αἱ κορυφαὶ τοῦ πολυγώνου καλοῦνται **ὁμοκυκλικὰ** ἢ ὁμοκύκλια σημεῖα.

Ὁ κύκλος καλεῖται **περιγεγραμμένος** περὶ τὸ πολύγωνον.

209. Θεώρημα. Ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα ἓν πολύγωνον ΑΒΓ ... Ν μὲ ν πλευρὰς εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (Ο, R), εἶναι αἱ ν - 1 μεσοκάθετοι τῶν ν - 1 πλευρῶν του νὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.



Σχ. 208

Ἀπόδειξις. i) Εἶναι ἀναγκαία. Ἔστω τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον ΑΒΓ ... Ν εἰς τὸν κύκλον (Ο, R). Ἐπειδὴ αἱ πλευραί του εἶναι χορδαὶ τοῦ κύκλου, ἕπεται ὅτι ἡ μεσοκάθετος ἑκάστης διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον Ο τοῦ κύκλου (σχ. 208). Ἄρα τὸ θεώρημα ἰσχύει.

ii) Εἶναι ἱκανή. Ἔστω ὅτι τοῦ πολυγώνου ΑΒΓ... ΜΝ αἱ μεσοκάθετοι τῶν ν - 1 πλευρῶν του ΑΒ, ΒΓ,..., ΜΝ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο. Τότε τὸ σημεῖον τοῦτο, ὡς ἀνῆκον εἰς ἑκάστην τῶν μεσοκαθέτων τούτων θὰ ἰσαπέχῃ ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς, ἤτοι θὰ εἶναι :

(1) $$ΟΑ = ΟΒ, \quad ΟΒ = ΟΓ, ..., ΟΜ = ΟΝ$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) ἕπεται ὅτι :

$$ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ... = ΟΝ$$

Ἄρα, ἐὰν μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ ἐκ μιᾶς κορυφῆς γραφῇ κύκλος, οὗτος θὰ διέλθῃ δι' ὅλων τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου, ἑπομένως τὸ πολύγωνον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

Πόρισμα Ι. Κάθε τρίγωνον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον εὑρίσκεται εἰς τὴν τομὴν τῶν μεσοκαθέτων τῶν πλευρῶν του (τὸ κέντρον τοῦ κύκλου λέγεται **περίκεντρον** (§ 158)).

Πόρισμα ΙΙ. Διὰ τριῶν σημείων μὴ κειμένων ἐπὶ εὐθείας εἷς καὶ μόνον εἷς κύκλος διέρχεται, διότι ἓν εἶναι τὸ περίκεντρον τοῦ τριγώνου μὲ κορυφὰς τὰ σημεῖα αὐτά.

Πόρισμα ΙΙΙ. Ἐὰν δύο κύκλοι ἔχουν τρία κοινὰ σημεῖα, τότε ταυτίζονται.

ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

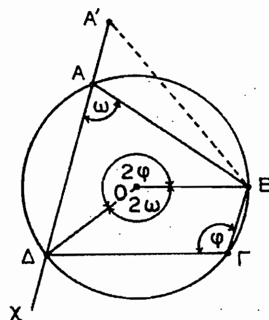
210. Θεώρημα. Ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα ἓν κυρτὸν τετράπλευρον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, εἶναι δύο ἀπέναντι γωνίαι του νὰ εἶναι παραπληρωματικαί.

Ἀπόδειξις. i) Εἶναι ἀναγκαία. Ἔστω τὸ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον κέντρου Ο (σχ. 209). Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΒ καὶ ΟΔ. Ἡ γωνία $\widehat{A} = \omega$ εἶναι ἐγγεγραμμένη. Ἄρα ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς ἐπίκεντρος θὰ εἶναι $\widehat{\Delta O B} = 2\omega$. Ὁμοίως ἡ γωνία $\widehat{\Gamma} = \varphi$ εἶναι ἐγγεγραμμένη. Ἄρα ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς ἐπίκεντρος θὰ εἶναι $\widecheck{BO\Delta} = 2\varphi$. Ἀλλὰ $2\omega + 2\varphi = 4^L$, Ἄρα: $\omega + \varphi = 2^L$, ἤτοι: $\widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 2^L$

ii) Εἶναι ἱκανή. Ἔστω ὅτι εἰς τὸ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι:

(1) $$\widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 2^L \Longleftrightarrow \widehat{BAx} + \widehat{\Gamma} = 2^L$$

Θεωροῦμεν τὸν κύκλον, ὁ ὁποῖος ὁρίζεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Β, Γ καὶ Δ. Ἂν αὐτὸς διέρχεται διὰ τοῦ Α, τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη. Ἂν ὅμως δὲν διέρχεται διὰ τοῦ Α θὰ τέμνῃ τὴν ΔΑ εἰς σημεῖον Α′, ὁπότε τὸ τετράπλευρον Α′ΒΓΔ θὰ εἶναι ἐγγεγραμμένον.



Σχ. 209

Ἄρα:

(2) $$\widehat{BA'x} + \widehat{\Gamma} = 2^L$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι $\widehat{BAx} + \widehat{\Gamma} = \widehat{BA'x} + \widehat{\Gamma} \Rightarrow \widehat{BAx} = \widehat{BA'x}$. Ἐξ αὐτῆς ὅμως ἕπεται $AB \parallel A'B$, ὅπερ ἄτοπον.

Ἄρα ὁ κύκλος ποὺ διέρχεται διὰ τῶν Β, Γ καὶ Δ κατ' ἀνάγκην θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ Α. Ἄρα τὸ ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον.

211. Θεώρημα. Ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα ἓν κυρτὸν τετράπλευρον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, εἶναι μία ἐξωτερικὴ γωνία του νὰ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς ἐσωτερικήν.

Ἀπόδειξις. i) Εἶναι ἀναγκαία. Ἔστω ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 210) εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Τότε θὰ εἶναι:

(1) $$\widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 2^L$$

Ἐπίσης ὅμως εἶναι:

(2) $$\widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma}_1 = 2^L$$

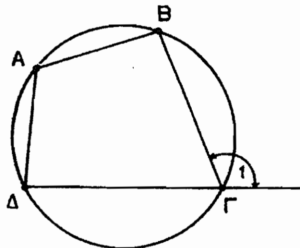
Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἕπεται

$$\widehat{A} + \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma}_1 \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{\Gamma}_1.$$

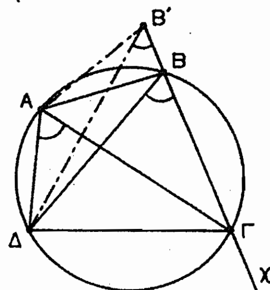
ii) Εἶναι ἱκανή. Ἔστω ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις

(3) $$\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{A}$$

Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{\Gamma}_1 + \widehat{\Gamma} = 2^{L}$, λόγῳ τῆς (3) αὕτη γράφεται $\widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 2^{L}$. Ἄρα τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον.



Σχ. 210



Σχ. 211

212. Θεώρημα. Ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα ἓν κυρτὸν τετράπλευρον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον εἶναι μία πλευρά του νὰ φαίνεται ἀπὸ τὰς ἀπέναντι αὐτῆς κορυφὰς ὑπὸ ἴσας γωνίας.

Ἀπόδειξις. i) Εἶναι ἀναγκαία. Ἔστω τὸ κυρτὸν ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Φέρομεν τὰς διαγωνίους ΑΓ καὶ ΒΔ. Αἱ γωνίαι $\Delta\widehat{A}\Gamma$ καὶ $\Delta\widehat{B}\Gamma$ εἶναι ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου $\widehat{\Gamma\Delta}$ (σχ. 211). Ἄρα εἶναι ἴσαι, ἤτοι :

$$\Delta\widehat{A}\Gamma = \Delta\widehat{B}\Gamma$$

Ὥστε ἡ πλευρὰ ΓΔ φαίνεται ὑπὸ ἴσας γωνίας ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α καὶ Β.

ii) Εἶναι ἱκανή. Ἐὰν τοῦ κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἡ πλευρὰ ΓΔ φαίνεται ἀπὸ τὰς ἀπέναντι αὐτῆς κορυφὰς Α καὶ Β ὑπὸ ἴσας γωνίας, τοῦτο εἶναι ἐγγράψιμον. Διότι ἂν δὲν ἦτο, ὁ κύκλος ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Γ καὶ Δ θὰ ἔτεμνε τὴν ΓΒ ἔστω εἰς τὸ Β′, ὁπότε τὸ τετράπλευρον ΑΒ′ΓΔ θὰ ἦτο ἐγγεγραμμένον καὶ ἑπομένως θὰ ἦτο :

(1) $$\Delta\widehat{A}\Gamma = \Delta\widehat{B'}x$$

Ἐξ ὑποθέσεως ὅμως ἔχομεν ὅτι :

(2) $$\Delta\widehat{A}\Gamma = \Delta\widehat{B}\Gamma \iff \Delta\widehat{A}\Gamma = \Delta\widehat{B}x$$

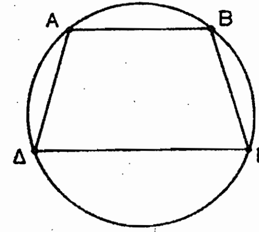
Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι : $\Delta\widehat{B}x = \Delta\widehat{B'}x$

Ἐξ αὐτῆς ὅμως ἕπεται ΒΔ / /Β′Δ, ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα ὁ κύκλος ποὺ διέρχεται διὰ τῶν Α, Γ καὶ Δ κατ' ἀνάγκην θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ Β. Ἄρα τὸ ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον.

ΤΡΑΠΕΖΙΟΝ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΝ ΕΙΣ ΚΥΚΛΟΝ

213. Θεώρημα. Ἐὰν ἓν τραπέζιον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον τραπέζιον ΑΒΓΔ, μὲ ΑΒ//ΓΔ (σχ. 212). Αἱ παράλληλοι χορδαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ ὁρίζουν ἐντὸς τῆς ζώνης αὐτῶν δύο ἴσα τόξα $\widehat{ΒΓ}$ καὶ $\widehat{ΑΔ}$ (§ 181). Ἄρα καὶ αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν χορδαὶ εἶναι ἴσαι, ἤτοι ΒΓ = ΑΔ καὶ ἑπομένως τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ εἶναι ἰσοσκελές.



Σχ. 212

Ἀντιστρόφως. Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ. Τοῦτο ὡς ἰσοσκελές, ἔχει τὰς παρὰ ἑκάστην βάσιν του γωνίας ἴσας, ἤτοι :

(1) $\widehat{Γ} = \widehat{Δ}$

Ἐπὶ πλέον, λόγῳ τῶν παραλλήλων ΑΒ // ΓΔ, ἔχει $\widehat{Β} + \widehat{Γ} = 2^{L}$. Ἡ τελευταία, λόγῳ τῆς σχέσεως (1), γράφεται $\widehat{Β} + \widehat{Δ} = 2^{L}$. Ἄρα τὸ τραπέζιον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, ὡς ἔχον δύο ἀπέναντι γωνίας του παραπληρωματικάς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

253. Δείξατε ὅτι κάθε παραλληλόγραμμον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον εἶναι ὀρθογώνιον.

254. Ἀπὸ σημεῖον Ο κείμενον ἐκτὸς κύκλου κέντρου Κ φέρομεν τὴν ΟΚ καὶ τὸ ἐφαπτόμενον τμῆμα ΟΑ. Ἐκ τοῦ Ο θεωροῦμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν (δ) καὶ ἐκ τοῦ Κ φέρομεν ΚΒ⊥(δ). Δείξατε ὅτι τὸ τετράπλευρον ποὺ ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα Κ, Α, Β, Ο εἶναι ἐγγράψιμον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του.

255. Δύο κύκλοι τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Διὰ τῶν Α καὶ Β φέρομεν ἀνὰ μίαν τέμνουσαν αὐτοὺς ΓΑΔ καὶ ΕΒΖ. Ἐὰν τὰ Γ καὶ Ε εἶναι σημεῖα τοῦ ἑνὸς κύκλου, καὶ Δ καὶ Ζ τοῦ ἄλλου δείξατε ὅτι ΓΕ // ΔΖ.

256. Ἐὰν ἀπὸ σημεῖον Μ ἀχθοῦν κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς μιᾶς γωνίας $x\widehat{O}y$, τὰ σημεῖα τομῆς ἑκάστης καθέτου μὲ τὴν ἄλλην πλευράν, τὰ συμμετρικὰ τοῦ Μ ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας καὶ τὸ σημεῖον Ο, εἶναι ὁμοκυκλικὰ σημεῖα.

257. Ἐὰν ΑΒΓΔ εἶναι τετράπλευρον ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ ΒΕ, ΓΖ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ΓΔ, ΑΒ ἀντιστοίχως, δείξατε ὅτι ΕΖ // ΑΔ.

Β'.

258. Δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου ΑΒ. Λαμβάνομεν δύο ἴσα τόξα $\widehat{ΒΓ} = \widehat{ΓΔ}$ μικρότερα τεταρτοκυκλίου καὶ σημεῖον Ε τοῦ τόξου $\widehat{ΑΔ}$. Ἐὰν αἱ χορδαὶ ΑΓ καὶ ΒΕ τέμνωνται εἰς τὸ Ο, αἱ δὲ ΑΔ καὶ ΓΕ εἰς τὸ Ζ δείξατε ὅτι: α) τὸ τετράπλευρον ΑΕΖΟ εἶναι ἐγγράψιμον, β) τὸ Ο ἰσαπέχει ἀπὸ τὴν ΑΒ καὶ ἀπὸ τὸ Ζ.

259. Δίδεται κύκλος κέντρου Κ καὶ χορδὴ ΑΒ αὐτοῦ. Ἀπὸ τὸ μέσον Γ τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ ἄγομεν χορδὰς ΓΔ καὶ ΓΕ, οὕτως ὥστε αὗται νὰ τέμνουν τὴν χορδὴν ΑΒ εἰς τὰ Η καὶ Ζ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι τὸ τετράπλευρον ΔΕΖΗ εἶναι ἐγγράψιμον.

260. Δείξατε ὅτι τὸ ὀρθικὸν τρίγωνον παντὸς τριγώνου ΑΒΓ (δηλαδὴ τὸ τρίγωνον μὲ κορυφὰς τοὺς πόδας τῶν ὑψῶν τοῦ ΑΒΓ) ἔχει ὡς διχοτόμους τὰ ὕψη τοῦ ΑΒΓ.

261. Ἐκ τυχόντος σημείου Μ χορδῆς ΑΒ ἑνὸς κύκλου φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα, ἡ ὁποία διέρχεται δι' αὐτοῦ. Ἐὰν ἡ κάθετος αὕτη τέμνῃ τὰς ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ποὺ ἄγονται ἀπὸ τὰ Α καὶ Β εἰς τὰ Γ καὶ Δ, δείξατε ὅτι ΜΓ = ΜΔ.

262. Δείξατε ὅτι τὰ συμμετρικὰ τοῦ ὀρθοκέντρου ἑνὸς τριγώνου ὡς πρὸς τὰς πλευράς του κεῖνται ἐπὶ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

263. Ὁ κύκλος, ὁ ὁποῖος διέρχεται ἀπὸ δύο ἀπέναντι κορυφὰς ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον τραπεζίου καὶ ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, διέρχεται καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τοῦ τραπεζίου.

264. Δίδεται κύκλος κέντρου Κ καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτοῦ. Φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν ΑΒΓ καὶ ἐκ τοῦ Α κάθετον ἐπὶ τὴν ΚΑ. Αἱ ἐφαπτόμεναι ποὺ ἄγονται εἰς τὰ Β καὶ Γ τέμνουν τὴν κάθετον ταύτην εἰς τὰ Δ καὶ Ε. Δείξατε ὅτι: α) τὰ τετράπλευρα ΚΒΑΔ καὶ ΚΓΕΑ εἶναι ἐγγράψιμα β) ΑΔ = ΑΕ.

265. Δίδονται δύο ἐφεξῆς καὶ ἴσαι γωνίαι $\widehat{xOy}$ καὶ $\widehat{xOz}$ καὶ σημεῖον Μ ἐσωτερικὸν τῆς $\widehat{xOy}$. Ἐκ τοῦ Μ φέρομεν καθέτους ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ ἐπὶ τὰς Ox, Oy, Oz ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι: α) τὰ σημεῖα Μ, Α, Β, Γ, Ο εἶναι ὁμοκυκλικά, β) ΒΑ = ΒΓ.

ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΠΕΡΙ ΚΥΚΛΟΝ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

214. Ὁρισμός. Ἓν πολύγωνον καλεῖται περιγεγραμμένον περὶ κύκλον (ἢ περιγράψιμον) τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν ὅλαι αἱ πλευραί του ἐφάπτωνται (ἢ δύνανται νὰ ἐφάπτωνται) ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

Ὁ κύκλος λέγεται **ἐγγεγραμμένος** εἰς τὸ πολύγωνον.

215. Θεώρημα. Μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα ἓν πολύγωνον μὲ ν πλευρὰς εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον εἶναι αἱ ν - 1 διχοτόμοι τῶν ν - 1 γωνιῶν του νὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀπόδειξις. i) Εἶναι ἀναγκαία. Ἔστω τὸ πολύγωνον $A_1A_2...A_\nu$ τὸ ὁποῖον εἶναι περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον κέντρου Ο (σχ. 213). Ἐπειδὴ ἑκάστη γωνία τοῦ πολυγώνου ἔχει πλευράς, αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται τοῦ κύκλου, ἕπεται ὅτι ἑκάστη διχοτόμος γωνίας διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Ο τοῦ κύκλου (§ 201). Ἄρα ἡ συνθήκη εἶναι ἀναγκαία.

ii) Εἶναι ἱκανή. Ἔστω ὅτι τοῦ πολυγώνου $A_1A_2...A_\nu$ αἱ $\nu-1$ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{A_1}, \widehat{A_2}..., \widehat{A_{\nu-1}}$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο. Ἐκ τοῦ Ο θεωροῦμεν τὰς καθέτους OB_1, OB_2,..., OB_ν ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου. Τὸ σημεῖον Ο, ὡς ἀνῆκον εἰς τὰς $\nu-1$ διχοτόμους τῶν γωνιῶν $\widehat{A_1}, \widehat{A_2},..., \widehat{A_{\nu-1}}$, θὰ ἰσαπέχῃ ἀπὸ τὰς πλευρὰς ἑκάστης γωνίας, ἤτοι :

(1) $$OB_1 = OB_2,\ OB_2 = OB_3, ..., OB_{\nu-1} = OB_\nu.$$

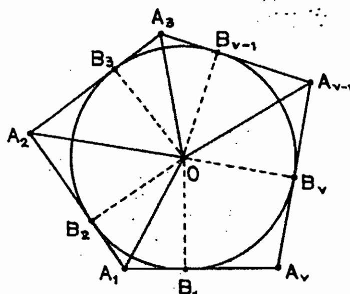
Ἐκ τῶν σχέσεων (1) ἔπεται ὅτι :

$$OB_1 = OB_2 = \dots = OB_\nu$$

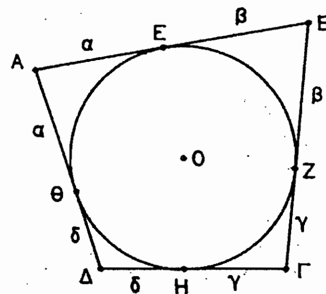
Ἑπομένως ἐὰν μὲ κέντρον τὸ σημεῖον O καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν ἀποστάσεων τούτων, ἔστω τὴν OB_1, γράψωμεν κύκλον, οὗτος θὰ ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου. Ἄρα τὸ πολύγωνον εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον.

Πόρισμα. Κάθε τρίγωνον εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον εὑρίσκεται εἰς τὴν τομὴν τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν του (ἔγκεντρον § 163).

216. Θεώρημα. Ἵνα ἓν τετράπλευρον εἶναι περιγράψιμον περὶ κύκλον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν αὐτοῦ νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι πλευρῶν του.



Σχ. 213



Σχ. 214

Ἀπόδειξις. Ἔστω ΑΒΓΔ ἓν τετράπλευρον περιγεγραμμένον περὶ κύκλον (O, R) καὶ ἔστωσαν Ε, Ζ, Η καὶ Θ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν πλευρῶν του μετὰ τοῦ κύκλου (σχ. 214). Τότε θὰ εἶναι (§ 201) :

$AE = A\Theta = \alpha, \quad BE = BZ = \beta, \quad \Gamma Z = \Gamma H = \gamma$ καὶ $\Delta H = \Delta\Theta = \delta$.

Ἄρα θὰ εἶναι :

(1) $AB + \Gamma\Delta = AE + BE + \Gamma H + \Delta H = \alpha + \beta + \gamma + \delta$ καὶ

(2) $A\Delta + B\Gamma = A\Theta + \Delta\Theta + BZ + \Gamma Z = \alpha + \delta + \beta + \gamma$

Τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) τὰ τελευταῖα μέλη εἶναι ἴσα, ἄρα καὶ τὰ πρῶτα θὰ εἶναι ἴσα, ἤτοι :

(3) $$AB + \Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma.$$

Ἀντιστρόφως. Ἂν εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἰσχύῃ ἡ σχέσις (3), θὰ δείξωμεν ὅτι τοῦτο εἶναι περιγράψιμον περὶ κύκλον.

i) Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι $AB > A\Delta$. Τοτε, ἡ σχέσις (3) γράφεται :

(4) $$AB - A\Delta = B\Gamma - \Gamma\Delta$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται ὅτι εἶναι $B\Gamma > \Gamma\Delta$.

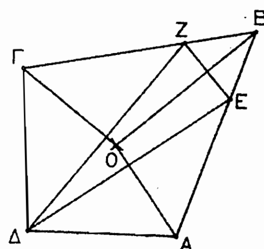
Ἐπὶ τῶν δύο μεγαλυτέρων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΒΓ (σχ. 215) σχηματίζομεν τὰς διαφορὰς τῶν μελῶν τῆς σχέσεως (4), λαμβάνοντες ἐπ' αὐτῶν τμή-

ματα ΑΕ = ΑΔ καὶ ΓΖ = ΓΔ ἀντιστοίχως. Τότε τὰ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΓΔΖ εἶναι ἰσοσκελῆ, ἐνῷ ἡ σχέσις (4) γράφεται

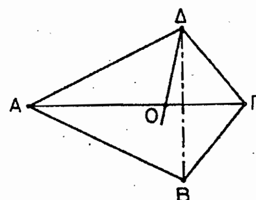
$$ΑΒ - ΑΕ = ΒΓ - ΓΖ \quad ἢ$$
$$ΒΕ = ΒΖ$$

Ἐξ αὐτῆς φαίνεται ὅτι καὶ τὸ τρίγωνον ΒΕΖ εἶναι ἰσοσκελές.

Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{Α}$, $\widehat{Β}$ καὶ $\widehat{Γ}$ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, θὰ εἶναι μεσοκάθετοι τῶν τμημάτων ΔΕ, ΕΖ, καὶ ΔΖ ἀντιστοίχως, λόγῳ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων, ἤτοι μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΔΕΖ. Ἄρα (§ 158) θὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο. Τότε, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, τὸ τετράπλευρον εἶναι περιγράψιμον περὶ κύκλον.



Σχ. 215



Σχ. 216

ii) Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι ΑΒ = ΑΔ (σχ. 216). Τότε ἐκ τῆς σχέσεως (3) ἕπεται ὅτι θὰ εἶναι καὶ ΓΔ = ΒΓ, συνεπῶς τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΓΒΔ εἶναι ἰσοσκελῆ. Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{Α}$ καὶ $\widehat{Γ}$, ὡς μεσοκάθετοι τοῦ αὐτοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΒΔ, συμπίπτουν μὲ τὴν ΑΓ. Ἡ διχοτόμος μιᾶς τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου, ἔστω τῆς $\widehat{Δ}$ τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ο καὶ οὕτω αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{Α}$, $\widehat{Δ}$ καὶ $\widehat{Γ}$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο. Ἄρα τὸ τετράπλευρον εἶναι περιγράψιμον (§ 215).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

266. Κάθε παραλληλόγραμμον περιγεγραμμένον περὶ κύκλον εἶναι ῥόμβος.

267. Εἰς κάθε ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν δύο καθέτων πλευρῶν του ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῆς διαμέτρου τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

268. Ἐὰν ἓν τραπέζιον ΑΒΓΔ μὲ βάσεις τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι πειγεγραμμένον περὶ κύκλον κέντρου Κ, δείξατε ὅτι: α) τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν δύο βάσεων εἶναι ἄκρα τῆς αὐτῆς διαμέτρου καὶ β) $\widehat{ΒΚΓ} = 1^{L}$.

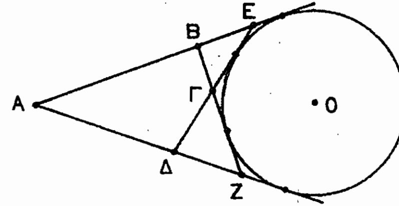
269. Ἐὰν ἰσοσκελοῦς τραπεζίου ἡ διάμεσος ἰσοῦται μὲ μίαν τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του, δείξατε ὅτι τοῦτο εἶναι πειγράψιμον περὶ κύκλον.

270. Ἐὰν οἱ δύο κύκλοι οἱ ἐγγεγραμμένοι εἰς τὰ δύο τρίγωνα εἰς τὰ ὁποῖα τετράπλευρον διαιρεῖται ὑπὸ μιᾶς διαγωνίου του ἐφάπτωνται μεταξύ των, δείξατε ὅτι τὸ τετράπλευρον εἶναι περιγράψιμον περὶ κύκλον.

ΠΑΡΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΕΙΣ ΚΥΚΛΟΝ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

217. Ὁρισμός. Ἕν πολύγωνον καλεῖται **παρεγγεγραμμένον** εἰς κύκλον τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν αἱ προεκτάσεις τῶν πλευρῶν του ἢ καὶ μερικαὶ τῶν πλευρῶν του (πάντως ὄχι ὅλαι), ἐφάπτωνται ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

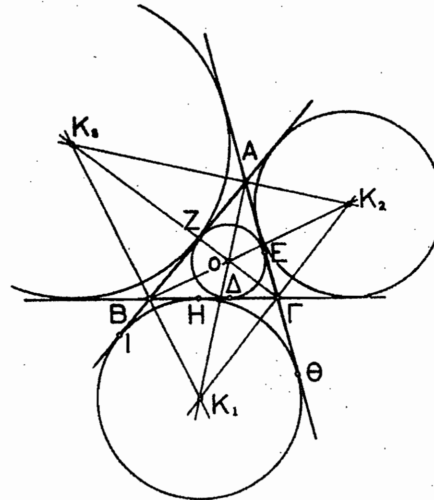
Ὁ κύκλος καλεῖται **παρεγγεγραμμένος** εἰς τὸ πολύγωνον. Τὸ πολύγωνον δὲν περιβάλλει τὸν κύκλον, οὔτε περιέχεται ἐντὸς αὐτοῦ, δύναται δὲ νὰ εἶναι κυρτὸν ἢ μὴ κυρτόν. Τὸ τετράπλευρον π.χ. ΑΒΓΔ (σχ. 217) εἶναι κυρτὸν καὶ παρεγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον κέντρου Ο, ἐνῷ τὸ ΑΕΓΖ εἶναι μὴ κυρτὸν καὶ παρεγγεγραμμένον εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον. Ὁμοίως τὰ τρίωνα ΑΕΔ καὶ ΑΒΖ εἶναι παρεγγεγραμμένα εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον.



Σχ. 217

Ἕν τρίγωνον ἔχει πάντοτε τρεῖς παρεγγεγραμμένους κύκλους, τῶν ὁποίων τὰ κέντρα ὁρίζονται ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα τῶν ἐξωτερικῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν του (§ 165). Ἀπὸ τὰ ἴδια σημεῖα διέρχεται καὶ ἀνὰ μία τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων. Ὁ παρεγγεγραγμένος κύκλος κέντρου K_1 (σχ. 218) εὑρισκόμενος ἐντὸς τῆς γωνίας $\widehat{A}$, καλεῖται παρεγγεγραμμένος εἰς τὴν γωνίαν $\widehat{A}$ ἢ εἰς τὴν πλευρὰν α. Ὁμοίως οἱ κύκλοι κέντρων K_2 καὶ K_3 καλοῦνται παρεγγεγραμμένοι εἰς τὰς γωνίας $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ ἢ εἰς τὰς πλευρὰς β καὶ γ ἀντιστοίχως.

Τὰ κέντρα K_1, K_2, K_3 τῶν τριῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων καλοῦνται **παράκεντρα** (§ 165).



Σχ. 218

218. Θεώρημα. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἂν εἶναι Δ, Ε καὶ Ζ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου μετὰ τῶν πλευρῶν α, β καὶ γ ἀντιστοίχως καὶ Η,Θ καὶ Ι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ εἰς τὴν πλευρὰν α παρεγγεγραμμένου κύκλου μετὰ τῆς πλευρᾶς α καὶ τῶν προεκτάσεων τῶν πλευρῶν β καὶ γ ἀντιστοίχως, τότε εἶναι :

i) $AE = AZ = \tau - \alpha$ **ii)** $A\Theta = AI = \tau$ **iii)** $E\Theta = ZI = \alpha$ **καὶ iv)** $\Delta H = |\beta - \gamma|$ **ὅπου** $\alpha + \beta + \gamma = 2\tau$.

Ἀπόδειξις. Γνωρίζομεν ὅτι (σχ. 218):

(1) $AE = AZ,\ B\Delta = BZ,\ \Gamma\Delta = \Gamma E$

ὡς ἐφαπτόμενα τμήματα ἀπὸ σημεῖον πρὸς κύκλον (§ 201). Τότε θὰ εἶναι καί:

i) $AZ + ZB + B\Delta + \Delta\Gamma + \Gamma E + EA = 2\tau$ καὶ λόγῳ τῶν σχέσεων (1) αὕτη γράφεται: $2\,(AZ + B\Delta + \Delta\Gamma) = 2\tau$, ἢ $AZ + B\Gamma = \tau$, ἄρα $AZ = \tau - B\Gamma$ ἢ

$$AE = AZ = \tau - \alpha$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι $B\Delta = BZ = \tau - \beta$ καὶ $\Gamma\Delta = \Gamma E = \tau - \gamma$.

ii) $AB + BH + \Gamma H + A\Gamma = 2\tau$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι $BH = BI$ καὶ $\Gamma H = \Gamma\Theta$, ἡ προηγουμένη σχέσις γράφεται:

$AB + BI + A\Gamma + \Gamma\Theta = 2\tau$ ἢ $AI + A\Theta = 2\tau$. Ἀλλὰ εἶναι $AI = A\Theta$. Ἄρα $2.AI = 2\tau$ ἢ $AI = \tau$ ἢ

$$A\Theta = AI = \tau.$$

iii) $ZI = AI - AZ = \tau - (\tau - \alpha) = \alpha$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι $E\Theta = \tau - (\tau - \alpha) = \alpha$. Ἄρα:

$$E\Theta = ZI = \alpha$$

iv) Ἔστω $\gamma > \beta$. Τότε θὰ εἶναι:

$\Delta H = B\Delta - BH = (\tau - \beta) - BI = (\tau - \beta) - (AI - AB) = (\tau - \beta) - (\tau - \gamma) = \gamma - \beta$. Ἐὰν ἦτο $\gamma < \beta$ ὁμοίως θὰ ὑπελογίζετο ὅτι εἶναι $\Delta H = \beta - \gamma$.

Γενικῶς ἔχομεν $\mathbf{\Delta H = |\beta - \gamma|}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Β'.

271. Αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ τριγώνου ΑΒΓ, τὸ ἔγκεντρον αὐτοῦ καὶ τὸ παράκεντρον ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν πλευρὰν α, εἶναι ὁμοκυκλικὰ σημεῖα.

272. Ἐὰν ὁ παρεγγεγραμμένος εἰς τὴν πλευρὰν α κύκλος τριγώνου ΑΒΓ ἐφάπτεται τῆς ΒΓ εἰς τὸ Δ καὶ τῶν προεκτάσεων τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ Ε καὶ Ζ, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου ΔΕΖ, συναρτήσει τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

273. Ἐὰν ἓν κυρτὸν τετράπλευρον εἶναι παρεγγεγραμμένον εἰς κύκλον, δείξατε ὅτι ἡ διαφορὰ δύο ἀπέναντι πλευρῶν του ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι πλευρῶν του.

274. Ἐὰν Ο καὶ Κ εἶναι τὰ κέντρα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τοῦ παρεγγεγραμμένου εἰς τὴν πλευρὰν α, δείξατε ὅτι ὁ περιγεγραμμένος κύκλος τοῦ τριγώνου διχοτομεῖ τὸ τμῆμα ΟΚ.

275. Ἡ διάκεντρος τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων εἰς τὰς πλευρὰς β καὶ γ τριγώνου ΑΒΓ σχηματίζει μὲ τὴν ΒΓ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$.

276. Τριγώνου ΑΒΓ θεωροῦμεν τοὺς παρεγγεγραμμένους κύκλους εἰς τὰς πλευρὰς β καὶ γ. Ἐὰν οὗτοι ἐφάπτωνται τῶν προεκτάσεων τῆς ΒΓ εἰς τὰ Δ καὶ Ε, δείξατε ὅτι εἶναι $\Delta E = \beta + \gamma$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΣ

Α'.

277. Τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Φέρομεν τὴν διάμετρον ΑΔ καὶ τὸ ὕψος ΓΕ. Δείξατε ὅτι εἶναι ΒΔ // ΓΕ.

278. Δείξατε ὅτι ἡ διχοτόμος γωνίας τριγώνου, διτοχοτομεῖ καὶ τὴν γωνίαν τοῦ

ὕψους καὶ τῆς διαμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον κύκλου, ποὺ ἄγονται ἀπὸ τὴν αὐτὴν κορυφήν.

279. Τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον κέντρου Ο. Φέρομεν τὴν χορδὴν ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ. Ἂν Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου δείξατε ὅτι εἶναι ΑΗ = ΓΔ.

280. Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Ἐὰν Δ καὶ Ε εἶναι τὰ μέσα τῶν τόξων $\widehat{AB}$ καὶ $\widehat{A\Gamma}$, δείξατε ὅτι ἡ χορδὴ ΔΕ τριχοτομεῖται ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ.

281. Ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Ἐὰν Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ τόξου $\widehat{B\Gamma}$, ὅπου δὲν εὑρίσκεται τὸ Α, φέρομεν τὴν ΑΜ καὶ ἐκ τοῦ Β φέρομεν ΒΕ ⊥ ΑΜ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν ΜΓ εἰς τὸ Δ. Ἐὰν Ζ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΒΓ, δείξατε ὅτι εἶναι:

$$\alpha)\ MB = M\Delta, \qquad \beta)\ EZ \mathbin{//=} \frac{\Gamma\Delta}{2}.$$

282. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ. Θεωροῦμεν κύκλον, ὁ ὁποῖος διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς Β καὶ τέμνει τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΒΓ εἰς τὰ Δ καὶ Ε. Ἕτερος κύκλος διέρχεται διὰ τῶν σημείων Γ καὶ Ε καὶ τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ. Ἐὰν Θ εἶναι τὸ δεύτερον σημεῖον τομῆς τῶν δύο κύκλων, δείξατε ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΔΘΖ εἶναι ἐγγράψιμον.

283. Τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Ἐκ τοῦ μέσου Μ τοῦ τόξου $\widehat{B\Gamma}$ ἄγομεν χορδὴν ΜΔ παράλληλον τῆς ΑΓ. Δείξατε ὅτι ΜΔ = ΑΒ.

284. Ἐὰν Δ, Ε, Ζ εἶναι τρία τυχόντα σημεῖα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ ἀντιστοίχως τριγώνου ΑΒΓ, δείξατε ὅτι οἱ περιγεγραμμένοι κύκλοι περὶ τὰ τρίγωνα ΑΕΖ, ΒΔΖ καὶ ΓΔΕ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

285. Εἰς κάθε κυρτὸν τετράπλευρον, τὰ κέντρα τῶν τεσσάρων κύκλων, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται τῶν πλευρῶν του ἀνὰ τρεῖς, εἶναι ὁμοκυκλικὰ σημεῖα.

286. Ἔστω κύκλος κέντρου Κ καὶ ΑΒ, ΓΔ δύο κάθετοι χορδαί. Δαίξατε ὅτι τὸ τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου εἰς τὰ ἄκρα τῶν χορδῶν, εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

287. Ἐὰν ὁ ἐγγεγραμμένος εἰς τρίγωνον ΑΒΓ κύκλος ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου εἰς τὰ Α′, Β′, Γ′, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου Α′Β′Γ′ συναρτήσει τῶν γωνιῶν $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Β′.

288. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἐὰν Κ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ Δ τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A}$ τέμνει τὸν περιγεγραμμένον κύκλον, δείξατε ὅτι εἶναι ΒΔ = ΔΚ.

289. Ἔστω ΑΒΓΔ κυρτὸν τραπέζιον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ ΑΔ καὶ ΒΓ τέμνονται εἰς τὸ Ε, αἱ δὲ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ Α καὶ Γ τέμνονται εἰς τὸ Ζ. Δείξατε ὅτι: α) $\widehat{E} = \widehat{Z}$ καὶ β) ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις τοῦ τραπεζίου.

290. Ἐὰν αἱ διαγώνιοι ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον τετραπλεύρου τέμνωνται καθέτως, δείξατε ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀπὸ μίαν πλευρὰν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς τοῦ τετραπλεύρου.

291. Ἐὰν αἱ διαγώνιοι κυρτοῦ τετραπλεύρου τέμνωνται καθέτως, δείξατε ὅτι τὰ

ἴχνη τῶν καθέτων, ποὺ ἄγονται ἀπὸ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου, εἶναι ὁμοκυκλικὰ σημεῖα.

292. Ἔσω τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Ἐκ τῶν Β καὶ Γ φέρομεν ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Δ. Ἐκ τοῦ Δ φέρομεν κάθετα τμήματα ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου. Δείξατε ὅτι τὸ ΔΕΖΗ εἶναι παραλληλόγραμμον.

293. Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ, ὁ περιγεγραμμένος κύκλος καὶ τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ ἐλάσσονος τόξου $\overset{\frown}{ΒΓ}$. Δείξατε ὅτι $ΜΑ = ΜΒ + ΜΓ$.

294. Ἐφ' ἑκάστης πλευρᾶς ἑνὸς ἐγγραψίμου τετραπλεύρου ὡς χορδῆς, γράφομεν ἕνα κύκλον. Οἱ τέσσαρες οὗτοι κύκλοι, τεμνόμενοι ἀνὰ δύο διαδοχικοὶ ὁρίζουν τέσσαρα σημεῖα, τὰ ὁποῖα δείξατε ὅτι εἶναι ὁμοκυκλικά.

295. Εἰς τὸ ἄκρον Α μιᾶς διαμέτρου ΑΒ κύκλου φέρομεν ἐφαπτομένην, ἡ ὁποία τέμνεται ἀπὸ τὴν προέκτασιν μιᾶς χορδῆς ΒΓ εἰς τὸ Δ. Εἰς τὴν πρέκτασιν τῆς ΑΓ (πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α ἢ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Γ) λαμβάνομεν τμῆμα $ΑΕ = ΑΔ$ καὶ ἀπὸ τὸ Ε φέρομεν παράλληλον τῆς ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ζ. Δείξατε ὅτι εἶναι $ΒΖ = ΒΑ$.

296. Δείξατε ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ποὺ σχηματίζουν αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον τετραπλεύρου τέμνονται καθέτως, συναντοῦν δὲ τὰς πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου εἰς σημεῖα, τὰ ὁποῖα εἶναι κορυφαὶ ρόμβου.

297. Ἀπὸ ἐσωτερικὸν σημεῖον Μ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν καθέτους ΜΗ, ΜΖ, ΜΘ ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου. Ὁ κύκλος ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὰ Η, Ζ, Θ τέμνει ἐκ δευτέρου τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου εἰς τὰ Η', Ζ', Θ' ἀντιστοίχως. Ἐὰν Μ' εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Μ ὡς πρὸς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τούτου, δείξατε ὅτι αἱ Μ'Η', Μ'Ζ', Μ'Θ' εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου.

298. Ἐφ' ἑκάστης πλευρᾶς τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἐκτὸς αὐτοῦ κατασκευάζομεν τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΓ', ΒΓΑ', ΓΑΒ'. Δείξατε ὅτι τὰ τμήματα ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' εἶναι ἴσα, καὶ ὅτι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

299. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Δείξατε ὅτι τὸ ἀντιδιαμετρικὸν τῆς κορυφῆς Α καὶ τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ ΑΒΓ ὁρίζουν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

300. Ἐὰν Ο εἶναι τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τρίγωνον ΑΒΓ, Η τὸ ὀρθόκεντρον καὶ Μ τὸ μέσον τῆς ΒΓ, δείξατε ὅτι $ΑΗ = 2.ΟΜ$.

301. Ἂν ἡ διαγώνιος ΑΓ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι διάμετρος καὶ φέρωμεν τὰς $ΑΕ \perp ΒΔ$ καὶ $ΓΖ \perp ΒΔ$, δείξατε ὅτι εἶναι $ΒΕ = ΔΖ$.

302. Εὐθεῖα τοῦ Euler. Εἰς κάθε τρίγωνον, τὸ ὀρθόκεντρον Η, τὸ κέντρον βάρους Μ καὶ τὸ περίκεντρον Κ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, εἶναι δὲ $ΗΜ = 2.ΜΚ$.

303. Κύκλος τοῦ Euler (τῶν ἐννέα σημείων). Εἰς κάθε τρίγωνον, τὰ μέσα τῶν πλευρῶν, τὰ ἴχνη τῶν ὑψῶν καὶ τὰ μέσα τῶν τμημάτων ποὺ συνδέουν τὸ ὀρθόκεντρον μὲ ἑκάστην κορυφὴν εἶναι ὁμόκυκλικὰ σημεῖα.

304. Ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου τοῦ Euler ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον κύκλου, τὸ δὲ κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ Euler εἶναι τὸ μέσον τῆς εὐθείας τοῦ Euler.

305. Δείξατε ὅτι αἱ ἀκτῖνες τοῦ εἰς τρίγωνον περιγεγραμμένου κύκλου ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου, εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ ὀρθικοῦ τριγώνου.

306. Ἡ εὐθεῖα ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον Μ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἀπὸ τὸ μέσον Ν τοῦ τμήματος ΑΗ, ἔνθα Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ποὺ διέρχεται ἀπὸ τοὺς πόδας τῶν ὑψῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ.

307. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ὁ περιγεγραμμένος κύκλος. Σχηματίζομεν: α)

τὸ ὀρθικὸν τρίγωνον ΔΕΖ, β) τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' μὲ κορυφὰς τὰ συμμετρικὰ τοῦ ὀρθοκέντρου ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ ΑΒΓ καὶ γ) τὸ τρίγωνον ΘΙΛ μὲ πλευρὰς τὰς ἐφαπτομένας τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον κύκλου εἰς τὰ Α, Β, Γ. Δείξατε ὅτι τὰ τρία ταῦτα τρίγωνα ἔχουν πλευρὰς παραλλήλους.

308. Δείξατε ὅτι εἰς κάθε ἐγγράψιμον τετράπλευρον, αἱ εὐθεῖαι ποὺ ἄγονται ἀπὸ τὸ μέσον ἑκάστης πλευρᾶς κάθετοι ἐπὶ τὴν ἀπέναντι πλευράν, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

309. Τὸ ἔγκεντρον καὶ τὰ τρία παράκεντρα παντὸς τριγώνου, ἀνὰ δύο ὁρίζουν ἓξ εὐθύγραμμα τμήματα. Δείξατε ὅτι τὰ μέσα τῶν τμημάτων τούτων κεῖνται ἐπὶ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον κύκλου.

310. Εἰς κάθε τρίγωνον δείξατε ὅτι ἀληθεύει ἡ σχέσις: $R_\alpha + R_\beta + R_\gamma = 4R + \rho$ ἔνθα R_α, R_β, R_γ εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων R ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου καὶ ρ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

311. Δίδεται ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1$∟). Δείξατε ὅτι εἶναι:

α) $R_\beta + R_\gamma = 2R$ καὶ β) $R_\alpha = R_\beta + R_\gamma + \rho$.

312. Εὐθεῖα τοῦ Simson. Τὰ ἴχνη τῶν καθέτων, ποὺ ἄγονται ἀπὸ τυχὸν σημεῖον τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τρίγωνον κύκλου ἐπὶ τὰς πλευράς του, κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

313. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Ἂν Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου, δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα τοῦ Simson, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς αὐτό, διχοτομεῖ τὸ τμῆμα ΜΗ, ὅπου Η τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ ΑΒΓ.

314. Δείξατε ὅτι τὰ συμμετρικὰ ἑνὸς σημείου Μ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τρίγωνον ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου, κεῖνται ἐπ' εὐθείας διερχομένης ἀπὸ τὸ ὀρθόκεντρον Η τοῦ τριγώνου καὶ παραλλήλου πρὸς τὴν εὐθεῖαν τοῦ Simson ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ Μ.

315. Ἀπὸ σημεῖον Μ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τρίγωνον κύκλου, φέρομεν εὐθείας ἴσον κεκλιμένας ὡς πρὸς τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου. Δείξατε ὅτι τὰ τρία σημεῖα, κατὰ τὰ ὁποῖα αὗται τέμνουν ἀντιστοίχως τὰς τρεῖς πλευράς, κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

316. Μὲ διαμέτρους τὰς χορδὰς ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ ἑνὸς κύκλου γράφομεν τρεῖς κύκλους, οἱ ὁποῖοι ἀνὰ δύο τέμνονται ἐκ δευτέρου εἰς τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ. Δείξατε ὅτι τὰ Δ, Ε, Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

317. Ἔστω ΑΒΓΔ τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ τέμνονται καθέτως εἰς τὸ Θ. Ἐκ τοῦ Θ φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, αἱ ὁποῖαι τὰς τέμνουν εἰς τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Ι ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι:

α) Τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΙ εἶναι ἐγγράψιμον,

β) τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΙ εἶναι περιγράψιμον,

γ) ὁ κύκλος ὁ περιγεγραμμένος περὶ τὸ ΕΖΗΙ διέρχεται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΓΔ.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ
Α' ΚΑΙ Β' ΒΙΒΛΙΟΥ

219. Ὁρισμοί. Γεωμετρικὸν πρόβλημα καλεῖται μία πρότασις, εἰς τὴν ὁποίαν ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ ἓν γεωμετρικὸν σχῆμα μὲ προκαθωρισμένας ἰδιότητας, ἐπὶ τῇ βάσει δεδομένων στοιχείων.

Λύσις ἢ ἐπίλυσις τοῦ γεωμετρικοῦ προβλήματος καλεῖται ὁ τρόπος (ἡ

διαδικασία), διὰ τοῦ ὁποίου ἐπιτυγχάνεται ἡ κατασκευὴ τοῦ ζητουμένου σχήματος.

Γεωμετρικὴ λύσις ἑνὸς προβλήματος καλεῖται ἡ λύσις αὐτοῦ, ἡ ὁποία ἐπιτυγχάνεται διὰ μόνης τῆς χρήσεως τῶν γεωμετρικῶν ὀργάνων, ἤτοι τοῦ **κανόνος** καὶ τοῦ **διαβήτου**.

Ἀπόδειξις τοῦ προβλήματος καλεῖται ἡ λογικὴ σειρὰ σκέψεων, ἡ ὁποία βασιζομένη ἐπὶ γνωστῶν γεωμετρικῶν προτάσεων, μᾶς πείθει ὅτι τὸ κατασκευασθὲν σχῆμα ἔχει τὰ προκαθωρισμένα (δεδομένα) στοιχεῖα.

Διερεύνησις τοῦ προβλήματος καλεῖται ὁ ἔλεγχος τῶν συνθηκῶν, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ πληροῦν τὰ δεδομένα μόνον στοιχεῖα τοῦ προβλήματος, οὕτως ὥστε τὸ πρόβλημα νὰ ἐπιδέχεται λύσιν.

Στοιχειώδη γεωμετρικὰ προβλήματα ἐπιλυόμενα διὰ μόνης τῆς χρήσεως τοῦ κανόνος εἶναι τὰ ἀκόλουθα :

i) Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ δύο δεδομένων σημείων.

ii) Νὰ ἀχθῇ ἡμιευθεῖα, τῆς ὁποίας δίδεται ἡ ἀρχὴ καὶ ἓν σημεῖον της.

iii) Νὰ ἀχθῇ εὐθύγραμμον τμῆμα μὲ δεδομένα ἄκρα.

Διὰ μόνης τῆς χρήσεως τοῦ διαβήτου δύναται νὰ ἐπιλυθῇ τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα :

Νὰ γραφῇ κύκλος μὲ δεδομένον κέντρον καὶ δεδομένην ἀκτῖνα.

Ἐπίσης ὁ διαβήτης δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ καὶ ὡς μεταφορεὺς εὐθυγράμμων τμημάτων (διαστημόμετρον).

Αἱ ἀνωτέρω στοιχειώδεις γεωμετρικαὶ κατασκευαὶ θὰ θεωροῦνται ὁπωσδήποτε γνωσταί. Διὰ τοῦ συνδυασμοῦ αὐτῶν καὶ μόνον, θὰ ἐπιτυγχάνωμεν τὰς γεωμετρικὰς λύσεις τῶν διαφόρων προβλημάτων.

Ὡρισμένον γεωμετρικὸν πρόβλημα καλεῖται ἓν πρόβλημα, τὸ ὁποῖον ἐπιδέχεται μίαν τοὐλάχιστον γεωμετρικὴν λύσιν, ἢ ἐν πάσῃ περιπτώσει, πεπερασμένον πλῆθος λύσεων.

Ἀδύνατον γεωμετρικὸν πρόβλημα καλεῖται ἓν πρόβλημα, τὸ ὁποῖον δὲν ἐπιδέχεται γεωμετρικὴν λύσιν. Ἀδύνατα π.χ. προβλήματα εἶναι τὰ ἀκόλουθα :

i) Νὰ τριχοτομηθῇ τυχοῦσα γωνία.

ii) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον μὲ πλευρὰς 2α, 3α, 6α.

Ἀόριστον γεωμετρικὸν πρόβλημα καλεῖται ἕνα πρόβλημα, τὸ ὁποῖον ἐπιδέχεται ἄπειρον πλῆθος γεωμετρικῶν λύσεων. Ἀόριστον πρόβλημα εἶναι π.χ. τὸ πρόβλημα «νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη ἀπὸ ἓν δεδομένον σημεῖον».

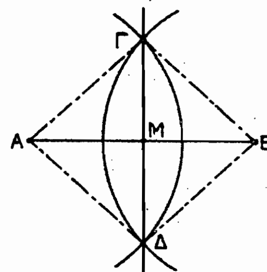
ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

220. Πρόβλημα 1. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ μεσοκάθετος δεδομένου εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

Κατασκευή. Ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν δύο σημεῖα τῆς ζητουμένης μεσοκα-

θέτου. Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιοῦμεν τὴν ἰδιότητά της, ὅτι τὰ σημεῖα της καὶ μόνον αὐτὰ ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰ ἄκρα A καὶ B τοῦ τμήματος. Μὲ κέντρον λοιπὸν τὸ A καὶ ἀκτῖνα $R > \frac{AB}{2}$ γράφομεν κύκλον (σχ. 219). Τὸ αὐτὸ ἐπαναλαμβάνομεν μὲ κέντρον τὸ B καὶ τὴν ἰδίαν ἀκτῖνα R. Οἱ δύο κύκλοι τέμνονται εἰς δύο σημεῖα Γ καὶ Δ. Ἡ εὐθεῖα ΓΔ εἶναι ἡ ζητουμένη μεσοκάθετος.

Ἀπόδειξις. Κατ' ἀρχὰς παρατηροῦμεν ὅτι οἱ δύο κύκλοι τέμνονται, διότι ἐκ τῆς σχέσεως $R > \frac{AB}{2}$ ἕπεται $AB < 2R$ ἢ $0 < AB < 2R$ ἢ $R - R < AB < R + R$, ἤτοι ἡ διάκεντρος αὐτῶν περιέχεται μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων των. Διὰ τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν κύκλων Γ καὶ Δ ἔχομεν τότε : $ΓA = ΓB = R$ καὶ $ΔA = ΔB = R$. Ἄρα τὰ Γ καὶ Δ ἀνήκουν εἰς τὴν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος AB, τὴν ὁποίαν καὶ ὁρίζουν.



Σχ. 219

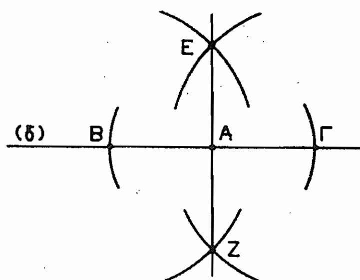
Διερεύνησις. Τὸ πρόβλημα ἔχει πάντοτε μίαν λύσιν.

221. Πρόβλημα 2. Δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος AB νὰ εὑρεθῇ τὸ μέσον αὐτοῦ.

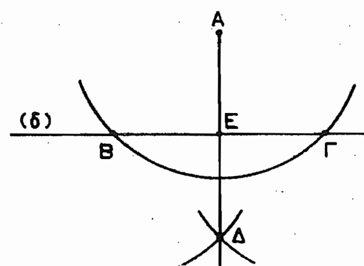
Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ προηγούμενον. Ἡ μεσοκάθετος ΓΔ τέμνει τὸ τμῆμα AB εἰς σημεῖον M, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μέσον του (σχ. 219).

222. Πρόβλημα 3. Δοθείσης εὐθείας (δ) καὶ σημείου A αὐτῆς, νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐκ τοῦ A ἐπὶ τὴν (δ).

Κατασκευή. Ἑκατέρωθεν τοῦ A ἐπὶ τῆς εὐθείας (δ) λαμβάνομεν δύο σημεῖα B καὶ Γ. οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $AB = AΓ$ (σχ. 220). Τότε τὸ A εἶναι



Σχ. 220



Σχ. 221

μέσον τοῦ ΒΓ. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ φέρωμεν τὴν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος ΒΓ, ἡ ὁποία θὰ διέλθῃ ἐκ τοῦ A. Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ πρόβλημα 1.

223. Πρόβλημα 4. Δοθείσης εὐθείας (δ) νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτὴν διὰ σημείου A κειμένου ἐκτὸς αὐτῆς.

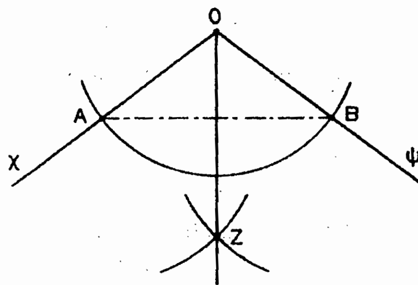
Κατασκευή. Μὲ κέντρον τὸ Α γράφομεν κύκλον μὲ μόνην ἀπαίτησιν αὐτὸς νὰ τέμνῃ εἰς δύο σημεῖα Β καὶ Γ τὴν εὐθεῖαν (δ) (τοῦτο πάντοτε εἶναι δυνατόν). Ἤδη τὸ Α εἶναι σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου τοῦ τμήματος ΒΓ (σχ. 221). Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὑρεθῇ καὶ ἓν δεύτερον σημεῖον Δ αὐτῆς (πρόβλημα 1). Ἡ ΑΔ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος ἐπὶ τὴν (δ).

224. Πρόβλημα 5. Νὰ διχοτομηθῇ δοθεῖσα γωνία $x\widehat{O}y$.

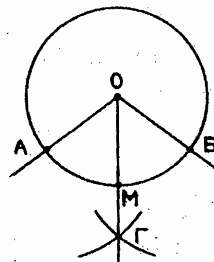
Κατασκευή. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν της Οx καὶ Οy λαμβάνομεν δύο ἴσα τμήματα ΟΑ = ΟΒ (σχ. 222). Τότε, τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΟΑΒ, ἡ μεσοκάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ θὰ εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας του $A\widehat{O}B$ (§ 112). Τῆς μεσοκαθέτου μάλιστα αὐτῆς γνωρίζομεν καὶ ἓν σημεῖον της, τὸ Ο. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὑρεθῇ καὶ ἓν δεύτερον σημεῖον της Ζ (πρόβλημα 1). Ἡ ΑΖ εἶναι ἡ ζητουμένη διχοτόμος.

Ἀπόδειξις. Ἡ ΟΖ εἶναι μεσοκάθετος τῆς βάσεως ΑΒ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΟΑΒ, ἄρα καὶ διχοτόμος τῆς $A\widehat{O}B$.

Διερεύνησις. Πάντοτε ὑπάρχει μία λύσις.



Σχ. 222



Σχ. 223

225. Πρόβλημα 6. Νὰ διτοτομηθῇ δοθὲν κυκλικὸν τόξον $\overset{\frown}{AB}$.

Κατασκευή. Ἀρκεῖ νὰ διχοτομηθῇ ἡ ἀντίστοιχος αὐτοῦ ἐπίκεντρος γωνία $A\widehat{O}B$. Ἡ διχοτόμος θὰ τέμνῃ τὸ τόξον εἰς σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι τὸ μέσον του (σχ. 223). Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ προηγούμενον.

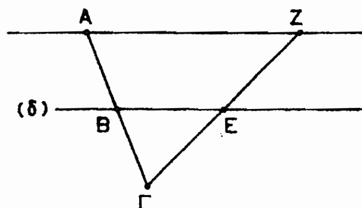
226. Πρόβλημα 7. Διὰ δοθέντος σημείου Α νὰ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν (δ).

Κατασκευή. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν (δ) εἰς τὸ Β καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν σημεῖον Γ, τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι ΒΓ = ΒΑ (σχ. 224). Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν ἄλλην εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν (δ) εἰς τὸ Ε καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν ΕΖ = ΕΓ. Ἡ ΑΖ εἶναι ἡ ζητουμένη παράλληλος.

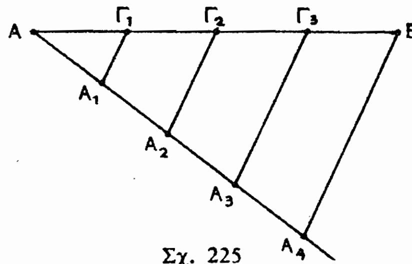
Ἀπόδειξις. Κατ' ἀρχὰς αὕτη διέρχεται διὰ τοῦ Α. Κατόπιν παρατη-

ροῦμεν ὅτι τοῦ τριγώνου ΓΑΖ τὰ σημεῖα Β καὶ Ε εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του ΓΑ καὶ ΓΖ ἐκ κατασκευῆς. Ἄρα θὰ εἶναι ΑΖ//ΒΕ.

Διερεύνησις. Πάντοτε ὑπάρχει μία λύσις, ἐφ' ὅσον τὸ Α δὲν ἀνήκει εἰς τὴν (δ).



Σχ. 224



Σχ. 225

227. Πρόβλημα 8. Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ εἰς ν ἴσα τμήματα.

Κατασκευή. Ἐκ τοῦ ἄκρου Α τοῦ τμήματος ΑΒ φέρομεν τυχοῦσαν ἡμιευθεῖαν καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν σημεῖα A_1, A_2,...A_ν, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $AA_1 = A_1A_2 = ... = A_{\nu-1}\,A_\nu$ (σχ. 225). Οὕτω τὸ τμῆμα AA_ν εἶναι διῃρημένον εἰς ν ἴσα τμήματα. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν BA_ν (εἰς τὸ σχῆμα εἶναι $\nu = 4$) καὶ ἐκ τῶν διαιρετικῶν σημείων A_1,A_2,A_3..., φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν BA_ν. Αὗται τέμνουν τὸ δοθὲν τμῆμα εἰς τὰ Γ_1, Γ_2, ...$\Gamma_{\nu-1}$ ἀντιστοίχως, τὰ ὁποῖα εἶναι τὰ ζητούμενα διαιρετικὰ σημεῖα.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ εἶναι $AA_1 = A_1A_2 = ... = A_{\nu-1}\,A_\nu$, ἕπεται ὅτι, (§ 157) θὰ εἶναι καὶ $A\Gamma_1 = \Gamma_1\Gamma_2 = ... = \Gamma_{\nu-1}B$.

Διερεύνησις. Τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται πάντοτε μίαν λύσιν.

228. Πρόβλημα 9. Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς δοθεῖσαν γωνίαν ω.

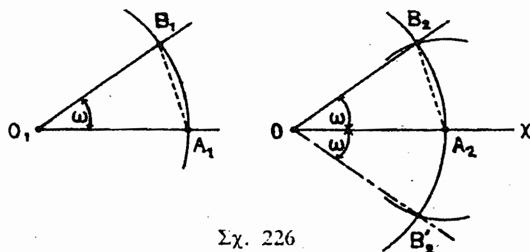
Κατασκευή. Καθιστῶμεν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω ἐπίκεντρον γράφοντες τόξον μὲ τυχοῦσαν ἀκτῖνα R, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς πλευράς της εἰς τὰ σημεῖα A_1 καὶ B_1 (σχ. 226). Μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν Ο τυχούσης ἡμιευθείας Οx καὶ μὲ τὴν ἰδίαν ἀκτῖνα R, γράφομεν κύκλον, ὁ ὁποῖος ὁρίζει ἐπὶ τῆς Οx σημεῖον A_2. Ἐν συνεχείᾳ, μὲ κέντρον τὸ σημεῖον A_2 καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν χορδὴν A_1B_1 ἡ ὁποία ὁρίζεται ἐπὶ τῆς δοθείσης γωνίας ω, γράφομεν κύκλον, ὁ ὁποῖος τέμνει τὸν (Ο, R) εἰς δύο σημεῖα B_2 καὶ B_2'. Ἡ γωνία $B_2\widehat{O}A_2$ εἶναι ἡ ζητουμένη.

Ἀπόδειξις. Τὰ τόξα $\widehat{A_1B_1}$ καὶ $\widehat{A_2B_2}$ εἶναι ἴσα ὡς τόξα ἴσων κύκλων εἰς τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν ἴσαι χορδαὶ A_1B_1 καὶ A_2B_2 ἐκ κατασκευῆς. Τότε αἱ γωνίαι ω καὶ $A_2\widehat{O}B_2$ εἶναι ἴσαι ὡς ἐπίκεντροι γωνίαι ἴσων κύκλων βαίνουσαι εἰς ἴσα τόξα.

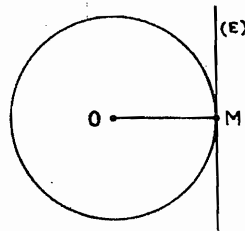
Διερεύνησις. Ἡ γωνία $A_2\widehat{O}B'_2$ δὲν ἀποτελεῖ μίαν δευτέραν λύσιν τοῦ προβλήματος, διότι εἶναι συμμετρικὴ τῆς $A_2\widehat{O}B_2$ ὡς πρὸς τὴν διάκεντρον OA_2.

10

Ἄρα εἶναι ἴση πρὸς αὐτήν. Κατόπιν τούτου τὸ πρόβλημα ἔχει πάντοτε μίαν μόνον λύσιν.



Σχ. 226



Σχ. 227

229. Πρόβλημα 10. Δίδεται κύκλος (O, R) καὶ σημεῖον M αὐτοῦ. Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον M.

Κατασκευή. Ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν εὐθεῖαν (ε) κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα OM εἰς τὸ σημεῖον M. Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ πρόβλημα 3. Ἡ ἀπόδειξις εἶναι προφανής. Λύσις ὑπάρχει πάντοτε μία (σχ. 227).

230. Πρόβλημα 11. Δίδεται εὐθεῖα (ε) καὶ σημεῖον A αὐτῆς. Νὰ γραφῇ κύκλος δοθείσης ἀκτῖνος R ἐφαπτόμενος τῆς (ε) εἰς τὸ A.

Κατασκευή. Ἐκ τοῦ σημείου A φέρομεν εὐθεῖαν (δ) κάθετον ἐπὶ τὴν (ε) καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν σημεῖον O τοιοῦτον, ὥστε OA = R. Ὁ κύκλος μὲ κέντρον O καὶ ἀκτῖνα R εἶναι ὁ ζητούμενος.

Ἀπόδειξις. Πράγματι εἶναι ὁ ζητούμενος διότι ἔχει ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν R, ἐφάπτεται δὲ καὶ τῆς εὐθείας (ε) εἰς τὸ σημεῖον A, διότι ἡ ἀκτίς του OA εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν (ε) (σχ. 228).

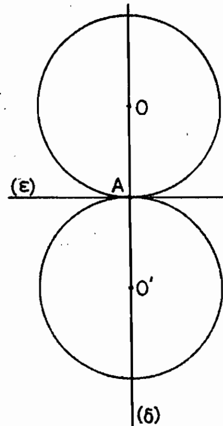
Διερεύνησις. Δυνάμεθα ἐπὶ τῆς (δ) νὰ λάβωμεν καὶ δεύτερον σημεῖον O′ τοιοῦτον ὥστε O′A = R, ὅπου τὸ A νὰ εἶναι μέσον τοῦ τμήματος OO′. Ὁ κύκλος (O′R) πληροῖ καὶ αὐτὸς τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος, ἑπομένως ὑπάρχουν πάντοτε δύο λύσεις.

Παρατήρησις. Τὸ πρόβλημα χαρακτηρίζεται ὡς πρόβλημα θέσεως καὶ ὄχι ὡς πρόβλημα μεγέθους. Διότι ἔπρεπε, γνωστὸς κύκλος ἀκτῖνος R, νὰ τοποθετηθῇ εἰς κατάλληλον θέσιν ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν (ε). Δι' αὐτὸ οἱ δύο κύκλοι κέντρων O καὶ O′, θεωροῦνται δύο λύσεις τοῦ προβλήματος, διότι, παρ' ὅτι εἶναι ἴσοι, ἐν τούτοις διαφέρει ἡ τοποθέτησίς των ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν (ε).

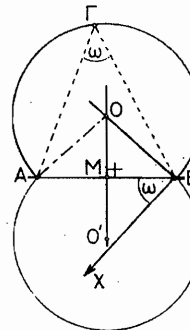
231. Πρόβλημα 12. Νὰ κατασκευασθῇ τόξον μὲ δεδομένα ἄκρα A, καὶ B, τὸ ὁποῖον νὰ δέχεται δοθεῖσαν γωνίαν ω.

Κατασκευή. Εἰς τὸ ἓν ἄκρον τοῦ τμήματος AB, ἔστω εἰς τὸ B, κατασκευάζομεν ἡμιευθεῖαν Bx, ἡ ὁποία νὰ σχηματίζῃ μετὰ τοῦ AB γωνίαν ω. Εἰς τὸ σημεῖον B φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν Bx καὶ τὴν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος AB, αἱ ὁποῖαι τεμνόμεναι ὁρίζουν σημεῖον O. Μὲ κέντρον τὸ O καὶ ἀκτῖνα τὴν OB γράφομεν τόξον $\widehat{A\Gamma B}$, τὸ ὁποῖον νὰ μὴ περιέχεται ἐντὸς τῆς γωνίας ω. Τὸ τόξον τοῦτο μὲ ἄκρα τὰ A καὶ B εἶναι τὸ ζητούμενον (σχ. 229).

'Απόδειξις. 'Η ἡμιευθεῖα Bx εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου (O, OB) ὡς κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος OB αὐτοῦ καὶ ἑπομένως ἡ γωνία ω, ὡς σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς χορδῆς AB καὶ τῆς ἐφαπτομένης Bx, εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐγγεγραμμένην εἰς τὸ τόξον γωνίαν (§ 205).



Σχ. 228



Σχ. 229

Διερεύνησις. 'Η συμμετρία ὡς πρὸς ἄξονα τὴν AB μᾶς ἐξασφαλίζει καὶ ἓν ἄλλο τόξον $\widehat{AB}$ ἴσον μὲ τὸ πρῶτον καὶ μὲ τὰ αὐτὰ ἄκρα, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον O' εἶναι συμμετρικὸν τοῦ O ὡς πρὸς τὴν AB. Πάντοτε ὑπάρχουν τὰ δύο ταῦτα τόξα ἐφ' ὅσον ἡ γωνία ω εἶναι κυρτή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

318. Δίδεται εὐθύγραμμον τμῆμα AB καὶ εὐθεῖα (ε). Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς (ε) σημεῖον M ἰσαπέχον ἐκ τῶν A καὶ B.

319. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ πλευρὰ α.

320. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ διαγώνιος δ.

321. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ πλευρὰ λ.

322. Δίδεται κύκλος μὲ ἄγνωστον κέντρον καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον του.

323. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ εὐθεῖα (ε). Νὰ κατασκευασθῇ τὸ συμμετρικὸν τοῦ ΑΒΓ ὡς πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν εὐθεῖαν (ε).

224. Νὰ κατασκευασθῇ ὁ περιγεγραμμένος κύκλος δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ.

325. Νὰ κατασκευασθῇ ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ.

326. Δίδεται εὐθύγραμμον τμῆμα ΒΓ καὶ εὐθεῖα (ε). Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς (ε) σημεῖον Α, οὕτως ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἔχῃ ἐκ τῆς κορυφῆς Α δεδομένον ὕψος υ.

327. Δίδεται γωνία $\widehat{xOy}$. Νὰ εὑρεθῇ ἐντὸς αὐτῆς σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας δεδομένην ἀπόστασιν α.

328. Δεδομένον εὐθύγραμμον τμῆμα AB νὰ διαιρεθῇ εἰς 5 ἴσα τμήματα.

329. Δίδεται γωνία $x\widehat{O}y$. Ἐκ τῆς κορυφῆς O νὰ ἀχθῇ ἡμιευθεῖα Oz, τοιαύτη ὥστε ἡ Oy νὰ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $x\widehat{O}z$.

330. Νὰ κατασκευασθῇ ἐφαπτομένη δοθέντος κύκλου (O, R), παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν (δ).

331. Νὰ κατασκευασθῇ γωνία i) 60°, ii) 30°, iii) 45°.

332. Νὰ κατασκευασθῇ τόξον μὲ δεδομένα ἄκρα A καὶ B, τὸ ὁποῖον νὰ δέχεται γωνίαν 45°.

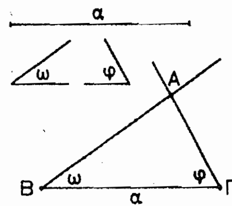
ΑΠΛΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

232. Πρόβλημα 13. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, ἐκ τῶν στοιχείων του α, $\widehat{B} = \omega$ καὶ $\widehat{\Gamma} = \varphi$ (ἤτοι ἐκ μιᾶς πλευρᾶς καὶ τῶν προσκειμένων εἰς αὐτὴν γωνιῶν).

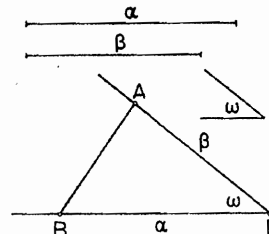
Κατασκευή. Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν τμῆμα ΒΓ = α (σχ. 230). Μὲ κορυφὰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ καὶ μὲ μίαν πλευρὰν τὰς ἡμιευθείας ΒΓ καὶ ΓΒ ἀντιστοίχως κατασκευάζομεν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΒΓ γωνίας ἴσας μὲ ω καὶ φ ἀντιστοίχως. Αἱ ἄλλαι πλευραὶ τῶν γωνιῶν τούτων τέμνονται εἰς σημεῖον Α. Τότε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀπόδειξις. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πράγματι εἶναι τὸ ζητούμενον διότι, ἐκ κατασκευῆς, ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

Διερεύνησις. Πάντοτε ὑπάρχει μία μόνον λύσις, ἐφ' ὅσον εἶναι $\omega + \varphi < 2^L$.



Σχ. 230



Σχ. 231

233. Πρόβλημα 14. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων του α, β καὶ $\widehat{\Gamma} = \omega$ (ἤτοι ἐκ δύο πλευρῶν καὶ τῆς περιεχομένης ὑπ' αὐτῶν γωνίας).

Κατασκευή. Μὲ κορυφὴν σημεῖον Γ κατασκευάζομεν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν ω καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν της λαμβάνομεν τμήματα ΓΒ = α, ΓΑ = β καὶ φέρομεν τὴν ΑΒ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον (σχ. 231).

Ἀπόδειξις. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πράγματι εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι, ἐκ κατασκευῆς ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

Διερεύνησις. Πάντοτε ὑπάρχει μία μόνον λύσις, ἐφ' ὅσον εἶναι $\omega < 2^L$.

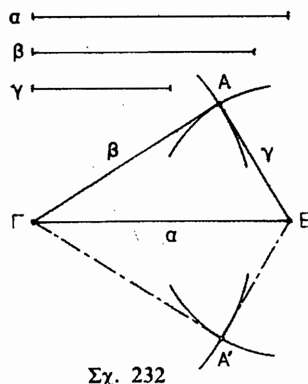
234. Πρόβλημα 15. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων του α, β καὶ γ, (ἤτοι ἐκ τῶν τριῶν πλευρῶν του).

Κατασκευή. Ἐπὶ εὐθείας τινος λαμβάνομεν τμῆμα ΒΓ = α (σχ. 232) καὶ γράφομεν τοὺς κύκλους (Β, γ) καὶ (Γ, β), οἱ ὁποῖοι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Α. Φέρομεν τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Τότε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

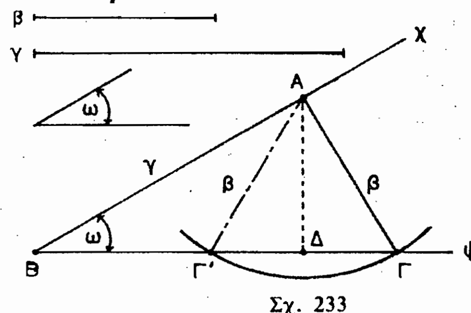
Ἀπόδειξις. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πράγματι εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι ἐκ κατασκευῆς ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

Διερεύνησις. Διὰ νὰ τέμνωνται οἱ δύο κύκλοι εἰς τὸ σημεῖον Α μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς διακέντρου ΒΓ, πρέπει καὶ ἀρκεῖ (§ 115) νὰ εἶναι $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$. Ἡ συνθήκη αὐτὴ πάντοτε μᾶς ἐξασφαλίζει μίαν μόνον λύσιν. Διότι τὸ δεύτερον σημεῖον Α′ τῶν κύκλων δὲν δίδει δευτέραν λύσιν τοῦ προβλήματος, δεδομένου ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′ΒΓ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν ΒΓ καὶ ἄρα εἶναι ἴσα.

235. Πρόβλημα. 16. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ δύο πλευραὶ β καὶ γ καὶ ἡ γωνία $\widehat{B} = \omega$, ποὺ κεῖται ἀπέναντι τῆς μιᾶς ἐκ τῶν δοθεισῶν πλευρῶν.



Σχ. 232



Σχ. 233

Κατασκευή. Μὲ κορυφὴν τὸ Β κατασκευάζομεν γωνίαν $\widehat{xBy} = \omega$ καὶ ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς Βx λαμβάνομεν τμῆμα ΒΑ = γ (σχ. 233). Μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα β γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν Βy εἰς τὸ σημεῖον Γ. Φέρομεν τὴν ΑΓ καὶ τὸ κατασκευασθὲν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

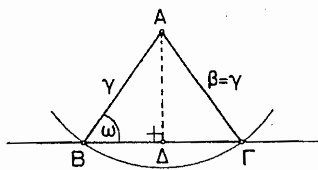
Ἀπόδειξις. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι ἐκ κατασκευῆς ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

Διερεύνησις. Θεωροῦμεν τὴν κάθετον ΑΔ ἐκ τοῦ Α ἐπὶ τὴν Βy. Τὸ τόξον (Α, β) διὰ νὰ τέμνῃ τὴν Βy, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\beta \geqq$ ΑΔ. Διακρίνομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις :

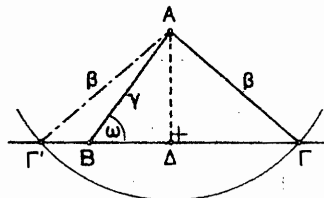
i) Ἐὰν εἶναι $\omega < 1^{L}$ καὶ β = ΑΔ, τότε τὸ τόξον (Α, β) ἐφάπτεται τῆς Βy εἰς τὸ Δ καὶ τότε τὸ Γ ταυτίζεται μὲ τὸ Δ. Ὑπάρχει λοιπὸν **μία** λύσις, ἤτοι τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΔ.

ii) Ἐὰν εἶναι $\omega < 1^L$ καὶ $ΑΔ < β < γ$ (σχ. 233), τότε τὸ τόξον (Α, β) τέμνει τὴν Βy εἰς τὰ δύο σημεῖα Γ καὶ Γ′ καὶ ἑπομένως ὑπάρχουν **δύο** τρίγωνα διάφορα ἀλλήλων, τὰ ΑΒΓ καὶ ΑΒΓ′, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰ δοθέντα στοιχεῖα. Ἄρα ἔχομεν δύο λύσεις.

iii) Ἐὰν εἶναι $\omega < 1^L$ καὶ $β = γ$ τότε ὑπάρχει μία λύσις μόνον, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοσκελὲς (ΑΒ = ΑΓ) (σχ. 234).



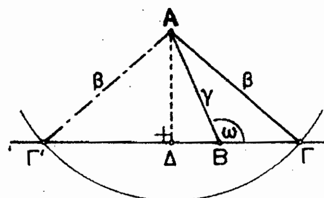
Σχ. 234



Σχ. 235

iv) Ἐὰν εἶναι $\omega < 1^L$ καὶ $β > γ$, τότε ὑπάρχει **μία** μόνον λύσις, ἤτοι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 235), διότι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ′ δὲν ἔχει τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω, ἀλλὰ τὴν παραπληρωματικήν της.

v) Ἐὰν εἶναι $\omega \geqq 1^L$ καὶ $β > γ$, τότε ὑπάρχει **μία** λύσις, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 236), διότι τὸ ΑΒΓ′ δὲν ἔχει τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω. Ἐὰν εἶναι $β < γ$, τότε δὲν ὑπάρχει λύσις.



Σχ. 236

Παρατήρησις. Ἐκ τῆς προηγουμένης κατασκευῆς ἕπεται ὅτι ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ μίαν γωνίαν ἴσην, ἡ ὁποία δὲν περιέχεται μεταξὺ τῶν ἴσων πλευρῶν, τὰ τρίγωνα δὲν εἶναι βέβαιον ὅτι εἶναι ἴσα. Διότι, ὡς προκύπτει ἐκ τῆς περιπτώσεως ii τῆς διερευνήσεως, ὑπάρχουν δύο τρίγωνα ἄνισα μὲ τὰ αὐτὰ στοιχεῖα. Ἐὰν ὅμως ἐπὶ πλέον ἔχομεν καὶ τὴν πληροφορίαν ὅτι ἡ πλευρὰ ἡ κειμένη ἀπέναντι τῆς δοθείσης γωνίας εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης δοθείσης πλευρᾶς (περίπτωσις iv καὶ v), αἴρεται ἡ ἀβεβαιότης καὶ τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα. Διότι ἕνα μόνον τρίγωνον ὑπάρχει μὲ τὰ στοιχεῖα αὐτά.

Συμπληρωματικῶς ἑπομένως δυνάμεθα νὰ δώσωμεν καὶ ἓν ἀκόμη κριτήριον ἰσότητος δύο τριγώνων, τὸ ἑξῆς:

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ εἶναι ἴσα ἐὰν ἔχουν $ΑΓ = Α'Γ' = β$, $ΑΒ = Α'Β' = γ$, $\widehat{B} = \widehat{B'} = \omega$ καὶ ἐπὶ πλέον ἰσχύει $β \geqq γ$.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

236. Πρόβλημα 17. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1^L$) ἐκ τῶν στοιχείων του β καὶ γ.

Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ πρόβλημα 14 § 233 καὶ ἡ λύσις του θεωρεῖται γνωστή.

237. Πρόβλημα 18. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\widehat{A}$ = 1L) ἐκ τῶν στοιχείων του α καὶ β.

Κατασκευή. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Αy ὀρθῆς γωνίας $x\widehat{A}y$ λαμβάνομεν τμῆμα ΑΓ = β (σχ. 237). Μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν Αx εἰς σημεῖον Β. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀπόδειξις. Πράγματι τοῦτο ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

Διερεύνησις. Ὑπάρχει πάντοτε μία λύσις ἐφ' ὅσον εἶναι α > β.

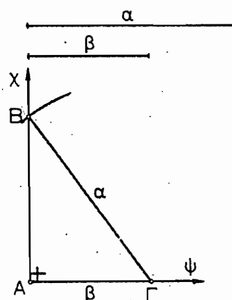
238. Πρόβλημα 19. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\widehat{A}$ = 1L) ἐκ τῶν στοιχείων του β καὶ $\widehat{\Gamma}$ = ω.

Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ πρόβλημα 13 § 232 καὶ ἡ λύσις του θεωρεῖται γνωστή.

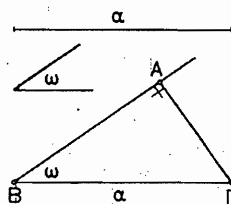
Παρατήρησις. Εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα ἀνάγεται καὶ ἡ κατασκευὴ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\widehat{A}$ = 1L) ἐκ τῶν στοιχείων του β καὶ $\widehat{B}$ = φ. Διότι τότε εἶναι γνωστὴ καὶ ἡ γωνία $\widehat{\Gamma}$ = 1L − φ.

239. Πρόβλημα 20. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\widehat{A}$ = 1L) ἐκ τῶν στοιχείων του α καὶ $\widehat{B}$ = ω.

Κατασκευή. Ἐπὶ εὐθείας τινος λαμβάνομεν τμῆμα ΒΓ = α καὶ εἰς τὸ



Σχ. 237



Σχ. 238

ἄκρον Β κατασκευάζομεν γωνίαν ω μὲ μίαν πλευρὰν τὴν ΒΓ (σχ. 238). Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ἄλλην πλευρὰν τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν τέμνει εἰς τὸ σημεῖον Α. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀπόδειξις. Πράγματι τοῦτο ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

Διερεύνησις. Πάντοτε ὑπάρχει μία λύσις, ἐφ' ὅσον εἶναι ω < 1L.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

333. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων του:

i) ΒΓ = α, $\widehat{B}$ = 30°, $\widehat{\Gamma}$ = 45°

ii) $\text{ΒΓ} = \alpha$, $\widehat{\text{Β}} = 60^{\circ}$, $\widehat{\Gamma} = \omega$ (διερεύνησις).

334. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων του:

i) $\text{ΑΒ} = \lambda$, $\text{ΒΓ} = 2\lambda$, $\widehat{\text{Β}} = 75^{\circ}$

ii) $\text{ΑΒ} = \frac{3\lambda}{2}$, $\text{ΒΓ} = \frac{4\lambda}{3}$, $\widehat{\text{Β}} = 45^{\circ}$, ὅπου λ εἶναι δεδομένον τμῆμα.

335. Δεδομένων τῶν τμημάτων λ καὶ μ νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων του:

i) $\alpha = \frac{5\lambda}{4}$, $\beta = 2\lambda$, $\gamma = \frac{3\lambda}{2}$

ii) $\alpha = 3\lambda$, $\beta = 4\lambda$, $\gamma = \mu$ (διερεύνησις).

336. Δεδομένων τῶν τμημάτων λ καὶ μ νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\widehat{\text{Α}} = 1\llcorner$) ἐκ τῶν στοιχείων:

i) $\beta = 3\lambda$, $\gamma = \frac{5\lambda}{3}$

ii) $\alpha = 2\lambda$, $\beta = 3\mu$.

iii) $\beta = 4\lambda$, $\widehat{\Gamma} = 15^{\circ}$.

iv) $\alpha = 2\lambda$, $\widehat{\text{Β}} = 75^{\circ}$

240. Ἡ ἀναλυτικὴ μέθοδος Κάθε γεωμετρικὴ κατασκευὴ θὰ θεωρῆται δυνατὴ ἐφ' ὅσον αὐτὴ ἀνάγεται εἰς τὰς ἐκτεθείσας προηγουμένως στοιχειώδεις γεωμετρικὰς κατασκευάς. Πολλὰς φορὰς ὅμως συμβαίνει νὰ εἶναι δύσκολον νὰ ἀνακαλύψωμεν τὴν ἀκολουθίαν τῶν στοιχειωδῶν γεωμετρικῶν κατασκευῶν, διὰ τῶν ὁποίων θὰ φθάσωμεν ἀπὸ τὰ δεδομένα στοιχεῖα εἰς τὸ ζητούμενον σχῆμα. Διὰ τοῦτο θεωροῦμεν ὅτι τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται τοὐλάχιστον μίαν λύσιν καὶ κατασκευάζομεν ἓν σχῆμα, τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν ὅτι πληροῖ τὰ δεδομένα. Ἐν συνεχείᾳ προσπαθοῦμεν νὰ συνδέσωμεν τὰ βασικὰ στοιχεῖα τοῦ σχήματος μὲ τὰ δεδομένα εἰς ἡμᾶς στοιχεῖα, βάσει τῶν γνωστῶν θεωρημάτων. Ἡ ἐργασία αὕτη εἶναι συνήθως (ὄχι πάντοτε) εὐκολωτέρα καὶ καλεῖται **ἀνάλυσις**. Ὁ ἀντίστροφος δρόμος της, ὁ ὁποῖος καλεῖται **σύνθεσις**, εἶναι αὐτὸς ποὺ θὰ μᾶς ὁδηγήσῃ ἀπὸ τὰ δεδομένα στοιχεῖα εἰς τὸ ζητούμενον σχῆμα.

Διὰ εἶναι δυνατὸν ὅμως νὰ συμβῇ αὐτό, θὰ πρέπει αἱ συνθῆκαι, αἱ ὁποῖαι μᾶς ὁδηγοῦν ἀπὸ τὸ ζητούμενον σχῆμα εἰς τὰ δεδομένα στοιχεῖα τοῦ προβλήματος, νὰ εἶναι ἀντιστρεπταί, ἤτοι νὰ εἶναι ἀναγκαῖαι καὶ ἱκαναὶ συνθῆκαι. Ἐὰν τοῦτο διαπιστοῦται ἑκάστοτε κατὰ τὴν ἀνάλυσιν, τότε ἡ ἀπόδειξις θὰ ἦτο λογικῶς περιττή. Ἐπειδὴ ὅμως, συνήθως δὲν εἶναι εὔκολον νὰ ἐλέγχωμεν, ἐὰν αἱ συνθῆκαι, αἱ ὁποῖαι ὁδηγοῦν ἀπὸ τὸ ζητούμενον σχῆμα εἰς τὰ δεδομένα στοιχεῖα εἶναι ἱκαναί, διὰ τοῦτο ἐργαζόμεθα εἰς τὴν ἀνάλυσιν μόνον μὲ ἀναγκαίας συνθήκας καὶ ἐν συνεχείᾳ, μετὰ τὴν σύνθεσιν, εἶναι ἀπαραίτητος ἡ ἀπόδειξις.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι **ἡ ἀνάλυσις εἶναι ἡ μέθοδος τῆς ἀναζητήσεως**

τοῦ τρόπου ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος, ἐφαρμόζεται δὲ ἐπιτυχῶς, ὄχι μόνον εἰς τὰς γεωμετρικὰς κατασκευάς, ἀλλὰ καὶ εἰς τὰς ἀποδείξεις θεωρημάτων τῆς γεωμετρίας, γενικώτερον δὲ καὶ εἰς ἄλλους κλάδους τῶν μαθηματικῶν.

Ἡ ἀξία τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδου, ὡς μεθόδου ἀναζητήσεως, θὰ φανῇ μὲ τὰ ἑπόμενα παραδείγματα.

241. Παράδειγμα 1ον. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν στοιχείων του α, μ_α υ_α.

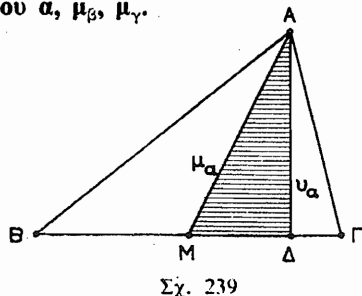
Ἀνάλυσις. Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, ΒΓ ἡ δοθεῖσα πλευρὰ (βάσις), ΑΜ ἡ δοθεῖσα διάμεσος καὶ ΑΔ τὸ δοθὲν ὕψος (σχ. 239). Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΜ δύναται ἐξ ἀρχῆς νὰ κατασκευασθῇ, διότι εἶναι γνωστὴ ἡ ὑποτείνουσα ΑΜ καὶ ἡ μία κάθετος πλευρά του ΑΔ. Οὕτως ἐντοπίζεται ἡ κορυφὴ Α τοῦ ζητουμένου τριγώνου. Αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ θὰ ἀναζητηθοῦν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΜΔ ἑκατέρωθεν τοῦ Μ εἰς ἀπόστασιν $\alpha/2$.

Σύνθεσις - Κατασκευή. Κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΜ μὲ $ΑΜ = \mu_\alpha$ καὶ $ΑΔ = \upsilon_\alpha$ καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ Μ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΜΔ λαμβάνομεν τμήματα $ΜΒ = ΜΓ = \frac{\alpha}{2}$. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

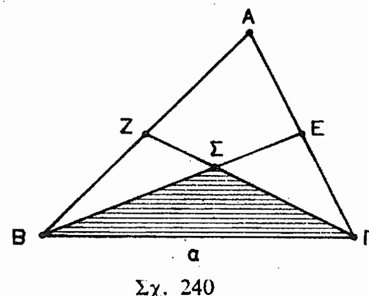
Ἀπόδειξις. Εἶναι προφανὲς ὅτι τοῦτο ἔχει τὰ δεδομένα στοιχεῖα, ἤτοι πλευρὰν $ΒΓ = ΒΜ + ΜΓ = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$, διάμεσον $ΑΜ = \mu_\alpha$ καὶ ὕψος $ΑΔ = \upsilon_\alpha$.

Διερεύνησις. Ὑπάρχει πάντοτε μία λύσις, ἐφ' ὅσον εἶναι $\upsilon_\alpha \leqq \mu_\alpha$. Εἰς τὴν περίπτωσιν πού εἶναι $\upsilon_\alpha = \mu_\alpha$, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ $ΑΒ = ΑΓ$.

242. Παράδειγμα 2ον. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν στοιχείων του α, μ_β, μ_γ.



Σχ. 239



Σχ. 240

Ἀνάλυσις. Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, $ΒΓ = \alpha$ ἡ δοθεῖσα πλευρά, $ΒΕ = \mu_\beta$ καὶ $ΓΖ = \mu_\gamma$ αἱ δύο διάμεσοι αὐτοῦ καὶ Σ τὸ σημεῖον τομῆς αὐτῶν (σχ. 240). Εἰς τὸ τρίγωνον ΣΒΓ εἶναι γνωστὰ τὰ στοιχεῖα $ΒΓ = \alpha$, $ΣΒ = \frac{2}{3} ΒΕ = \frac{2}{3}\mu_\beta$ καὶ $ΣΓ = \frac{2}{3} ΓΖ = \frac{2}{3}\mu_\gamma$. Τότε αὐτὸ δύναται νὰ κατασκευασθῇ, ἐφ' ὅσον γνωρίζομεν τὰς τρεῖς πλευράς του.

Σύνθεσις - Κατασκευή. Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον ΣΒΓ μὲ πλευρὰς ΒΓ $= \alpha$, ΣΒ $= \frac{2}{3}\mu_\beta$, ΣΓ $= \frac{2}{3}\mu_\gamma$. Προεκτείνομεν τὴν ΣΒ ἀπὸ τὸ ἄκρον Σ καὶ εἰς τὴν προέκτασίν της λαμβάνομεν τμῆμα ΣΕ $= \frac{\Sigma B}{2} = \frac{1}{3}\mu_\beta$. Φέρομεν τὴν ΓΕ καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα ΕΑ $=$ ΕΓ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

᾿Απόδειξις. Τοῦτο ἔχει ΒΓ $= \alpha$. ῾Η ΒΕ ἔχει μῆκος ΒΕ $=$ ΒΣ $+$ ΣΕ $= \frac{2}{3}\mu_\beta + \frac{1}{3}\mu_\beta = \mu_\beta$ καὶ εἶναι ἐκ κατασκευῆς διάμεσος, διότι ἐλήφθη ΕΑ $=$ ΕΓ. ῾Η εὐθεῖα ΣΓ τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ζ. Τὸ σημεῖον Σ τῆς διαμέσου ΒΕ, ποὺ ἀπέχει ἀπὸ τὴν κορυφὴν Β ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ΒΕ, εἶναι κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου (§ 162). Συνεπῶς εἶναι σημεῖον καὶ τῆς ἐκ τοῦ Γ διαμέσου. ῎Αρα ἡ ΓΖ εἶναι διάμεσος, ἐπὶ πλέον δὲ εἶναι ΓΣ $= \frac{2}{3}\mu_\gamma$ ἄρα ΓΖ $= \mu_\gamma$, διότι τὸ Σ εἶναι τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου.

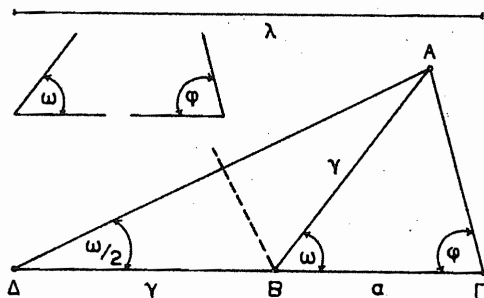
Διερεύνησις. Διὰ νὰ ὑπάρχῃ μία λύσις πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ὑπάρχῃ τὸ τρίγωνον ΣΒΓ. ῾Η συνθήκη ποὺ ἐξασφαλίζει τὴν ὕπαρξιν τοῦ ΣΒΓ εἶναι (§ 115).

$$\left|\frac{2}{3}\mu_\beta - \frac{2}{3}\mu_\gamma\right| < \alpha < \frac{2}{3}\mu_\beta + \frac{2}{3}\mu_\gamma \Longleftrightarrow$$

$$|\mu_\beta - \mu_\gamma| < \frac{3}{2}\alpha < \mu_\beta + \mu_\gamma$$

243. Παράδειγμα 3ον. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων του: $\widehat{B} = \omega$, $\widehat{\Gamma} = \varphi$ καὶ τοῦ ἀθροίσματος $\alpha + \gamma = \lambda$ τῶν δύο πλευρῶν του.

᾿Ανάλυσις. ῎Εστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον (σχ. 241). Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΓΒ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα ΒΔ $=$ ΒΑ $= \gamma \Rightarrow$ ΓΔ $= \alpha + \gamma = \lambda$. Τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἐκ κατασκευῆς ἰσοσκελὲς $\Rightarrow$



Σχ. 241

(1) $\quad B\widehat{\Delta}A = B\widehat{A}\Delta$

῾Η γωνία $\widehat{B} = \omega$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὡς ἐξωτερικὴ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΔ, εἶναι $\omega = B\widehat{\Delta}A + B\widehat{A}\Delta$. ῾Η τελευταία, λόγῳ τῆς σχέσεως (1)

γράφεται $\omega = 2 \cdot \widehat{B\Delta A} \Rightarrow \widehat{B\Delta A} = \frac{\omega}{2}$. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΓΔ δύναται ἐξ ἀρχῆς νὰ κατασκευασθῇ ἐκ τῶν στοιχείων του $\Gamma\Delta = \lambda$, $\widehat{\Gamma} = \varphi$ καὶ $\widehat{\Delta} = \frac{\omega}{2}$.

Σύνθεσις - Κατασκευή. Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον ΑΓΔ (§ 232) μὲ τὰ προαναφερθέντα στοιχεῖα καὶ ἡ λύσις τοῦ προβλήματος πλέον ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν ἐντοπισμὸν τῆς ἀγνώστου κορυφῆς Β. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ πρέπει νὰ εἶναι ἰσοσκελές, ἡ κορυφὴ Β πρέπει νὰ εὑρίσκεται καὶ ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ τμήματος ΑΔ. Φέρομεν ἑπομένως καὶ τὴν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος ΑΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΓΔ εἰς τὸ σημεῖον Β. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀπόδειξις. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει τὴν γωνίαν $\widehat{\Gamma} = \varphi$ ἐκ κατασκευῆς. Ἡ μεσοκάθετος τῆς ΑΔ μᾶς ἐξασφαλίζει $AB = B\Delta \Rightarrow \alpha + \gamma = B\Gamma + AB = B\Gamma + B\Delta = \Gamma\Delta = \lambda$ (ἐκ κατασκευῆς εἶναι $\Gamma\Delta = \lambda$). Ἄρα εἶναι $\alpha + \gamma = \lambda$. Ἐπὶ πλέον εἶναι $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{B\Delta A} + \widehat{BA\Delta} = \frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{2} = \omega \Rightarrow \widehat{B} = \omega$. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον, ὡς ἔχον τὰ δεδομένα στοιχεῖα.

Διερεύνησις. Τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν μὲ τὸν γνωστὸν περιορισμὸν διὰ τὰ τρίγωνα $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} < 2^{L}$ ἢ $\omega + \varphi < 2^{L}$.

Πράγματι, παρακολουθοῦντες ἐξ ἀρχῆς τὴν κατασκευὴν ἡ ὕπαρξις τοῦ τριγώνου ΑΓΔ ἐκ τῶν στοιχείων του $\Gamma\Delta = \lambda$, $\widehat{\Gamma} = \varphi$ καὶ $\widehat{\Delta} = \frac{\omega}{2}$ ἐξασφαλίζεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν συνθήκην $\varphi + \frac{\omega}{2} < 2^{L}$ (1). Ἡ μεσοκάθετος τῆς ΑΔ δίδει τὸ σημεῖον Β ἐπὶ τοῦ τμήματος ΓΔ, μόνον ὅταν $\Gamma\Delta > \Gamma A$ (§ 75). Ἡ ἀνισότης αὐτὴ μεταφέρεται εἰς ἀνισότητα γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΓΔ: $\widehat{\Gamma A\Delta} > \widehat{\Delta} \Rightarrow \widehat{\Gamma AB} + \widehat{BA\Delta} > \widehat{\Delta} \Rightarrow \widehat{A} + \frac{\omega}{2} > \frac{\omega}{2} \Rightarrow \widehat{A} > 0$ ἢ $0 < \widehat{A}$ (2).

Ἐπειδὴ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρέπει νὰ εἶναι $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 2^{L} \Rightarrow \widehat{A} + \omega + \varphi = 2^{L}$ (3). Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς σχέσεις (2) καὶ (3) καὶ λαμβάνομεν $\widehat{A} + \omega + \varphi < 2^{L} + \widehat{A} \iff \widehat{\omega} + \widehat{\varphi} < 2^{L}$

Παρατηρήσεις

i) Εἰς κατασκευὰς ὅπου εἰς τὰ δεδομένα στοιχεῖα δίδεται τὸ ἄθροισμα εὐθυγράμμων τμημάτων (ἢ ἡ διαφορὰ αὐτῶν), φροντίζομεν κατὰ κανόνα εἰς τὴν ἀνάλυσιν νὰ τὸ ἐμφανίσωμεν ἐπὶ εὐθείας τινός, ὥστε νὰ δύναται τοῦτο νὰ χρησιμοποιηθῇ εἰς τὴν σύνθεσιν. Εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα, τὸ ἄθροισμα $\alpha + \gamma = \lambda$ τὸ ἐνεφανίσαμεν εἰς τὸ τμῆμα ΓΔ.

ii) Ἐὰν εἰς τὰ δεδομένα στοιχεῖα ἑνὸς προβλήματος ὑπάρχῃ ἓν μόνον μῆκος, ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα, κατὰ τὴν διερεύνησιν, εἰς οὐδένα περιορισμὸν μεγέθους θὰ ὑπόκειται τοῦτο.

244. Παράδειγμα 4ον. Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη πρὸς δοθέντα κύκλον.

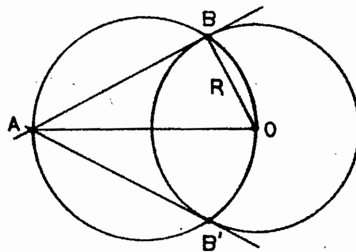
Ἀνάλυσις. Ἔστω Α τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ (Ο,R) ὁ δοθεὶς κύκλος (σχ. 242). Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ σημείου ἐπαφῆς Β. Μία συνθήκη, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ πληροῖ τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι νὰ ἀνήκῃ εἰς τὸν κύκλον (Ο,R). Μία δευτέρα συνθήκη, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ πληροῖ τὸ σημεῖον Β, εἶναι ἡ γωνία $\widehat{ABO}$ νὰ εἶναι ὀρθή.

Ἄρα τὸ ἄγνωστὸν σημεῖον Β, πρέπει νὰ εὑρίσκεται καὶ ἐπὶ κύκλου διαμέτρου ΑΟ.

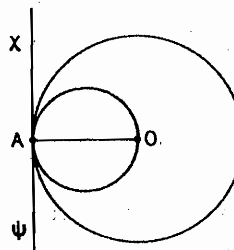
Σύνθεσις - Κατασκευή. Μὲ διάμετρον τὴν ΑΟ γράφομεν κύκλον, ὁ ὁποῖος τέμνει τὸν (Ο,R) εἰς τὸ σημεῖον Β. Ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη.

Ἀπόδειξις. Ἡ ΑΒ εἶναι πράγματι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου (Ο,R) διότι εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΒ εἰς τὸ ἄκρον Β αὐτῆς καὶ ἐπὶ πλέον διέρχεται διὰ τοῦ Α. Ἄρα εἶναι ἡ ζητουμένη.

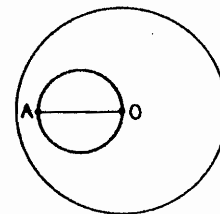
Διερεύνησις. Ἐφ' ὅσον τὸ Α εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ κύκλου (Ο,R), οἱ δύο κύκλοι ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα τὰ Β καὶ Β′. Ἄρα ὑπάρχουν δύο λύσεις, ἤτοι αἱ ἐφαπτόμεναι ΑΒ καὶ ΑΒ′. Ἐὰν τὸ Α εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου (Ο,R) (σχ. 243) οἱ δύο κύκλοι ἐφάπτονται εἰς τὸ Α καὶ ὑπάρχει μία μόνον λύσις, ἡ



Σχ. 242



Σχ. 243



Σχ. 244

κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ εἰς τὸ Α. Ἐὰν τὸ Α εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου (Ο,R) δὲν ὑπάρχει λύσις, διότι οἱ δύο κύκλοι δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον (σχ. 244).

245. Παράδειγμα 5ον. Νὰ ἀχθῇ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη δύο δοθέντων κύκλων (Κ,R) καὶ (Λ,ρ).

Ἀνάλυσις. Θεωροῦντες τὸ πρόβλημα λυμένον ὑποθέτομεν ὅτι ἔχει ἀχθῆ ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη ΜΝ τῶν δύο δοθέντων κύκλων (σχ. 245). Ἔστω ὅτι εἶναι $R > \rho$. Φέρομεν τὰς ΚΜ καὶ ΛΝ, αἱ ὁποῖαι προφανῶς εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΜΝ καὶ ἐκ τοῦ Λ φέρομεν τὴν ΛΑ//ΜΝ. Τότε θὰ εἶναι $ΛΑ \perp ΚΜ$ ἐνῷ ἐκ τοῦ σχηματιζομένου ὀρθογωνίου ΑΜΝΛ ἔχομεν $ΑΜ = ΛΝ = \rho$. Τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΚΛ γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν $ΚΛ = \delta$,

ὅπου δ ἡ διάκεντρος τῶν δύο κύκλων, καὶ τὴν μίαν κάθετον, πλευράν του ΚΛ $= KM - AM = R - \rho$. Ἄρα τοῦτο δύναται ἐξ ἀρχῆς νὰ κατασκευασθῇ.

Σύνθεσις - Κατασκευή. Κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΚΑΛ μὲ $ΚΛ = \delta$ καὶ $KA = R - \rho$. Προεκτείνομεν τὴν ΚΑ, ἡ ὁποία τέμνει τὸν κύκλον (K, R) εἰς τὸ Μ. Ἑπομένως τὸ Α κεῖται μεταξὺ τῶν Κ καὶ Μ, ἀφοῦ εἶναι $KA = R - \rho$ καὶ $KM = R$. Ἐκ τοῦ Μ φέρομεν εὐθεῖαν (ε) κάθετον ἐπὶ τὴν ΚΑΜ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη.

Ἀπόδειξις. Ἡ (ε) εἶναι προφανῶς ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου (K, R) ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΚΜ εἰς τὸ ἄκρον Μ αὐτῆς. Ἐκ τοῦ Λ φέρομεν τὴν $ΛΝ \perp (\varepsilon)$ καὶ τότε τὸ τετράπλευρον ΑΜΝΛ εἶναι ὀρθογώνιον, διότι ἔχει τρεῖς ὀρθὰς γωνίας εἰς τὰς κορυφάς του Α, Μ καὶ Ν. Ἄρα

(1) $$AM = ΛΝ$$

Ἀλλὰ $AM = KM - KA = R - (R - \rho) = \rho$. Ἑπομένως ἐκ τῆς (1), ἕπεται ὅτι $ΛΝ = \rho$, ἤτοι τὸ σημεῖον Ν ἀνήκει εἰς τὸν κύκλον (Λ, ρ). Τότε ἡ (ε) εἶναι ἐφαπτομένη καὶ τοῦ κύκλου (Λ, ρ) ὡς κάθετος ἐπὶ τῆς ἀκτῖνα ΛΝ εἰς τὸ ἄκρον Ν αὐτῆς.

Διερεύνησις. Ἡ λύσις ἐξησφαλίσθη ἀπὸ τὴν ὕπαρξιν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΑΛ, τὸ ὁποῖον ὑπάρχει πάντοτε, ἐφ' ὅσον εἶναι

$$ΚΛ > KA \quad ἢ \quad \boldsymbol{\delta > R - \rho}$$

Τότε μάλιστα ὑπάρχει καὶ δευτέρα λύσις Μ'Ν' συμμετρικὴ τῆς πρώτης ὡς πρὸς τὴν διάκεντρον ΚΛ.

Σχ. 245

Σχ. 246

Ἰδιαιτέρως θὰ ἐξετάσωμεν τὸ ἐνδεχόμενον $R = \rho$, δηλαδὴ ὅταν οἱ κύκλοι εἶναι ἴσοι (σχ. 246). Τότε ἐκ τοῦ Κ ἄγομεν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὴν ΚΛ, ἡ ὁποία τέμνει τὸν κύκλον (K, R) εἰς τὸ Μ. Ἡ ἐκ τοῦ Μ παράλληλος τῆς ΚΛ εἶναι ἡ ζητουμένη κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη. Ἡ ἀπόδειξις εἶναι προφανής, διότι ἡ εὐθεῖα αὐτὴ ὡς ἀπέχουσα ἐκ τοῦ Λ ἀπόστασιν $ΛΝ = KM = R$, ἐφάπτεται καὶ τοῦ κύκλου (Λ, R).

Ἐφ' ὅσον οἱ δύο κύκλοι δὲν ταυτίζονται, ὑπάρχουν πάντοτε δύο λύσεις συμμετρικαὶ ἀλλήλων ὡς πρὸς τὴν διάκεντρον ΚΛ.

'Εὰν οἱ δύο κύκλοι ταυτίζωνται, ὑπάρχουν ἄπειροι λύσεις καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀπροσδιόριστον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

337. Νὰ κατασκευασθοῦν γωνίαι:
i) $22^\circ 30'$, ii) $67^\circ 30'$, iii) 105°, iv) 135°, v) 150°.

338. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται ἡ γωνία $\widehat{A}$, ἡ πλευρὰ β καὶ ἡ διχοτόμος δ τῆς γωνίας $\widehat{A}$. 'Εφαρμογὴ διὰ $\widehat{A} = 60^\circ$, $\beta = 4$ cm καὶ $\delta_\alpha = 3$ cm.

339. Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ μία πλευρὰ α καὶ αἱ δύο διαγώνιοι δ καὶ δ'.

340. Νὰ κατασκευασθῇ ρόμβος, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ διαγώνιοι δ καὶ δ'.

341. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α, μ_α, μ_β.

342. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) ἐκ τοῦ ὕψους υ_α καὶ τῆς ἀκτῖνος ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

343. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον ἐκ τῆς ἀκτῖνος ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

344. Νὰ κατασκευασθῇ ρόμβος ἐκ τῆς μιᾶς διαγωνίου δ αὐτοῦ καὶ τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

345. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$, υ_α.

346. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν β, γ, υ_α.

347. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ καὶ $\beta + \gamma = \lambda$.

348. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α, $\widehat{B}$ καὶ $\beta + \gamma = \lambda$.

349. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν $\widehat{A} = 1\llcorner$, $\widehat{B}$, $\alpha + \gamma = \lambda$.

350. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν $\widehat{A} = 1\llcorner$, $\widehat{B}$, $\alpha + \beta = \lambda$.

351. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίιυ δίδονται τὰ μέσα Κ, Λ, Μ τῶν τριῶν πλευρῶν του.

Β'.

352. Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου δίδεται μία πλευρά, μία διαγώνιος καὶ ἡ γωνία τῶν διαγωνίων.

353. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου δίδονται ἡ περίμετρος 2λ καὶ ἡ διαγώνιος δ.

354. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἐκ τοῦ ἀθροίσματος λ τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς διαγωνίου αὐτοῦ.

355. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ διαφορὰ λ τῆς πλευρᾶς ἀπὸ τὴν διαγώνιον.

356. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν μ_α, μ_β, μ_γ.

357. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν υ_α, μ_α καὶ ἐκ τοῦ ὅτι εἶναι $\alpha = 2\beta$.

358. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν β, γ, μ_α.

359. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν $\widehat{A} = 1\llcorner$, α καὶ $\beta - \gamma = \lambda$.

360. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῆς περιμέτρου αὐτοῦ 2τ καὶ τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$.

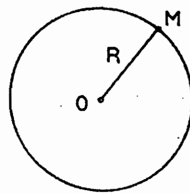
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

246. Τὴν ἔννοιαν καὶ τὸν ὁρισμὸν τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου τὴν ἔχομεν ἤδη συναντήσει εἰς τὴν παράγραφον 76. Οἱ γ. τόποι ποὺ ἔχομεν γνωρίσει καλοῦνται στοιχειώδεις γεωμετρικοὶ τόποι καὶ τοὺς ἔχομεν χρησιμοποιήσει καὶ εἰς τὰς γεωμετρικὰς κατασκευάς. Συνοψίζομεν αὐτοὺς κατωτέρω καὶ εἰς τὸ ἑξῆς θὰ τοὺς θεωροῦμεν ὁπωσδήποτε γνωστούς.

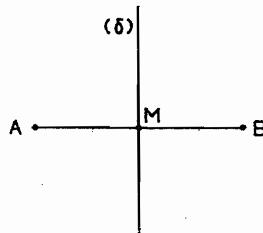
ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

247. 1. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ὡρισμένην ἀπόστασιν R ἀπὸ σταθερὸν σημεῖον O τοῦ ἐπιπέδου, εἶναι ὁ κύκλος (O, R), ἐξ ὁρισμοῦ (σχ. 247).

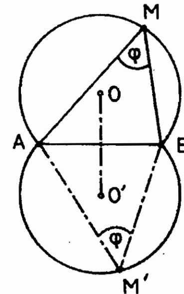
2. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰ ἄκρα δοθέντος τμήματος AB, εἶναι ἡ μεσοκάθετος (δ) τοῦ τμήματος AB (βλέπε § 75) (σχ. 248).



Σχ. 247



Σχ. 248

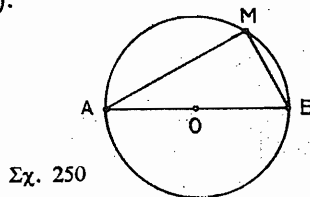


Σχ. 249

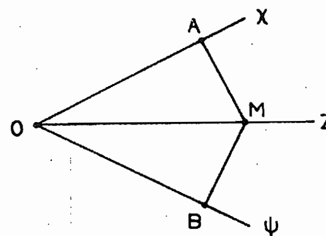
3. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα AB φαίνεται ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν φ, εἶναι ἡ ἕνωσις τῶν δύο τόξων $\widehat{AMB}$ καὶ $\widehat{AM'B}$ μὲ κοινὰ ἄκρα τὰ A καὶ B, τὰ ὁποῖα δέχονται γωνίαν φ (§ 204 πόρ. V) (σχ. 249).

Ἰδιαιτέρως σημειώνομεν τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ γωνία φ εἶναι ὀρθή. Τότε ὁ γεωμετρικὸς τόπος εἶναι κύκλος μὲ διάμετρον τὸ τμῆμα AB (σχ. 250).

4. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν ἐσωτερικῶν σημείων γωνίας $x\widehat{O}y$, τὰ ὁποῖα ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰς πλευράς της, εἶναι διχοτόμος OZ αὐτῆς (§ 80) (σχ. 251).



Σχ. 250



Σχ. 251

248. Γενικὸς τρόπος ἐργασίας. Εἰς τὰ θέματα τῶν γεωμετρικῶν τόπων κατὰ κανόνα δίδεται ἡ ἰδιότης, τὴν ὁποίαν ἔχουν τὰ σημεῖα τοῦ τόπου καὶ ζητεῖται ὁ προσδιορισμὸς αὐτοῦ.

Εἰς τοὺς γεωμετρικοὺς τόπους σχεδὸν πάντοτε δυνάμεθα νὰ πιθανολογήσωμεν ἐξ ἀρχῆς τὴν μορφὴν τοῦ τόπου κατασκευάζοντες τρία σημεῖα μὲ τὴν χαρακτηριστικὴν ἰδιότητα τοῦ τόπου. Ἐὰν ταῦτα συμβαίνῃ νὰ κεῖνται ἐπὶ εὐθείας, τότε ὁ τόπος θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα αὕτη ἢ τμῆμα αὐτῆς, ἐνῷ ἐὰν ταῦτα δὲν κεῖνται ἐπὶ εὐθείας, τότε ὁ τόπος θὰ εἶναι ὁ κύκλος, τὸν ὁποῖον ὁρίζουν ἢ τόξον αὐτοῦ. Ἡ διαπίστωσις αὕτη ἁπλῶς θὰ καθοδηγήσῃ τὴν σκέψιν καὶ τὴν προσπάθειάν μας εἰς τὸν ἐντοπισμὸν τοῦ τόπου, χωρὶς νὰ ἀποτελῇ καὶ ἀπόδειξιν.

Εἰς τὴν ἀναζήτησιν ἑνὸς γεωμετρικοῦ τόπου, ἡ ἀνάλυσις εἶναι ἡ μέθοδος ποὺ ἀποκλειστικὰ σχεδὸν χρησιμοποιεῖται. Ἔστω (Τ) ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος καὶ f ἡ χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τῶν σημείων του. Θεωροῦμεν ἓν σημεῖον Μ τοῦ τόπου καὶ καταλλήλως ἐπεξεργαζόμενοι τὴν ἰδιότητα f αὐτοῦ συσχετίζοντες τὸ σημεῖον τοῦτο μὲ σταθερὰ δεδομένα στοιχεῖα, ἀνακαλύπτομεν ὅτι τοῦτο ἀνήκει εἰς κάποιον σύνολον (σχῆμα) (Σ). Τὸ γεγονὸς ὅτι τὸ τυχαῖον σημεῖον Μ τοῦ τόπου (Τ) ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον (Σ), μᾶς πείθει ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ (Τ) ἀνήκουν εἰς τὸ (Σ). Ἄρα θὰ εἶναι

(1) $$(\mathrm{T}) \subseteqq (\Sigma)$$

Εἶναι ἀπαραίτητον ὅμως νὰ ἐξετάσωμεν ἐὰν καὶ κάθε σημεῖον τοῦ συνόλου (Σ) ἔχῃ τὴν ἰδιότητα f, δηλαδὴ ἐὰν εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου (Τ). Πρὸς τοῦτο, λαμβάνομεν ἓν τυχαῖον σημεῖον τοῦ συνόλου (Σ) καὶ τὸ ἐξετάζομεν ἐὰν ἔχῃ τὴν ἰδιότητα f. Ἐὰν τοῦτο συμβαίνῃ, ἡ ἐργασία αὕτη εἶναι ἡ ἀντίστροφος τῆς προηγουμένης καὶ μᾶς πείθει ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ (Σ) ἀνήκουν εἰς τὸν τόπον (Τ) δηλαδὴ θὰ εἶναι

(2) $$(\Sigma) \subseteqq (\mathrm{T})$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) πλέον ἕπεται ὅτι

$$(\mathrm{T}) \equiv (\Sigma),$$

ἤτοι ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος εἶναι τὸ ἀνακαλυφθὲν σύνολον (σχῆμα) (Σ).

Τοῦτο τὸ ἀντίστροφον ὅμως δὲν συμβαίνει πάντοτε δι' ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ (Σ) καὶ εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ ἐπισημάνωμεν τὰς συνθήκας, ὑπὸ τὰς ὁποίας ἓν στοιχεῖον τοῦ Σ ἔχει τὴν ἰδιότητα f τοῦ τόπου. Ἡ ἀνακάλυψις τῶν συνθηκῶν τούτων, ἔχει ὡς συνέπειαν τὸν περιορισμὸν τοῦ τόπου (Τ) εἰς ἓν ὑποσύνολον (Σ_1) τοῦ (Σ).

Συνήθως εἰς τὴν πρᾶξιν, ἡ ἀνακάλυψις αὐτῶν τῶν συνθηκῶν, ἂν ὑπάρχουν, δὲν εἶναι πάντοτε εὔκολος καὶ διὰ τοῦτο ἀπαιτεῖται μία κατάλληλος διερεύνησις τῶν ὁριακῶν θέσεων, ἂν ὑπάρχουν, τὰς ὁποίας δύνανται νὰ λάβουν τὰ σημεῖα τοῦ τόπου (Τ) μέσα εἰς τὸ σύνολον (Σ).

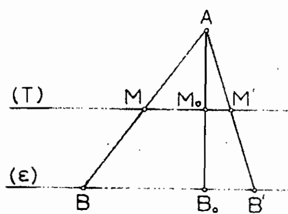
Ἡ διερεύνησις αὕτη θὰ ἦτο λογικῶς περιττή, ἐὰν κατὰ τὴν ἀνάλυσιν

ἐχρησιμοποιούσαμεν μόνον ἀναγκαίας καὶ ἱκανὰς συνθήκας, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον συνήθως δὲν εἶναι πάντοτε εὔκολον νὰ ἐλέγχεται. Δι' αὐτό, κατὰ τὴν ἀνάλυσιν χρησιμοποιοῦμεν ἀναγκαίας μόνον συνθήκας καὶ ἐν συνεχείᾳ διὰ τοῦ ἀντιστρόφου καὶ τῆς διερευνήσεως γίνεται ὁ ἔλεγχος τοῦ ἂν αὗται εἶναι ἱκαναί.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΤΟΠΩΝ

249. Παράδειγμα 1. Δίδεται εὐθεῖα (ε) καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτῆς. Ἐὰν Β εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς (ε), νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τοῦ τμήματος ΑΒ.

Ἀνάλυσις. Ἔστω Μ τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΑΒ. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν $AB_0 \perp$ (ε) καὶ ἔστω M_0 τὸ μέσον τοῦ τμήματος AB_0 (σχ. 252). Ἡ εὐθεῖα MM_0 εἶναι παράλληλος τῆς (ε) ὡς διερχομένη ἀπὸ τὰ μέσα Μ καὶ M_0 τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ABB_0, ἄρα κάθετος ἐπὶ τοῦ τμήματος AB_0 καὶ μάλιστα εἰς τὸ μέσον αὐτοῦ. Ἐπειδὴ τὸ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας (Τ), παραλλήλου πρὸς τὴν (ε) καὶ διερχομένης διὰ τοῦ μέσου M_0 τοῦ συγκεκριμένου καὶ γνωστοῦ τμήματος AB_0, ἕπεται ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ τόπου εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης.



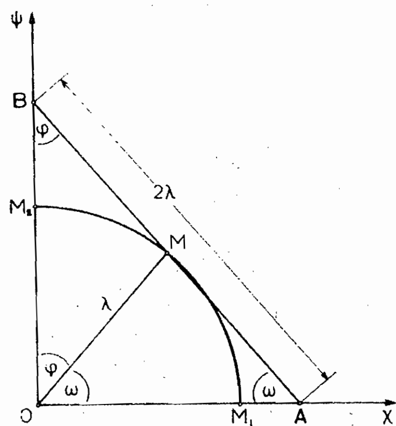
Σχ. 252

Ἀντιστρόφως. Ἔστω Μ′ τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας (Τ). Θὰ δείξωμεν ὅτι ὑπάρχει τμῆμα, τοῦ ὁποίου τὸ ἓν ἄκρον εἶναι τὸ Α καὶ τὸ ἄλλο εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς (ε) καὶ τὸ ὁποῖον ἔχει μέσον τὸ Μ′. Πράγματι ἡ εὐθεῖα ΑΜ′ τέμνει πάντοτε τὴν (ε) εἰς ἓν σημεῖον Β′. Εἰς τὸ τρίγωνον AB_0B' ἡ M_0M' εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν B_0B' καὶ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον M_0 τῆς πλευρᾶς AB_0. Ἄρα θὰ διέρχεται καὶ ἀπὸ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΑΒ′, ἤτοι τὸ Μ′ εἶναι μέσον τοῦ τμήματος ΑΒ′. Τότε ὁ ζητούμενος γ. τόπος εἶναι ἡ εὐθεῖα MM_0, παράλληλος τῆς (ε) καὶ διερχομένη ἀπὸ τὸ μέσον M_0 τοῦ καθέτου ἐπὶ τὴν (ε) τμήματος AB_0.

Παρατήρησις. Ἡ χρησιμοποιηθεῖσα ἀποδεικτικὴ μέθοδος κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἰδιότης τοῦ μεμονωμένου σημείου Μ νὰ ἀνήκῃ εἰς εὐθεῖαν (Τ), ἐγενικεύθη δι' ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ γ. τόπου, καλεῖται **ἐπαγωγικὴ** μέθοδος. Ἀντιθέτως πρὸς αὐτὴν ὑπάρχει καὶ ἡ **ἀπαγωγικὴ** μέθοδος ἡ ὁποία εἶναι ἡ πλέον χρησιμοποιουμένη μέθοδος τῶν θεωρημάτων. Κατ' αὐτήν, ἐκ τῶν γενικῶν ἰδιοτήτων τοῦ συνόλου τῶν σχημάτων, ἀποδεικνύονται αἱ ἰδιότητες συγκεκριμένου σχήματος.

250. Παράδειγμα 2. Εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ μήκους 2λ τὰ ἄκρα ὀλισθαίνουν ἕκαστον ἐπὶ ἑκάστης πλευρᾶς ὀρθῆς γωνίας $x\widehat{O}y$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου Μ τοῦ τμήματος ΑΒ.

Ἀνάλυσις. Τὰ ἄκρα Α καὶ Β τοῦ τμήματος ΑΒ $= 2\lambda$ εὑρίσκονται ἐπὶ τῶν πλευρῶν Οx καὶ Οy ἀντιστοίχως τῆς δοθείσης ὀρθῆς γωνίας $x\widehat{O}y$ (σχ. 253). Λαμβάνομεν μίαν τυχοῦσαν θέσιν ΑΒ τοῦ τμήματος 2λ καὶ ἔστω Μ τὸ μέσον του. Τοῦτο εἶναι ἓν σημεῖον τοῦ τόπου. Τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΟΒ ἡ ὑποτείνουσα ἔχει ὡρισμένον μῆκος ΑΒ $= 2\lambda$. Ἄρα ἡ ἐπ' αὐτὴν διάμεσος ΟΜ, ὡς ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης, ἔχει μῆκος λ. Ἐξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι τὸ μέσον Μ τοῦ τμήματος ἀπέχει σταθερὰν ἀπόστασιν λ ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο, ἤτοι εὑρίσκεται ἐπὶ κύκλου (Ο, λ).



Σχ. 253

Διερεύνησις. Ἐπειδὴ τὸ τμῆμα ΑΒ εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς ὀρθῆς γωνίας $x\widehat{O}y$, ἕπεται ὅτι καὶ τὸ μέσον του εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τῆς γωνίας. Ἄρα τὰ σημεῖα τοῦ τόπου περιορίζονται εἰς τὸ τόξον $\widehat{M_1M_2}$ τοῦ κύκλου (Ο, λ) τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς γωνίας $x\widehat{O}y$.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόξου $\widehat{M_1M_2}$ τοῦ εὑρισκομένου ἐντὸς τῆς ὀρθῆς γωνίας $x\widehat{O}y$. Μὲ κέντρον Μ καὶ ἀκτῖνα ΜΟ $= \lambda$ γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν Οx εἰς σημεῖον Α. Ἡ ΜΑ τέμνει τὴν Οy εἰς σημεῖον Β. Τὸ τρίγωνον ΜΟΑ εἶναι ἐκ κατασκευῆς ἰσοσκελὲς μὲ ΜΟ $=$ ΜΑ $= \lambda$, ἄρα $M\widehat{O}A = \widehat{A} = \omega$.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΟΒ ἕπεται ὅτι εἶναι :

$\widehat{B} = \varphi = 1^{L} - \omega$, ἐνῷ ἐκ τῆς ὀρθῆς γωνίας $x\widehat{O}y$ ἕπεται ὅτι $B\widehat{O}M = 1^{L} - \omega$.

Ἄρα $\widehat{B} = B\widehat{O}M$, ἤτοι καὶ τὸ τρίγωνον ΟΜΒ εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ ΜΟ $=$ ΜΒ $= \lambda$.

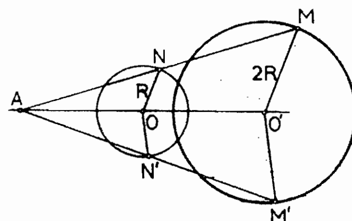
Ἐκ τῶν δύο ἰσοσκελῶν τριγώνων ἕπεται ΜΑ $=$ ΜΟ $=$ ΜΒ $= \lambda$. Ἄρα τὸ Μ εἶναι μέσον τοῦ τμήματος ΑΒ $= 2\lambda$, ἤτοι τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ τόξου $\widehat{M_1M_2}$ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Ἐξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι ὁ ζητούμενος γ. τόπος εἶναι τὸ τέταρτον $\widehat{M_1M_2}$ τοῦ κύκλου (Ο, λ) μὲ ὁριακὰ σημεῖα τὰ σημεῖα M_1 καὶ M_2.

251. Παράδειγμα 3. Δίδεται κύκλος (Ο, R) καὶ σημεῖον Α. Ἐὰν Ν εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (Ο, R) φέρομεν τὴν ΝΑ καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν σημεῖον Μ, τοιοῦτον ὥστε ΝΜ = ΝΑ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Μ, ὅταν τὸ Ν διατρέχῃ τὸν κύκλον (Ο, R).

Ἀνάλυσις. Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου, ἤτοι εἶναι ΝΜ = ΝΑ (σχ. 254). Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΝΟ καὶ ἐκ τοῦ Μ παράλληλον τῆς ΝΟ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΟ εἰς τὸ σημεῖον Ο′.

Τοῦ τριγώνου ΑΜΟ′ ἡ ΝΟ εἶναι παράλληλος τῆς ΜΟ′ καὶ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Ν τῆς πλευρᾶς ΑΜ. Ἄρα θὰ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς ΑΟ′, ἤτοι ΑΟ′ = 2 · ΑΟ, ἐπομένως τὸ σημεῖον Ο′ εἶναι σταθερόν. Ἐπὶ πλέον ἡ ΝΟ θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ΜΟ′, ἤτοι θὰ εἶναι $NO = \frac{MO'}{2} \Rightarrow MO' = 2 \cdot NO = 2R$. Ἄρα τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ τόπου ἀπέχει σταθερὰν ἀπόστασιν 2R ἀπὸ τὸ σταθερὸν σημεῖον Ο′. Ἐξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ τόπου κεῖνται ἐπὶ κύκλου (Ο′, 2R).



Σχ. 254

Ἀντιστρόφως. Ἔστω Μ′ σημεῖον τοῦ κύκλου (Ο′, 2R). Θὰ δείξωμεν ὅτι τοῦτο ἀνήκει εἰς τὸν τόπον. Φέρομεν τὴν ΑΜ′ καὶ ἐκ τοῦ μέσου Ο τῆς ΑΟ′ φέρομεν παράλληλον τῆς Μ′Ο′, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΜ′ εἰς σημεῖον Ν′. Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΟ′Μ′ ἕπεται ὅτι Ν′ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΜ′ καὶ ἐπὶ πλέον εἶναι

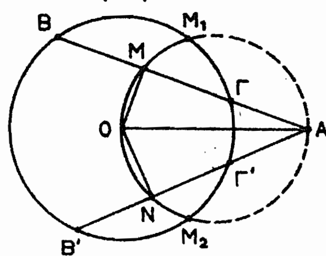
$ON' = \frac{O'M'}{2} = \frac{2R}{2} = R$. Ἄρα τὸ Ν′ ἀνήκει εἰς τὸν κύκλον (Ο, R) καὶ ἐπειδὴ εἶναι μέσον τοῦ τμήματος ΑΜ′ ἕπεται ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖον Μ′ τοῦ κύκλου (Ο′, 2R) ἔχει τὴν ἰδιότητα τοῦ τόπου, ἄρα ἀνήκει εἰς τὸν τόπον καὶ ἐπομένως ὁ ζητούμενος γ. τόπος εἶναι ὁ κύκλος (Ο′ 2R).

252. Παράδειγμα 4. Δίδεται κύκλος (Ο, R) καὶ σημεῖον Α. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν μέσων τῶν χορδῶν τοῦ κύκλου, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τοῦ σημείου Α (προεκτεινόμεναι ἐν ἀνάγκῃ).

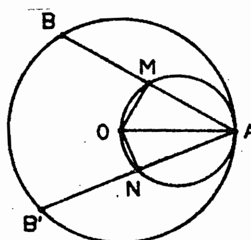
Ἀνάλυσις. Ἔστω ὁ κύκλος (Ο, R) καὶ ΒΓ μία χορδή, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ Α καὶ Μ τὸ μέσον αὐτῆς (σχ. 255). Τὸ Μ εἶναι σημεῖον τοῦ ζητουμένου γ. τόπου. Τὸ τμῆμα ΟΜ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν χορδήν, διότι τὸ Ο εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου (§ 170, πόρ. II). Ἄρα τὸ σταθερὸν τμῆμα ΟΑ φαίνεται ἀπὸ τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ τόπου ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν καὶ συνεπῶς τὸ σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει διάμετρον τὴν ΟΑ.

Διερεύνησις. i) Τὸ σημεῖον Α εἶναι ἐξωτερικὸν τοῦ κύκλου (Ο, R). Τότε ὁ κύκλος διαμέτρου ΟΑ τέμνει τὸν κύκλον (Ο, R) εἰς δύο σημεῖα M_1 καὶ M_2 (σχ. 255). Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα τοῦ τόπου, ὡς μέσα χορδῶν τοῦ κύκλου εἶναι ἐσωτερικὰ σημεῖα αὐτοῦ, ἕπεται ὅτι ταῦτα ἀνήκουν εἰς τὸ τόξον $\overset{\frown}{M_1OM_2}$. Ἄρα τὰ σημεῖα τοῦ τόπου ἀνήκουν εἰς τὸ τόξον $\overset{\frown}{M_1OM_2}$.

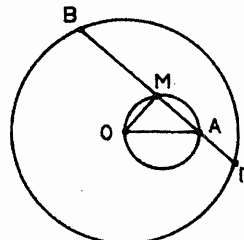
ii) Τὸ σημεῖον Α ἀνήκει εἰς τὸν κύκλον (σχ. 256) ἢ εἶναι ἐσωτερικὸν αὐτοῦ (σχ. 257). Τότε ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ κύκλου μὲ διάμετρον τὴν ΟΑ εἶναι ἐσωτερικὰ τοῦ κύκλου (Ο, R) ἐξαιρέσει τοῦ Α εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ τοῦτο κεῖται ἐπὶ τοῦ κύκλου (Ο, R). Ἄρα τὰ σημεῖα τοῦ τόπου, ἀνήκουν εἰς τὸν κύκλον διαμέτρου ΟΑ.



Σχ. 255



Σχ. 256



Σχ. 257

Ἀντιστρόφως. Ἔστω Ν τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου μὲ διάμετρον τὴν ΟΑ ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου (Ο, R). Φέρομεν τὴν ΝΑ, ἡ ὁποία τέμνει τὸν κύκλον (Ο, R) εἰς δύο σημεῖα Β' καὶ Γ'. Ἡ ΟΝ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν Β'Γ', διότι τὸ τρίγωνον ΟΝΑ, ὡς ἐγγεγραμμένον εἰς ἡμικύκλιον, εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Ν. Τότε ὅμως τὸ Ν θὰ εἶναι μέσον τῆς χορδῆς Β'Γ', διότι ἡ ἐκ τοῦ κέντρου Ο τοῦ κύκλου κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν Β'Γ' διέρχεται ἐκ τοῦ μέσου αὐτῆς (§ 170, πόρ. ΙΙ).

Ἄρα ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος εἶναι τὸ τόξον $M_1\widehat{O}M_2$ τοῦ κύκλου μὲ διάμετρον τὴν ΟΑ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου (Ο, R) μὲ ὁριακὰ σημεῖα τὰ M_1 καὶ M_2 (σχ. 255) ἢ ὁλόκληρος ὁ κύκλος διαμέτρου ΟΑ (σχ. 256 καὶ 257).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

361. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τὰ ὁποῖα ἀπὸ δοθεῖσαν εὐθεῖαν (ε) ἀπέχουν δοθεῖσαν ἀπόστασιν α.

362. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἰσαπέχουν ἀπὸ δύο δοθείσας παραλλήλους εὐθείας (ε_1) καὶ (ε_2).

363. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι διέρχονται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β.

364. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται εὐθείας (ε) εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτῆς Α.

365. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν κορυφῶν Α τῶν τριγώνων ΑΒΓ, τὰ ὁποῖα ἔχουν σταθερὰν βάσιν α καὶ δοθεῖσαν διάμεσον μ_α.

366. Τῶν αὐτῶν ὡς ἄνω τριγώνων νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ κέντρου βάρους αὐτῶν.

367. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν κέντρων τῶν παραλληλογράμμων, ποὺ σχηματίζονται ἂν ἀπὸ τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς βάσεως ΒΓ ἀχθοῦν παράλληλοι πρὸς τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς του.

368. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται τῶν πλευρῶν δοθείσης γωνίας.

369. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν συμμετρικῶν δοθέντος σημείου Α ὡς πρὸς τὰς εὐθείας, ποὺ διέρχονται διὰ δοθέντος σημείου Ο.

370. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα δοθεὶς κύκλος φαίνεται ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν ω.

371. Μεταβλητοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἡ πλευρὰ ΒΓ διατηρεῖται σταθερὰ κατὰ θέσιν καὶ μέγεθος καὶ ἡ γωνία Α σταθερὰ κατὰ μέγεθος. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ κέντρου τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου του.

372. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τῶν χορδῶν δοθέντος κύκλου ποὺ ἔχουν δεδομένον μῆκος λ.

373. Δίδεται κύκλος (Ο, R) καὶ σημεῖον Α. Ἐὰν Κ εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου, νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τοῦ τμήματος ΑΚ, ὅταν τὸ Κ διαγράφῃ τὸν κύκλον.

Β΄.

374. Δίδεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ θεωροῦμεν δύο σημεῖα Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι ΑΔ = ΓΕ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τοῦ τμήματος ΔΕ.

375. Δίδεται κύκλος διαμέτρου ΑΒ. Φέρομεν τυχοῦσαν χορδὴν ΑΓ καὶ εἰς τὴν προέκτασίν της λαμβάνομεν τμῆμα ΓΜ = ΓΒ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ Μ.

376. Μεταβλητοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἡ πλευρὰ α παραμένει σταθερὰ κατὰ θέσιν καὶ μέγεθος καὶ ἡ γωνία $\widehat{A} = \omega$ παραμένει σταθερὰ κατὰ μέγεθος. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου ἑκάστης ἐκ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ.

377. Δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀντιστοίχως εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Β δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ καὶ μεταξύ των εἰς τό σημεῖον Μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ Μ.

378. Δίδεται κύκλος κέντρου Ο καὶ διάμετρος ΑΟΒ αὐτοῦ. Φέρομεν τυχοῦσαν ἀκτῖνα ΟΓ καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα ΟΜ = ΓΔ, ἔνθα ΓΔ ⊥ ΑΒ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ Μ.

379. Ἀπὸ σημεῖον Α ἐκτὸς κύκλου φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν ΑΒΓ, καὶ ἀπὸ τὸ μέσον Ι τῆς χορδῆς ΒΓ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν χορδὴν καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα ΙΜ = ΙΑ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ Μ.

380. Δίδεται κύκλος καὶ σταθερὰ χορδὴ ΑΒ. Ἐὰν Γ εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου, κατασκευάζομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΓΑΒΔ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος: α) τοῦ κέντρου τοῦ παραλληλογράμμου, β) τῆς τετάρτης κορυφῆς Δ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ

Γεωμετρικαὶ κατασκευαί

Α΄.

381. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν γ, $\widehat{B}$ καὶ δ_α.

382. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α, R καὶ $\widehat{B}$.

383. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ καὶ ρ.

384. Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ἰσαπέχουσα ἀπὸ τρία δοθέντα σημεῖα Α, Β, Γ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας.

385. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α, $\widehat{B}$ καὶ υ_β.

386. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) καὶ σημεῖον Μ. Διὰ τοῦ Μ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς παραλλήλους, οὕτως ὥστε τὸ ἀποκοπτόμενον τμῆμα νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος λ.

387. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν $\widehat{A}$, δ_α, υ_α.

388. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν $\widehat{A} = 1^{\llcorner}$, $\widehat{B} = \omega$, καὶ $\alpha - \gamma = \lambda$.

389. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν $\widehat{A} = 1^{\llcorner}$, α καὶ $\beta + \gamma = \lambda$.

390. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν $\widehat{B}$, υ_α καὶ $\alpha + \beta = \lambda$.

391. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α, υ_β καὶ $\beta + \gamma = \lambda$.

392. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ, τέμνουσα τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως εἰς τὰ Δ καὶ Ε, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι ΑΔ = ΓΕ.

393. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α, $\widehat{A} = \omega$ καὶ υ_β.

394. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α, υ_β, υ_γ.

395. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α, υ_α, καὶ $\widehat{B} = \varphi$.

396. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α, μ_α καὶ υ_β.

397. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν $\widehat{B} = \varphi$, υ_α καὶ μ_γ.

Β.'

398. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α, $\widehat{B}$ καὶ $|\beta - \gamma| = \lambda$.

399. Περὶ δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ περιγραφῇ τὸ μέγιστον ἰσόπλευρον τρίγωνον.

400. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον διὰ τὸ ὁποῖον δίδεται ἡ εὐθεῖα (ε) ἐπὶ τῆς ὁποίας εὑρίσκεται ἡ πλευρὰ ΒΓ, ἡ διχοτόμος ΑΔ τῆς γωνίας $\widehat{A}$ κατὰ θέσιν καὶ μέγεθος καὶ τὸ μέσον Μ τῆς ΒΓ.

401. Ἀπὸ τὸ ἓν ἐκ τῶν κοινῶν σημείων Α δύο τεμνομένων κύκλων νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα αὐτοὺς εἰς τὰ Β καὶ Γ, οὕτως ὥστε τὸ τμῆμα ΒΓ νὰ ἔχῃ δεδομένον μῆκος α.

402. Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον, τοῦ ὁποίου δίδονται μία τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν, αἱ δύο διαγώνιοι καὶ ἡ γωνία τῶν διαγωνίων.

403. Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον, τοῦ ὁποίου δίδονται μία γωνία, αἱ δύο διαγώνιοι καὶ ἡ γωνία τῶν διαγωνίων.

Γεωμετρικοὶ τόποι

404. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ ὀρθοκέντρου τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν δοθεῖσαν βάσιν α καὶ δοθεῖσαν γωνίαν κορυφῆς $\widehat{A} = \omega$.

405. Μεταβλητοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἡ πλευρὰ ΑΒ διατηρεῖται σταθερὰ κατὰ θέσιν καὶ μέγεθος ἐνῷ αἱ πλευραὶ ΑΔ καὶ ΒΓ ὡς καὶ ἡ διαγώνιος ΑΓ διατηροῦνται σταθεραὶ μόνον κατὰ μέγεθος. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τῆς διαγωνίου ΒΔ, ὡς καὶ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τοῦ τμήματος, ποὺ ἔχει ἄκρα τὰ μέσα τῶν διαγωνίων.

406. Δίδεται κύκλος (O,R) καὶ χορδὴ ΑΒ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου ἑκάστης διαγωνίου τῶν τραπεζίων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν κύκλον, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς μεγαλυτέραν βάσιν τὴν δοθεῖσαν χορδὴν ΑΒ.

407. Δίδεται κύκλος καὶ χορδὴ ΑΒ. Μὲ κέντρον τυχὸν σημεῖον Γ τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ γράφομεν κύκλον ἐφαπτόμενον τῆς χορδῆς καὶ ἐκ τῶν Α καὶ Β φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας αὐτοῦ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Μ.

408. Ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1\llcorner$) ὀλισθαίνει εἰς τὸ ἐπίπεδόν του, εἰς τρόπον ὥστε αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ αὐτοῦ νὰ εὑρίσκωνται ἀντιστοίχως ἐπὶ δύο καθέτως τεμνομένων εὐθειῶν (ε_1) καὶ (ε_2). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῆς κορυφῆς Α.

409. Μεταβλητὸς κύκλος ἐφάπτεται δοθείσης εὐθείας (ε) εἰς σταθερὸν σημεῖον Α αὐτῆς. Εὐθεῖα (δ) γνωστῆς διευθύνσεως $\vec{\delta}$ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον Μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Μ.

410. Δίδεται κύκλος (Ο,R) καὶ σημεῖον Α αὐτοῦ. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν χορδὴν ΑΒ καὶ ἐκ τοῦ Ο φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἐκ τοῦ Β ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον Μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ Μ.

411. Δίδεται κύκλος (Ο,R) καὶ διάμετρος ΑΒ αὐτοῦ. Φέρομεν τὴν τυχοῦσαν χορδὴν ΒΓ καὶ εἰς τὴν προέκτασιν αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα ΓΔ = ΓΒ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Μ τῆς τομῆς τῶν ΑΓ καὶ ΟΔ.

412. Δίδεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Α καὶ τυχοῦσαν ἀκτῖνα (μικροτέραν τῆς ΑΒ) γράφομεν κύκλον καὶ ἐκ τῶν Β καὶ Γ φέρομεν τὰς μὴ συμμετρικὰς ἐφαπτομένας, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Μ. α) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Μ. β) Ἐπὶ τῆς ΜΒ λαμβάνομεν τὸ τμῆμα ΜΝ = ΜΓ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Ν.

413. Δίδεται ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1\llcorner$). Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ. Ἐκ τοῦ σημείου Μ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, ἡ ὁποία τέμνει τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τοῦ τμήματος ΔΕ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΜΕΤΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

253. Τὰ Γεωμετρικὰ μεγέθη. **Μέγεθος** ἐν γένει καλεῖται πᾶν ὅ,τι ἐπιδέχεται αὔξησιν ἢ ἐλάττωσιν. Γεωμετρικὰ μεγέθη καλοῦνται τὰ μεγέθη, τὰ ὁποῖα ἐξετάζονται ὑπὸ τῆς γεωμετρίας. Τοιαῦτα εἶναι τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, αἱ γωνίαι, τὰ κυκλικὰ τόξα, αἱ ἐπιφάνειαι κλειστῶν ἐπιπέδων σχημάτων, οἱ ὄγκοι τῶν στερεῶν κ.ἄ.

Τὰ γεωμετρικὰ μεγέθη τὰ χωρίζομεν εἰς κατηγορίας ἢ σύνολα ὁμοειδῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν ὅπως π.χ. τὸ σύνολον τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ἢ τὸ σύνολον τῶν τόξων ἴσων κύκλων κ.λ.π.

Εἰς τὰ προηγούμενα ὡρίσαμεν τὰς πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως εἰς τὰ σύνολα τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, τῶν γωνιῶν καὶ τῶν τόξων ἴσων κύκλων, ὡς ἐπίσης τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν διαίρεσιν μὲ φυσικὸν ἀριθμὸν καὶ τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ ρητόν. Ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ τὸ γινόμενον γεωμετρικοῦ μεγέθους ἐπὶ ἄρρητον ἀριθμὸν ὑπάρχει καὶ εἶναι ὁμοειδὲς μέγεθος πρὸς τὸ ἀρχικόν.

★ Πράγματι, ἐὰν α εἶναι εἷς ἄρρητος ἀριθμός, εἶναι γνωστὸν ὅτι ἔχει ἓν δεκαδικὸν ἀνάπτυγμα μὲ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα δὲν ἐμφανίζουν περιοδικότητα. Ἔστω λοιπὸν $\alpha = \Psi_0,\Psi_1\Psi_2\Psi_3\ldots\Psi_\nu\ldots$ τὸ δεκαδικὸν ἀνάπτυγμα τοῦ ἀριθμοῦ α, ὅπου Ψ_0 εἶναι αἱ ἀκέραιαι μονάδες αὐτοῦ καὶ $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\ldots$ τὰ ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ ἀναπτύγματός του. Κατασκευάζομεν τὴν ἀκολουθίαν ρητῶν ἀριθμῶν :

(1) $\alpha_0 = \Psi_0, \quad \alpha_1 = \Psi_0,\Psi_1, \quad \alpha_2 = \Psi_0,\Psi_1\Psi_2,\ldots, \quad \alpha_\nu = \Psi_0, \Psi_1\Psi_2\ldots\Psi_\nu,\ldots$

Ἡ ἀκολουθία (1) τῶν ρητῶν ἀριθμῶν συγκλίνει εἰς τὸν ἄρρητον ἀριθμὸν α, ἤτοι εἶναι:

(2) $\lim\limits_{\nu \to +\infty} \alpha_\nu = \alpha$ (lim σημαίνει ὅριον)

Ἔστω τώρα ὅτι Α εἶναι ἓν γεωμετρικὸν μέγεθος (π.χ. εὐθύγραμμον τμῆμα). Ἐκ τῆς ἀκολουθίας (1) κατασκευάζομεν τὴν ἀκολουθίαν

(3) $A\cdot\alpha_0, \quad A\cdot\alpha_1, \quad A\cdot\alpha_2,\ldots, \quad A\cdot\alpha_\nu,\ldots$

ἡ ὁποία ἔχει ἔννοιαν ἀκολουθίας ὁμοειδῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν πρὸς τὸ Α, καθ' ὅσον οἱ συντελεσταὶ $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_\nu,\ldots$ εἶναι ρητοί.

Ἡ ἀκολουθία γεωμετρικῶν μεγεθῶν (3), λόγῳ τῆς σχέσεως (2), ἀποδεικνύεται ὅτι συγκλίνει εἰς ὁμοειδὲς μέγεθος πρὸς τὸ Α, συμβολιζόμενον μὲ $A.\alpha$ καὶ καλεῖται γινόμενον τοῦ γεωμετρικοῦ μεγέθους Α ἐπὶ τὸν ἄρρητον ἀριθμὸν α.

Παράδειγμα. Ἔστω Α ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα καὶ $\alpha = \sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$ εἷς ἄρρητος ἀριθμός. Κατασκευάζομεν τὴν ἀκολουθίαν:

$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 1{,}4, \quad \alpha_2 = 1{,}41, \quad \alpha_3 = 1{,}414, \quad \alpha_4 = 1{,}4142, \quad \alpha_5 = 1{,}41421\ldots$

ἡ ὁποία συγκλίνει εἰς τόν ἀριθμὸν $\sqrt{2}$ καὶ ἐξ αὐτῆς τὴν ἀκολουθίαν εὐθυγράμμων τμημάτων.

$A\cdot 1, \quad A\cdot 1{,}4, \quad A\cdot 1{,}41, \quad A\cdot 1{,}414, \quad A\cdot 1{,}4142, \quad A\cdot 1{,}41421, \ldots$

ἡ ὁποία συγκλίνει εἰς εὐθύγραμμον τμῆμα τὸ ὁποῖον γράφεται $A\cdot\sqrt{2}$.

254. Λόγος ὁμοειδῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν. Ἔστωσαν A καὶ B δύο ὁμοειδῆ γεωμετρικὰ μεγέθη, ὅπου τὸ A δὲν εἶναι μηδενικόν. Ἀποδεικνύεται ὅτι (βλέπε κατωτέρω ἀπόδειξιν διὰ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα) πάντοτε ὑπάρχει μὴ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ρ, τοιοῦτος ὥστε νὰ εἶναι $A\rho = B$. Ὁ ἀριθμὸς ρ καλεῖται **λόγος** τοῦ μεγέθους B πρὸς τὸ ὁμοειδὲς μέγεθος A, γράφομεν δέ:

$$\rho = \frac{B}{A}$$

Εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ λόγος δύο γεωμετρικῶν μεγεθῶν εἶναι ὁ ἀριθμός, ἐπὶ τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν, διὰ νὰ λάβωμεν τὸ ἄλλο.

★ **255. Ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἐὰν A καὶ B εἶναι δύο μὴ μηδενικὰ εὐθύγραμμα τμήματα τοιαῦτα ὥστε $A < B$, ὑπάρχει φυσικὸς ἀριθμός, ν τοιοῦτος ὥστε $\nu\cdot A > B$.**

Τὸ ἀνωτέρω ἀξίωμα διατυποῦται καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἡ ἀκολουθία τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων $A, 2A, 3A, \ldots, \nu A \ldots$ εἶναι αὔξουσα καὶ μὴ φραγμένη.

Θεώρημα. Ἐὰν A καὶ B εἶναι δύο εὐθύγραμμα τμήματα ὅπου τὸ A δὲν εἶναι μηδενικόν, ὑπάρχει πάντοτε πραγματικὸς καὶ μὴ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ρ, τοιοῦτος ὥστε νὰ εἶναι $A\cdot\rho = B$.

Ἀπόδειξις. i) Ἔστω ὅτι τὸ τμῆμα B εἶναι μηδενικόν, ἤτοι $B = 0$. Τότε θὰ εἶναι $A.0 = 0$, ἄρα τὸ θεώρημα ἰσχύει διὰ $\rho = 0$.

ii) Ἐὰν $A = B$ τότε θὰ εἶναι $A.1 = B$, ἤτοι τὸ θεώρημα ἰσχύει διὰ $\rho = 1$.

iii) Ἔστω $A < B$. Κατασκευάζομεν τὴν ἀκολουθίαν τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων

(1) $\qquad A, 2A, 3A, \ldots, \nu A, \ldots$

ἡ ὁποία, κατὰ τὸ προηγούμενον ἀξίωμα, εἶναι αὔξουσα καὶ μὴ φραγμένη. Ἄρα ὑπάρχει φυσικὸς ἀριθμὸς k τοιοῦτος ὥστε νὰ εἶναι:

$$k\cdot A \leqq B < (k+1)A$$

α) Ἐὰν εἰς τὴν προηγουμένην σχέσιν ἰσχύῃ τὸ =, τότε αὐτὴ γράφεται $k.A = B$, ἤτοι τὸ θεώρημα ἰσχύει διὰ $\rho = k$.

β) Ἐὰν εἶναι $k\cdot A < B < (k+1)A$, δηλαδὴ ἐὰν τὸ B περιέχεται ἐντὸς τοῦ ἀνοικτοῦ διαστήματος $(k\cdot A,\ (k+1)A)$, τὸ ὁποῖον ἔχει πλάτος A, τότε διχοτομοῦμεν τὸ διάστημα τοῦτο καὶ λαμβάνομεν τὰ δύο διαστήματα:

(2) $\qquad \left(k\cdot A,\ k\cdot A + \frac{A}{2}\right), \qquad \left(k\cdot A + \frac{A}{2},\ (k+1)A\right)$

ἕκαστον ἐκ τῶν ὁποίων ἔχει πλάτος $\frac{A}{2}$. Δύο εἶναι τὰ πιθανὰ ἐνδεχόμενα, ἤτοι:

α_1) Τὸ τμῆμα B συμπίπτει μὲ τὸ $k\cdot A + \frac{A}{2}$, δηλαδὴ $B = k\cdot A + \frac{A}{2}$ ἢ $B = \frac{2k+1}{2}\cdot A$, ὁπότε τὸ θεώρημα ἰσχύει διὰ $\rho = \frac{2k+1}{2}$.

β_1) Τὸ τμῆμα B περιέχεται εἰς ἓν ἐκ τῶν δύο διαστημάτων (2), ἔστω εἰς τὸ πρῶτον. Τότε διχοτομοῦμεν ἐκ νέου τοῦτο καὶ λαμβάνομεν δύο διαστήματα.

$$(3)\quad \left(k\cdot A,\ k\cdot A+\frac{A}{4}\right),\qquad \left(k\cdot A+\frac{A}{4},\ k\cdot A+\frac{A}{2}\right)$$

ἕκαστον ἐκ τῶν ὁποίων ἔχει πλάτος $\frac{A}{4}=\frac{A}{2^2}$.

Ὡς καὶ προηγουμένως, δύο εἶναι τὰ πιθανὰ ἐνδεχόμενα, ἤτοι:

α_2) Τὸ τμῆμα B συμπίπτει μὲ τὸ τμῆμα $k\cdot A+\frac{A}{4}$, δηλαδὴ $B=k\cdot A+\frac{A}{4}$ ἢ $B=\frac{4k+1}{4}\cdot A$, ὁπότε τὸ θεώρημα ἰσχύει διὰ $\rho=\frac{4k+1}{4}$.

β_2) Τὸ τμῆμα B περιέχεται εἰς ἓν ἐκ τῶν διαστημάτων (3). Διχοτομοῦμεν ἐκ νέου τὸ διάστημα εἰς τὸ ὁποῖον περιέχεται τὸ τμῆμα B. Λαμβάνομεν οὕτω δύο διαστήματα πλάτους $\frac{A}{2^3}$ κ.ο.κ.

Ἡ αὐτὴ σκέψις ἐπαναλαμβανομένη ν φοράς, θὰ περιορίσῃ τὸ τμῆμα B μεταξὺ δύο διαστημάτων μὲ διαφορὰν πλάτους $A/2^\nu$, ἐὰν ἐν τῷ μεταξὺ τὸ B δὲν ἔχῃ συμπέσει μὲ ἓν ἐκ τῶν διχοτομούντων σημείων τὰ προηγούμνενα διαστήματα. Μεταβαίνοντες εἰς τὸ ὅριον, ὅταν τὸ ν τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον, διαπιστώνομεν ὅτι τὸ τμῆμα B περιορίζεται εἰς δύο διαστήματα (τμήματα) μὲ διαφορὰν μηδενικοῦ πλάτους. Ἄρα τὸ B, συμπίπτει μὲ τὰ συμπίπτοντα ἄκρα τοῦ μηδενικοῦ αὐτοῦ διαστήματος, τὰ ὁποῖα ὁπωσδήποτε ἐκφράζονται ἀπὸ τὸ στοιχεῖον A, πολλαπλασιασμένον ἐπὶ κάποιον ἀριθμητικὸν συντελεστήν. Αὐτὸς ἀκριβῶς ὁ συντελεστὴς εἶναι ὁ ἀριθμὸς ρ.

256. Μέτρον τῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν. Ἔστωσαν A καὶ M δύο ὁμοειδῆ γεωμετρικὰ μεγέθη. Καλοῦμεν μέτρον τοῦ μεγέθους A μὲ μονάδα μετρήσεως τὸ μέγεθος M, τὸν λόγον.

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{M}}=\rho$$

τοῦ μεγέθους A πρὸς τὸ ὁμοειδὲς μέγεθος M. Ἄρα τὸ μέτρον ρ ἑνὸς γεωμετρικοῦ μεγέθους εἶναι πραγματικὸς καὶ μὴ ἀρνητικὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὴν σχέσιν τοῦ μεγέθους A ὡς πρὸς τὴν μονάδα μετρήσεως M. Πράγματι, ἐκ τῆς σχέσεως (1) λαμβάνομεν

$$A=\rho\cdot M$$

ἐκ τῆς ὁποίας φαίνεται ὅτι διὰ τῆς ἐπαναλήψεως ρ φορὰς τῆς μονάδος μετρήσεως M, λαμβάνομεν τὸ A.

Ἡ ἐκλογὴ τῆς μονάδος μετρήσεως εἶναι αὐθαίρετος.

257. Μονάδες μετρήσεως τῶν μέχρι τοῦδε ἐξετασθέντων γεωμετρικῶν μεγεθῶν. Αἱ μονάδες μετρήσεως τῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν, ὡς ἀνεφέρθη, ἔχουν ληφθῆ αὐθαιρέτως, πάντως εἶναι καθωρισμέναι καὶ διεθνῶς παραδεκταί.

Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν μηκῶν χρησιμοποιεῖται τὸ μέτρον (σύμβολον 1 m). Τοῦτο ὁρίζεται ὡς ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο χαραγῶν ἐφ' ἑνὸς κανόνος ἐξ ἰριδιούχου λευκοχρύσου, φυλασσομένου εἰς τὸ διεθνὲς γραφεῖον μέτρων καὶ σταθμῶν εἰς Sèvres τῆς Γαλλίας. Ἡ μονὰς αὐτὴ τοῦ μήκους λέγεται ὅτι εἶναι τὸ

1 /40 000 000 τοῦ μήκους τοῦ ἰσημερινοῦ τῆς Γῆς. Εἰς τὴν κατὰ τὸ 1960 11ην διεθνῆ συνδιάσκεψιν διὰ τὸ μέτρον, ἀπεφασίσθη ὅπως αὐτὸ ἀναχθῇ εἰς ἓν ὡρισμένον μῆκος κύματος τοῦ φωτός. Οὕτω τὸ μέτρον ἀντιστοιχεῖ εἰς 1.650.763,73 μήκη κύματος, ἐν κενῷ, τῆς πορτοκαλοχρόου γραμμῆς τοῦ ἰσοτόπου 86 τοῦ στοιχείου κρυπτοῦ.

Ἐκτὸς τοῦ μέτρου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ βασικὴ μονὰς μετρήσεως τῶν μηκῶν, χρησιμοποιοῦνται τὰ πολλαπλάσια καὶ ὑποπολλαπλάσια αὐτοῦ, κυριώτερα τῶν ὁποίων εἶναι τὸ 1 ἑκατοστόμετρον $1 \text{ cm} = \frac{1}{100} \text{ m}$ καὶ τὸ ἓν χιλιόμετρον $1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$.

Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν γωνιῶν χρησιμοποιοῦνται αἱ ἑξῆς μονάδες :

i) Ἡ μοῖρα (σύμβολον 1^0). Αὕτη εἶναι τὸ 1/ 360 τῆς πλήρους γωνίας (1 πλήρης γωνία = 4 ὀρθαί). Ἡ μοῖρα ὑποδιαιρεῖται εἰς 60 πρῶτα λεπτὰ (60′) καὶ ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν εἰς 60 δεύτερα (60″).

ii) Ὁ βαθμὸς (σύμβολον 1^g). Οὗτος εἶναι τὸ 1/400 τῆς πλήρους γωνίας καὶ ὑποδιαιρεῖται κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα.

iii) Τὸ ἀκτίνιον (σύμβολον 1 rad). Τοῦτο εἶναι γωνία, ἡ ὁποία καθισταμένη ἐπίκεντρος δέχεται τόξον, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος l εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μῆκος R τῆς ἀκτῖνος διὰ τῆς ὁποίας ἐγράφη (σχ. 258).

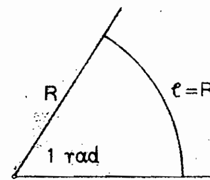
Μία πλήρης γωνία, θὰ ἀποδειχθῇ εἰς ἄλλο κεφάλαιο, ὅτι ἔχει 2π ἀκτίνια, ὅπου $\pi = 3{,}14159...$ ἀριθμὸς ἀσύμμετρος. Τὸ ἀκτίνιον ὑποδιαιρεῖται κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα. Ἓν ἀκτίνιον εἶναι ἴσον μὲ $57^0 17' 44'',8$ περίπου.

Ἀντιστοίχως πρὸς τὰς μονάδας μετρήσεως τῶν γωνιῶν, ὁρίζονται καὶ αἱ μονάδες μετρήσεως τῶν τόξων ἴσων κύκλων, ἤτοι :

i) Ἡ μοῖρα, ἴση πρὸς τὸ 1 /360 τοῦ κύκλου.

ii) Ὁ βαθμός, ἴσος πρὸς τὸ 1 /400 τοῦ κύκλου καὶ

iii) Τὸ ἀκτίνιον, ἴσον πρὸς τὸ $1/2\pi$ τοῦ κύκλου.



Σχ. 258

258. Σύμμετρα γεωμετρικὰ μεγέθη καλοῦνται δύο ὁμοειδῆ γεωμετρικὰ μεγέθη Α καὶ Β, ἐὰν εἶναι πολλαπλάσια ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ὁμοειδοῦς πρὸς αὐτὰ μεγέθους Γ. Δηλαδὴ ἐὰν εἶναι :

$$A = k \cdot \Gamma \quad \text{καὶ} \quad B = \lambda \cdot \Gamma$$

ὅπου k καὶ λ εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Τότε λέγομεν ὅτι τὰ μεγέθη Α καὶ Β ἔχουν **κοινὸν μέτρον,** καὶ ἐννοοῦμεν ὅτι ὑπάρχει ὁμοειδὲς πρὸς αὐτὰ μέγεθος Γ τὸ ὁποῖον, ὡς μονὰς μετρήσεως διὰ τὰ Α καὶ Β, παρέχει διὰ τὰ μέτρα αὐτῶν ἀκεραίους ἀριθμοὺς k καὶ λ.

259. Θεώρημα. Ὁ λόγος δύο ὁμοειδῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν μέτρων των, ὅταν μετρηθοῦν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα μετρήσεως.

Ἀπόδειξις. Ἂς θεωρήσωμεν δύο ὁμοειδῆ γεωμετρικὰ μεγέθη A καὶ B καὶ ἔστωσαν α καὶ β τὰ μέτρα των ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν μονάδα μετρήσεως M. Τότε θὰ εἶναι $A = \alpha \cdot M$, $B = \beta \cdot M \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{\alpha \cdot M}{\beta \cdot M} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{M}{M} = \frac{\alpha}{\beta}$, διότι $\frac{M}{M} = 1 \Longleftrightarrow M = 1 \cdot M$. Ἄρα εἶναι $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$.

260. Ἀναλογίαι καὶ ἰδιότητες αὐτῶν. Ἔστωσαν

$$\Omega_1 = \{A, B, \Gamma, \ldots, X, \ldots\} \text{ καὶ } \Omega_2 = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \chi, \ldots\}$$

δύο σύνολα, ἕκαστον μὲ στοιχεῖα ὁμοειδῆ γεωμετρικὰ μεγέθη, χωρὶς κατ' ἀνάγκην τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Ω_1, νὰ εἶναι ὁμοειδῆ πρὸς τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Ω_2. Ἂς θεωρήσωμεν ὅτι μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν δύο συνόλων ὑπάρχει μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία, ἤτοι :

$$\begin{array}{cccc} A, & B, & \Gamma, \ldots & X\ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \alpha, & \beta, & \gamma, \ldots & \chi\ldots \end{array}$$

(π.χ. ἐπίκεντροι γωνίαι καὶ ἀντίστοιχα αὐτῶν τόξα τοῦ αὐτοῦ κύκλου). Ἡ ἀντιστοιχία αὕτη θὰ καλῆται **ἀναλογία** τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν ὁ λόγος $\frac{A}{B}$ δύο τυχόντων στοιχείων τοῦ ἑνὸς συνόλου $\mathbf{\Omega_1}$ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον $\frac{\alpha}{\beta}$ τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τοῦ ἄλλου συνόλου $\mathbf{\Omega_2}$, ἤτοι ὅταν εἶναι :

$$(1) \qquad \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}$$

Εἰς τὴν προηγουμένην σχέσιν, τὰ γεωμετρικὰ στοιχεῖα A, B, α καὶ β καλοῦνται **ὅροι** τῆς ἀναλογίας. Τὰ A καὶ β καλοῦνται **ἄκροι ὅροι** καὶ τὰ B καὶ α **μέσοι ὅροι.**

Ἡ σχέσις (1) εἶναι οὐσιαστικῶς ἰσότης ἀριθμητικῶν κλασμάτων (§ 259) καὶ κατὰ συνέπειαν, ἐὰν ἀντὶ τῶν μεγεθῶν χρησιμοποιήσωμεν τὰ μέτρα των, ἰσχύουν αἱ γνωσταὶ ἐκ τῆς Ἀλγέβρας ἰδιότητες τῶν ἴσων κλασμάτων. Ἀπὸ αὐτὰς ὑπενθυμίζομεν τὰς ἑξῆς σπουδαιοτέρας :

i) Ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Longleftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$

ii) Ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Longleftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$

iii) Ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Longleftrightarrow \frac{\alpha \pm \beta}{\beta} = \frac{\gamma \pm \delta}{\delta}$

iv) Ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \ldots = \frac{\varkappa}{\lambda} = \frac{\alpha + \gamma + \ldots + \varkappa}{\beta + \delta + \ldots + \lambda}$

Παρατήρησις. Ἐὰν εἰς τὰς ἄνω ἀναλογίας θεωρῶμεν ἀντὶ τῶν μέτρων των τὰ γεωμετρικὰ μεγέθη, ἀπαιτεῖται προσοχὴ εἰς τὰς ἰδιότητας. Ὅπου ἐμφανίζονται ἀθροίσματα (ἀντιστοίχως διαφοραί), πρέπει νὰ εἶναι γεωμετρικὰ στοιχεῖα τοῦ αὐτοῦ συνόλου (ὁμοειδῆ), διὰ νὰ ἔχουν νόημα αἱ πράξεις.

★ 261. Ἰδιότητες τῶν ἀναλόγων γεωμετρικῶν μεγεθῶν.

Ἔστωσαν $\Omega_1 \equiv \{A, B, \ldots, X, \ldots\}$ καὶ $\Omega_2 \equiv \{\alpha, \beta, \ldots \chi, \ldots\}$ δύο σύνολα γεωμετρικῶν μεγεθῶν, διὰ τὰ ὁποῖα μεταξὺ τῶν στοιχείων των ὑφίσταται μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία κατὰ τὴν ἔννοιαν $A \longleftrightarrow \alpha$, $B \longleftrightarrow \beta, \ldots$, $X \longleftrightarrow \chi, \ldots$
Ἐὰν ἡ ἀντιστοιχία αὕτη εἶναι ἀναλογία, ἰσχύουν αἱ τρεῖς ἰδιότητες:

i) Ἡ ἰσότης δύο στοιχείων τοῦ συνόλου Ω_1 συνεπάγεται τὴν ἰσότητα τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τοῦ συνόλου Ω_2 ἤτοι:

$$\text{ἐὰν} \quad A = B \iff \alpha = \beta.$$

ii) Τὸ ἄθροισμα δύο στοιχείων τοῦ συνόλου Ω_1 ἔχει ὡς ἀντίστοιχον τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τοῦ συνόλου Ω_2, ἤτοι:
Ἐὰν $A + B = \Gamma \iff \alpha + \beta = \gamma$, ὅπου $\Gamma \longleftrightarrow \gamma$.

iii) Ἐὰν δύο στοιχεῖα τοῦ συνόλου Ω_1 εἶναι ἄνισα, τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν τοῦ συνόλου Ω_2 εἶναι ὁμοιοστρόφως ἄνισα ἤτοι:

$$\text{ἐὰν } A > \beta \iff \alpha > \beta.$$

Καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν ἰσχύουν αἱ τρεῖς ἀνωτέρω ἰδιότητες ἡ ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχεία μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν συνόλων Ω_1 καὶ Ω_2 εἶναι ἀναλογία.

Ἀπόδειξις. Ὡς ὑπόθεσιν ἔχομεν ὅτι τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Ω_1, εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Ω_2 ἤτοι:

$$(1) \qquad \frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$$

i) Ἐὰν $A = B$, τότε $\frac{A}{B} = 1$ καὶ ἐκ τῆς (1) ἕπεται $\frac{\alpha}{\beta} = 1$ ἢ $\alpha = \beta$.

ii) Ἐκ τῆς (1), ἐφαρμόζοντες γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν λαμβάνομεν $\frac{A+B}{B} = \frac{\alpha+\beta}{\beta}$ καὶ ἐπειδὴ $B \longleftrightarrow \beta$ ἕπεται ὅτι $A + B \longleftrightarrow \alpha + \beta$ ἢ $\Gamma \longleftrightarrow \gamma$ ὅπου ἐθέσαμεν $\Gamma = A + B$ καὶ $\gamma = \alpha + \beta$.

iii) Ἐὰν $A > B$ τότε θὰ εἶναι $\frac{A}{B} > 1$ καὶ ἐκ τῆς (1) ἕπεται ὅτι

$$\frac{\alpha}{\beta} > 1 \qquad \text{ἄρα} \qquad \alpha > \beta.$$

Ἀντιστρόφως. Ἔστωσαν A καὶ B δύο τυχόντα στοιχεῖα τοῦ συνόλου Ω_1. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ταῦτα εἶναι σύμμετρα, ἤτι ὑπάρχει στοιχεῖον $\Gamma \in \Omega_1$ τοιοῦτον ὥστε τὰ A καὶ B νὰ εἶναι πολλαπλάσια αὐτοῦ, δηλαδή:

$$(2) \qquad A = k \cdot \Gamma, \quad B = \lambda \cdot \Gamma$$

Τότε θὰ εἶναι:

$$(3) \qquad \frac{A}{B} = \frac{k}{\lambda}$$

Αἱ σχέσεις (2) γράφονται ἀντιστοίχως:

$$A = \underbrace{\Gamma + \Gamma + \ldots + \Gamma}_{k \text{ προσθετέοι}}, \qquad B = \underbrace{\Gamma + \Gamma + \ldots + \Gamma}_{\lambda \text{ προσθετέοι}}.$$

Κατὰ τὴν ἰδιότητα ii) θὰ ἔχωμεν τότε:

$$\alpha = \underbrace{\gamma + \gamma + \ldots + \gamma}_{k \text{ προσθετέοι}}, \qquad \beta = \underbrace{\gamma + \gamma + \ldots + \gamma}_{\lambda \text{ προσθετέοι}}$$

ἢ $\alpha = k \cdot \gamma, \quad \beta = \lambda \cdot \gamma$

ἐκ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν:

(4) $$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{k}{\lambda}$$

Ἐκ τῶν (3) καὶ (4) ἕπεται ὅτι:

$$\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Ἐὰν τὰ στοιχεῖα Α καὶ Β δὲν ἔχουν κοινὸν μέτρον, τότε ὁ λόγος $\frac{A}{B}$ εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμὸς καὶ ἡ κατὰ προσέγγισιν τιμὴ αὐτοῦ οἱασδήποτε τάξεως, ὡς ρητὸς ἀριθμός, θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν κατὰ προσέγγισιν τιμὴν τῆς αὐτῆς τάξεως τοῦ λόγου $\frac{\alpha}{\beta}$. Μεταβαίνοντες εἰς τὸ ὅριον, ὅταν ἡ προσέγγισις γίνῃ ἀπείρου τάξεως, λαμβάνομεν:

$$\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Ἄρα τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Ω_1 εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Ω_2, ἐφ' ὅσον ἰσχύουν αἱ τρεῖς ἀνωτέρω ἰδιότητες.

262. Μέση ἀνάλογος δύο ὁμοειδῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν Α καὶ Β καλεῖται ἓν ὁμοειδὲς πρὸς αὐτὰ γεωμετρικὸν μέγεθος Μ, διὰ τὸ ὁποῖον ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$\frac{A}{M} = \frac{M}{B} \iff M^2 = AB.$$

Τότε ἡ ἀνωτέρω ἀναλογία λέγεται **συνεχής.**

263. Τετάρτη ἀνάλογος τριῶν ὁμοειδῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν Α,Β, καὶ Γ, καλεῖται ἓν ὁμοειδὲς πρὸς αὐτὰ γεωμετρικὸν μέγεθος Τ, διὰ τὸ ὁποῖον ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{T}$$

(τὸ Τ κατέχει τὴν τετάρτην θέσιν εἰς τὴν ἀναλογίαν).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

414. Ἐὰν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, νὰ δειχθῇ ὅτι: $\frac{3\alpha + 2\beta}{\beta} = \frac{3\gamma + 2\delta}{\delta}$. Ὁμοίως ὅτι: $\frac{k\alpha + \lambda\beta}{\beta} = \frac{k\gamma + \lambda\delta}{\delta}$ ὅπου k, λ ἀριθμητικοὶ συντελεσταί.

415. Ἐὰν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, νὰ δειχθῇ ὅτι: $\frac{3\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{3\gamma - \delta}{\gamma + \delta}$. Ὁμοίως ὅτι: $\frac{k\alpha + \lambda\beta}{\mu\alpha + \nu\beta} = \frac{k\gamma + \lambda\delta}{\mu\gamma + \nu\delta}$ ὅπου k, λ, μ, ν, ἀριθμητικοὶ συντελεσταί.

416. Ἐὰν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\alpha\beta + \gamma\delta} = \frac{\alpha}{\beta}$.

417. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 4, δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα α + β + γ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 7.

418. Ἐὰν εἶναι $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$, δείξατε ὅτι : $\frac{5\alpha_1 - 7\beta_1 + 3\gamma_1}{5\alpha_2 - 7\beta_2 + 3\gamma_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$.

419. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν εἶναι $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \ldots = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ τότε $\frac{k\alpha_1 + \lambda\beta_1 + \ldots + \nu\rho_1}{k\alpha_2 + \lambda\beta_2 + \ldots + \nu\rho_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ ὅπου k, λ, . . ., ν ἀριθμητικοὶ συντελεσταί.

420. Ἐὰν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta}$, δείξατε ὅτι : $\frac{\alpha}{\delta} = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^3$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΘΑΛΟΥ (*)

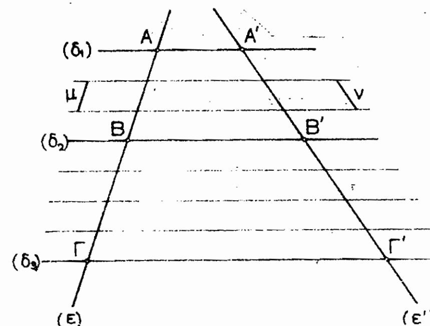
264. Θεώρημα : Ἐὰν δύο εὐθεῖαι (ε) καὶ (ε′) τέμνωνται ὑπὸ τριῶν τοὐλάχιστον παραλλήλων εὐθειῶν, τὰ ἀποκτόμενα τμήματα ἐπὶ τῶν (ε) καὶ (ε′) ἀντιστοίχως ὑπὸ τῶν παραλλήλων τούτων, εἶναι ἀνάλογα.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν (ε) καὶ (ε′) δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου καὶ (δ_1), (δ_2) καὶ (δ_3) τρεῖς παράλληλοι μεταξύ των εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς (ε) καὶ (ε′) ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Α′, Β καὶ Β′, Γ καὶ Γ′ (σχ. 259). Θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι :

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$$

i) Ἔστω ὅτι τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΒΓ ἐπὶ τῆς (ε) ἐπιδέχονται ὡς κοινὸν μέτρον ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα μ, ἤτοι ἀμφότερα εἶναι πολλαπλάσια αὐτοῦ. Τότε θὰ εἶναι :

(1) ΑΒ = kμ καὶ ΒΓ = λμ ὅπου k καὶ λ ἀκέραιοι ἀριθμοί. Διαιροῦμεν τὸ τμῆμα ΑΒ εἰς k τμήματα ἴσα πρὸς τὸ μ καὶ τὸ ΒΓ εἰς λ τμήματα ἴσα πρὸς τὸ μ. Ἀπὸ τὰ διαιρετικὰ σημεῖα φέρομεν εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὰς δοθείσας. Αὗται τέμνουν τὴν εὐθεῖαν (ε′) καὶ ὁρίζουν ἐπ᾽ αὐτῆς k + λ τὸ πλῆθος ἴσα τμήματα καὶ ἔστω ν τὸ μῆκος ἑκάστου. Τότε θὰ εἶναι :



Σχ. 259

* **Θαλῆς** (ἐκ Φοινίκης ΣΤ′ π.Χ. αἰών). Μετέβη εἰς Αἴγυπτον καὶ ἐμέτρησε τὸ ὕψος τῶν πυραμίδων ἐκ τῆς σκιᾶς των. Φέρει τὴν γεωμετρίαν εἰς τὴν Ἑλλάδα, ἱδρύει εἰς Μίλητον τὴν Ἰωνικὴν Σχολὴν καὶ πλουτίζει τὴν ἐπιστήμην μὲ πολλὰ θεωρήματα τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας καὶ τῶν ὁμοίων τριγώνων μέσῳ τοῦ σπουδαιοτέρου θεωρήματος τοῦ τρίτου βιβλίου τῆς γεωμετρίας περὶ παραλλήλων εὐθειῶν καὶ ἀναλόγων τμημάτων.

(2) $A'B' = k\nu$ καὶ $B'\Gamma' = \lambda\nu$.

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{k\mu}{\lambda\mu} = \frac{k}{\lambda} \text{ καὶ } \frac{A'B'}{B'\Gamma'} = \frac{k\nu}{\lambda\nu} = \frac{k}{\lambda}$$

καὶ ἐξ αὐτῶν :

$$(3) \qquad \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$$

ii) Ἐὰν τὰ τμήματα AB καὶ ΒΓ δὲν ἔχουν κοινὸν μέτρον, τότε ὁ λόγος $\frac{AB}{B\Gamma}$ εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμὸς καὶ ἡ κατὰ προσέγγισιν τιμὴ αὐτοῦ οἱασδήποτε τάξεως, ποὺ θὰ εἶναι ρητὸς ἀριθμός, θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν κατὰ προσέγγισιν τιμὴν τοῦ λόγου $\frac{A'B'}{B'\Gamma'}$ τῆς αὐτῆς τάξεως. Λαμβάνοντες τὰ ὅρια τῶν ἴσων λόγων, ὅταν ἡ προσέγγισις γίνῃ ἀπείρου τάξεως, ὁπότε θὰ ἔχωμεν τὴν ἀκριβῆ τιμὴν τῶν λόγων τούτων εὑρίσκομεν:

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$$

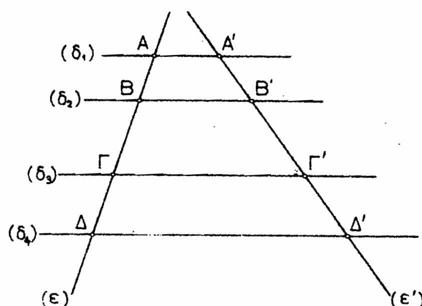
iii) Ἔστω ὅτι αἱ εὐθεῖαι (ε) καὶ (ε′) τέμνονται ὑπὸ τεσσάρων παραλλήλων εὐθειῶν (δ_1), (δ_2), (δ_3) καὶ (δ_4), εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Α′, Β καὶ Β′, Γ καὶ Γ′, Δ καὶ Δ′ ἀντιστοίχως (σχ. 260). Τότε θὰ εἶναι :

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'} \text{ καὶ } \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{B'\Gamma'}{\Gamma'\Delta'}.$$

Πολλαπλασιάζομεν αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν :

$$\frac{AB}{B\Gamma} \cdot \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'} \cdot \frac{B'\Gamma'}{\Gamma'\Delta'} \text{ Ἄρα}$$

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{A'B'}{\Gamma'\Delta'}$$



Σχ. 260

Παρατήρησις : Ἀπὸ τὴν ἀναλογίαν (3) λαμβάνομεν

$$\frac{AB + B\Gamma}{B\Gamma} = \frac{A'B' + B'\Gamma'}{B'\Gamma'} \quad \text{ἢ} \quad \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{A'\Gamma'}{B'\Gamma'}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν $\frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{A'\Gamma'}{\Gamma'\Delta'}$, $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{A'\Delta'}{A'B'}$ καὶ γενικῶς, οἱαδήποτε τμήματα ὁριζόμενα διὰ τῶν παραλλήλων ἐπὶ τῆς μιᾶς εὐθείας εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ἀντίστοιχα τμήματα αὐτῶν ἐπὶ τῆς ἄλλης.

265. Θεώρημα (ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου). **Ἔστωσαν (δ_1) καὶ (δ_2) δύο παράλληλοι εὐθεῖαι καὶ (ε), (ε′) δύο εὐθεῖαι τέμνουσαι τὰς παραλλή-**

λους εἰς τὰ Α καὶ Α', Β καὶ Β' ἀντιστοίχως. Ἐὰν Γ καὶ Γ' εἶναι σημεῖα τῶν τμημάτων ΑΒ καὶ Α'Β' ἀντιστοίχως τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι

$$\frac{ΑΓ}{ΓΒ} = \frac{Α'Γ'}{Γ'Β'}$$

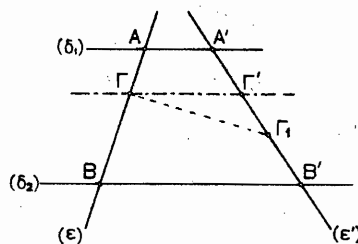
τότε ἡ εὐθεῖα ΓΓ' εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς (δ_1) καὶ (δ_2).

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἡ ΓΓ' δὲν εἶναι παράλληλος τῶν (δ_1) καὶ (δ_2), ἐκ τοῦ Γ φέρομεν παράλληλον πρὸς αὐτάς, ἡ ὁποία τέμνει τὸ τμῆμα Α'Β' ἔστω εἰς τὸ $Γ_1$ (σχ. 261). Τὸ $Γ_1$ εἶναι σημεῖον τοῦ τμήματος Α'Β', διότι ἐὰν ἦτο ἐκτὸς τοῦ Α'Β', ἔστω πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β', ἡ $ΓΓ_1$ θὰ ἔτεμνε τὴν ΒΒ'. Ἀλλὰ αὐτὸ δὲν δύναται νὰ συμβαίνῃ διότι ἡ $ΓΓ_1$ ἐθεωρήθη παράλληλος τῆς ΒΒ'.

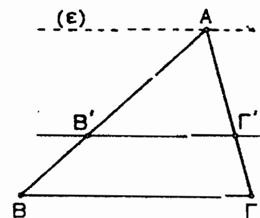
Τότε θὰ εἶναι $\frac{ΑΓ}{ΓΒ} = \frac{Α'Γ_1}{Γ_1Β'}$. Ἐξ αὐτῆς καὶ τῆς δοθείσης, λαμβάνομεν:

$$\frac{Α'Γ'}{Γ'Β'} = \frac{Α'Γ_1}{Γ_1Β'} \quad ἢ \quad \frac{Α'Γ' + Γ'Β'}{Γ'Β'} = \frac{Α'Γ_1 + Γ_1Β'}{Γ_1Β'} \quad ἢ \quad \frac{Α'Β'}{Γ'Β'} = \frac{Α'Β'}{Γ_1Β'}$$

Ἄρα $Γ'Β' = Γ_1Β'$ ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται $Γ' \equiv Γ_1$, ὅπερ ἄτοπον, διότι τὰ Γ' καὶ $Γ_1$ ὑπετέθησαν διάφορα ἀλλήλων. Ἑπομένως πρέπει νὰ εἶναι ἡ ΓΓ' παράλληλος πρὸς τὰς (δ_1) καὶ (δ_2).



Σχ. 261



Σχ. 262

Πόρισμα. Ἐὰν εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ, τέμνῃ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Β' καὶ Γ' ἀντιστοίχως, τότε εἶναι

$$\frac{ΑΒ'}{Β'Β} = \frac{ΑΓ'}{Γ'Γ}$$ **καὶ ἀντιστρόφως.**

Πράγματι, ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν ἐκ τῆς κορυφῆς Α εὐθεῖαν (ε) παράλληλον τῆς ΒΓ καὶ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα τοῦ Θαλοῦ διὰ τὰς παραλλήλους (ε) // Β'Γ' // ΒΓ τεμνομένας ὑπὸ τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ (σχ. 262).

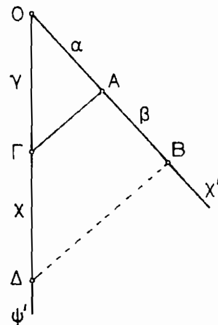
Ἀπὸ τὴν ἄνω ἀναλογίαν εὑρίσκομεν καὶ $\frac{ΑΒ'}{ΑΒ} = \frac{ΑΓ'}{ΑΓ}$

266. Πρόβλημα Ι. Κατασκευὴ τετάρτης ἀναλόγου. Δοθέντων τριῶν εὐθυγράμμων τμημάτων α, β καὶ γ, νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα x, τὸ ὁποῖον νὰ πληροῖ τὴν σχέσιν :

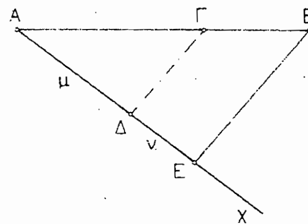
$$(1) \qquad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$$

Λύσις. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ox′ τυχούσης γωνίας $x'\widehat{O}y'$ λαμβάνομεν διαδοχικῶς τμήματα ΟΑ = α, ΑΒ = β καὶ ἐπὶ τῆς Oy′ τμῆμα ΟΓ = γ (σχ. 263). Φέρομεν τὴν ΑΓ καὶ ἐκ τοῦ Β παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Oy′ εἰς τὸ σημεῖον Δ. Τὸ τμῆμα ΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον x, διότι κατὰ τὸ προηγούμενον πόρισμα θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$$



Σχ. 263



Σχ. 264

267. Πρόβλημα ΙΙ. Διαίρεσις εὐθυγράμμου τμήματος εἰς δεδομένον λόγον. Ἐπὶ δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Γ (ἐνδιάμεσον τῶν Α καὶ Β), οὕτως ὥστε νὰ εἶναι

$$\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΓΒ}} = \frac{\mu}{\nu}$$

Λύσις. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν τυχοῦσαν ἡμιευθεῖαν Αx ἐπὶ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν διαδοχικῶς δύο τμήματα ΑΔ = μ καὶ ΔΕ = ν (σχ. 264). Φέρομεν τὴν ΕΒ καὶ ἐκ τοῦ Δ παράλληλον πρὸς αὐτήν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Γ. Τότε εἶναι προφανῶς

$$\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΓΒ}} = \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΔΕ}} = \frac{\mu}{\nu}.$$

Παρατήρησις. Διὰ τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλοῦ, ὁ λόγος δύο εὐθυγράμμων τμημάτων, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δύναται νὰ μεταφερθῇ διὰ παραλλήλων εὐθειῶν, εἰς τὸν λόγον ἀντιστοίχων πρὸς αὐτὰ εὐθυγράμμων τμημάτων ἐπὶ οἱασδήποτε ἄλλης εὐθείας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

421. Τρεῖς παράλληλοι εὐθεῖαι (ε_1), (ε_2), (ε_3) διατεταγμέναι κατὰ τὴν σειρὰν αὐτήν, ἀπέχουν αἱ δύο πρῶται ἀπόστασιν 2α καὶ ἡ δευτέρα μὲ τὴν τρίτην ἀπόστασιν 5α. Εὐθεῖα τέμνουσα αὐτὰς εἰς τὰ Α, Β, Γ, ἀντιστοίχως ἔχει ΑΒ = 3α. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ τμῆμα ΒΓ.

422. Εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, ἐὰν εἶναι ΑΓ = 21α, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ τμῆμα ΒΓ.

423. Τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει ΑΒ = 9λ καὶ ΑΓ = 15λ. Ἀπὸ τὸ κέντρον βάρους του Κ φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον τῆς ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ τμήματα ΑΔ καὶ ΓΕ.

424. Δίδεται τραπέζιον ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) μὲ ΑΔ = 6α καὶ ΒΓ = 4α. Ἐπὶ τῶν ΑΔ καὶ ΒΓ λαμβάνομεν σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $ΑΕ = \frac{3α}{2}$ καὶ ΒΖ = α. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις τοῦ τραπεζίου.

425. Εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ νὰ διαιρεθῇ εἰς τρία τμήματα ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 1, 3, 5.

426. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον βάρους τριγώνου ΑΒΓ χωρὶς νὰ ἀχθῇ διάμεσος.

427. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Β καὶ ἀπὸ τὸ μέσον Ε τῆς διαμέσου ΑΔ, τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ. Δείξατε ὅτι $\frac{ΖΑ}{ΖΓ} = \frac{1}{2}$.

428. Εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν διάμεσον ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εἰς τὰ Ε, Ζ, Η ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι εἶναι $\frac{ΑΕ}{ΑΗ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$.

429. Ἀπὸ τὸ μέσον Δ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν τέμνουσαν τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι εἶναι $\frac{ΕΑ}{ΕΒ} = \frac{ΖΑ}{ΖΓ}$.

430. Ἐκ σημείου Δ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν ΔΕ // ΒΓ, ἐκ τοῦ Ε φέρομεν ΕΖ // ΑΒ καὶ ἐκ τοῦ Ζ φέρομεν ΖΗ // ΓΑ. Δείξατε ὅτι εἶναι $\frac{ΔΑ}{ΔΒ} = \frac{ΗΒ}{ΗΑ}$.

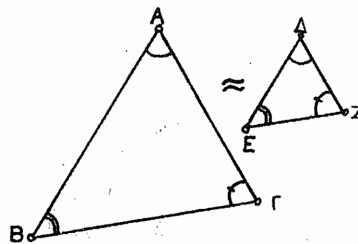
431. Εἰς τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἡ ἐκ τοῦ Α παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ τέμνει τὴν ΒΔ εἰς τὸ Ε καὶ ἡ ἐκ τοῦ Ε παράλληλος πρὸς τὴν ΔΓ τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ. Δείξατε ὅτι εἶναι ΒΖ // ΑΔ.

ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

268. Ὁρισμός. Δύο τρίγωνα καλοῦνται **ὅμοια**, ὅταν εἶναι ἰσογώνια, ἤτοι ὅταν ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας, μίαν πρὸς μίαν.

Αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν πλευραὶ καλοῦνται **ὁμόλογοι** πλευραί. Διὰ τὴν ὁμοιότητα δύο τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ χρησιμοποιοῦμεν τὸν συμβολισμὸν ≈, γράφομεν δηλαδὴ (σχ. 265).

(1) $\overset{\Delta}{ΑΒΓ} \approx \overset{\Delta}{ΔΕΖ}$.



Σχ. 265

Ἐφιστᾶται ἡ προσοχὴ εἰς τὴν σειρὰν τῆς ἀναγραφῆς τῶν γραμμάτων

Α,Β,Γ καὶ Δ,Ε,Ζ. Πρέπει νὰ εἶναι τοιαύτη, ὥστε αἱ κορυφαί, εἰς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν ἴσαι γωνίαι διὰ τὰ δύο ὅμοια τρίγωνα, νὰ ἀναγράφωνται μὲ τὴν αὐτὴν σειράν. (Τοῦτο δὲν εἶναι ἀναγκαῖον, ἀλλὰ ἔχει μόνον πρακτικὴν σημασίαν). Ἐκ τῆς σχέσεως (1) ἕπεται ἀμέσως τότε ὅτι εἰς τὰ δύο τρίγωνα εἶναι $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$, $\widehat{B} = \widehat{E}$ καὶ $\widehat{\Gamma} = \widehat{Z}$ ἐπὶ πλέον δὲ ὅτι τὰ τρία ζεύγη τῶν ὁμολόγων πλευρῶν εἶναι τὰ (ΑΒ, ΔΕ), (ΒΓ, ΕΖ) καὶ (ΓΑ, ΖΔ).

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων, ἕπονται αἱ ἑξῆς ἰδιότητες:

i) Πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ, εἶναι ὅμοιον πρὸς ἑαυτό, ἤτοι εἶναι $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{AB\Gamma}$ (ἀνακλαστική).

ii) Ἐὰν εἶναι $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{\Delta EZ}$, τότε θὰ εἶναι καὶ $\overset{\Delta}{\Delta EZ} \approx \overset{\Delta}{AB\Gamma}$ (συμμετρική).

iii) Ἐὰν εἶναι $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{\Delta EZ}$ καὶ $\overset{\Delta}{\Delta EZ} \approx \overset{\Delta}{H\Theta I}$, τότε θὰ εἶναι καὶ $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{H\Theta I}$ (μεταβατική).

Ἄρα ἡ σχέσις τῆς ὁμοιότητος εἶναι **σχέσις ἰσοδυναμίας.**

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ὁμοιότητος δύο τριγώνων ἕπονται τὰ ἑξῆς πορίσματα.

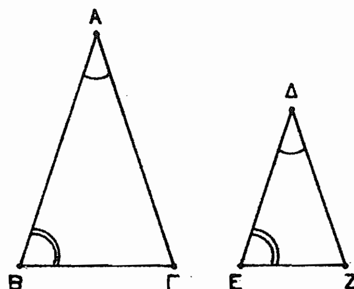
Πόρισμα Ι. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας των ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, τότε εἶναι ὅμοια, διότι κατὰ τὴν § 105, πόρ. ΙΙ ἔχουν καὶ τὴν τρίτην γωνίαν αὐτῶν ἴσην.

Πόρισμα ΙΙ. Ἐὰν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν των ἴσην, εἶναι ὅμοια.

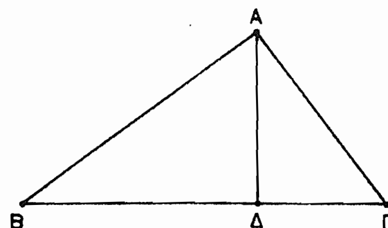
Πόρισμα ΙΙΙ. Ἐὰν δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἔχουν τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς τῶν ἴσων πλευρῶν ἴσην, ἢ μίαν τῶν παρὰ τὴν βάσιν τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίαν ἴσην, τότε εἶναι ὅμοια (σχ. 266).

Πόρισμα IV. Τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου διαιρεῖ τοῦτο εἰς δύο ἄλλα ὀρθογώνια τρίγωνα, ὅμοια πρὸς τὸ ἀρχικὸν καὶ μεταξύ των ὅμοια.

Πράγματι $\overset{\Delta}{A\Delta B} \approx \overset{\Delta}{\Gamma AB}$ (σχ. 267), διότι εἶναι ὀρθογώνια καὶ ἔχουν τὴν γωνίαν $\widehat{B}$ κοινήν.



Σχ. 266



Σχ. 267

Ὁμοίως $\overset{\Delta}{\Gamma\Delta A} \approx \overset{\Delta}{\Gamma AB}$, διότι εἶναι ὀρθογώνια καὶ ἔχουν τὴν γωνίαν $\widehat{\Gamma}$ κοινήν. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\overset{\Delta}{A\Delta B} \approx \overset{\Delta}{\Gamma\Delta A}$.

269. Θεώρημα. Δύο ὅμοια τρίγωνα, ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευράς των ἀναλόγους.

Ἀπόδειξις. Ἔστω $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{\Delta EZ}$ (σχ. 268). Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα $AE' = \Delta E$ καὶ ἐκ τοῦ Ε′ φέρομεν παράλληλον τῆς ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ′. Τότε εἶναι $\overset{\Delta}{AE'Z'} = \overset{\Delta}{\Delta EZ}$ ὡς ἔχοντα $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$, $\widehat{E'} = \widehat{B} = \widehat{E}$ καὶ $AE' = \Delta E$. Ἄρα $AZ' = \Delta Z$ καὶ $E'Z' = EZ$ καὶ τότε (§ 265, πορ.) εἶναι :

$$(1) \qquad \frac{AB}{AE'} = \frac{A\Gamma}{AZ'} \Rightarrow \frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}.$$

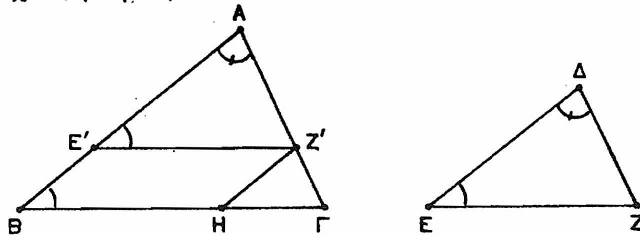
Ἐκ τοῦ Ζ′ φέρομεν παράλληλον τῆς ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Η. Τότε τὸ τετράπλευρον Ε′Ζ′ΗΒ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἄρα $BH = E'Z' = EZ$. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν :

$$(2) \qquad \frac{A\Gamma}{AZ'} = \frac{B\Gamma}{BH} \Rightarrow \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{EZ}$$

Ἀπὸ τὰς δευτέρας ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2), ἕπεται ὅτι :

$$\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{\Delta E}} = \frac{\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{\Delta Z}} = \frac{\mathbf{B\Gamma}}{\mathbf{EZ}}.$$

Παρατήρησις. Ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα (1) εἶναι καὶ ἡ $AB \cdot AZ' = AE' \cdot A\Gamma$, ὅπου τὰ γινόμενα τῶν μελῶν της ἑρμηνεύονται (πρὸς τὸ παρὸν) ὡς γινόμενα τῶν μέτρων τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων τὰ ὁποῖα περιέχουν (σχέσις μέτρων).



Σχ. 268

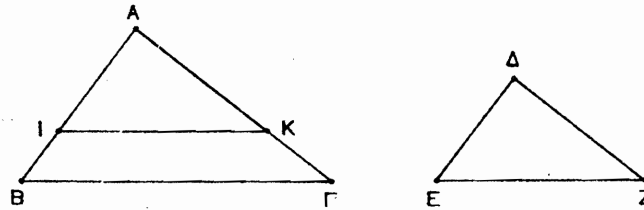
270. Θεώρημα (ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου). Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς πλευράς των ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (σχ. 269), διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει :

$$(1) \qquad \frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{EZ}.$$

Ἐπὶ τῆς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα ΑΙ = ΔΕ καὶ ἐκ τοῦ Ι φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Κ. Εἶναι προφανῶς

(2) $$\overset{\Delta}{\text{ΑΒΓ}} \approx \overset{\Delta}{\text{ΑΙΚ}},$$



Σχ. 269

διότι εἶναι ἰσογώνια. Ἄρα κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα θὰ εἶναι :

(3) $$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΙ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΚ}} = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΙΚ}}$$

Ἀλλὰ τὰ πρῶτα μέλη τῶν (1) καὶ (3) εἶναι ἴσα, διότι ΑΙ = ΔΕ. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΔΖ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΚ}}$ καὶ $\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΕΖ}} = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΙΚ}}$ ἐκ τῶν ὁποίων ἕπεται :

ΔΖ = ΑΚ καὶ ΕΖ = ΙΚ ἀντιστοίχως.

Ἑπομένως εἶναι $\overset{\Delta}{\text{ΔΕΖ}} = \overset{\Delta}{\text{ΑΙΚ}}$ (Π - Π - Π) καὶ λόγῳ τῆς σχέσεως (2) λαμβάνομεν $$\overset{\Delta}{\text{ΑΒΓ}} \approx \overset{\Delta}{\text{ΔΕΖ}}.$$

Παρατήρησις. Ὁ λόγος δύο ὁμολόγων πλευρῶν δύο ὁμοίων τριγώνων καλεῖται **λόγος ὁμοιότητος αὐτῶν.**

271. Θεώρημα. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην, περιεχομένην μεταξὺ ἀναλόγων πλευρῶν, εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (σχ. 269) διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει :

(1) $$\widehat{\text{Α}} = \widehat{\Delta} \text{ καὶ } \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΔΕ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΔΖ}}$$

Ἐπὶ τῆς ΑΒ λαμβάνομεν ΑΙ = ΔΕ καὶ φέρομεν ΙΚ//ΒΓ. Τότε εἶναι προφανῶς :

(2) $$\overset{\Delta}{\text{ΑΒΓ}} \approx \overset{\Delta}{\text{ΑΙΚ}}$$

καὶ ἑπομένως :

(3) $$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΙ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΚ}}$$

Τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (3) εἶναι ἴσα, διότι ΔΕ = ΑΙ ἐξ ὑποθέσεως. Ἄρα θὰ εἶναι καί :

$$\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΔΖ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΚ}}$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται ὅτι ΑΚ = ΔΖ.

Ἑπομένως $\overset{\Delta}{\mathrm{AIK}} = \overset{\Delta}{\mathrm{\Delta EZ}}$ (Π - Γ - Π). Ἄρα, λόγῳ τῆς σχέσεως (2), ἕπεται :

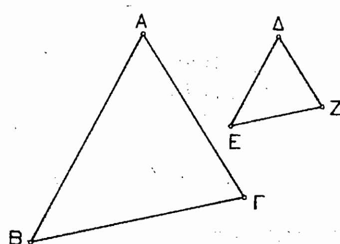
$$\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}} \approx \overset{\Delta}{\mathrm{\Delta EZ}}.$$

Πόρισμα. Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχουν τὰς καθέτους αὐτῶν πλευρὰς ἀναλόγους.

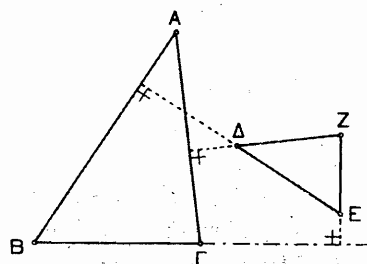
272. Θεώρημα. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους ἢ καθέτους, μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους (σχ. 270) ἢ καθέτους (σχ. 271), μίαν πρὸς μίαν. Τότε τὰ πιθανὰ ἐνδεχόμενα εἶναι τὰ ἑξῆς (§§ 94, 95) :

i) $\widehat{A} + \widehat{\Delta} = 2^{L}$	ii) $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$	iii) $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$	iv) $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$
$\widehat{B} + \widehat{E} = 2^{L}$	$\widehat{B} + \widehat{E} = 2^{L}$	$\widehat{B} = \widehat{E}$	$\widehat{B} = \widehat{E}$
$\widehat{\Gamma} + \widehat{Z} = 2^{L}$	$\widehat{\Gamma} + \widehat{Z} = 2^{L}$	$\widehat{\Gamma} + \widehat{Z} = 2^{L}$	$\widehat{\Gamma} = \widehat{Z}$



Σχ. 270



Σχ. 271

Τὸ ἐνδεχόμενον (i) δὲν δύναται νὰ συμβαίνῃ καθ' ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν καὶ τῶν δύο τριγώνων θὰ ἦτο $6^{L} > 4^{L}$, ὅπερ ἄτοπον (§ 105).

Τὸ ἐνδεχόμενον (ii) ὁμοίως δὲν δύναται νὰ συμβαίνῃ, καθ' ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν καὶ τῶν δύο τριγώνων θὰ ἦτο

$$4^{L} + \widehat{A} + \widehat{\Delta} > 4^{L}$$

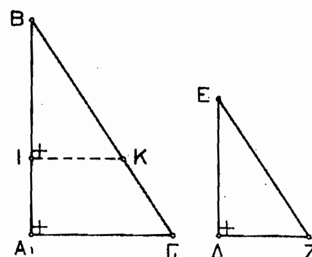
Τὸ ἐνδεχόμενον (iii) δύναται νὰ συμβαίνῃ μόνον ὅταν εἶναι $\widehat{\Gamma} = \widehat{Z} = 1^{L}$, διότι αἱ δύο προηγούμεναι ἰσότητες $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$ καὶ $\widehat{B} = \widehat{E}$ συνεπάγονται καὶ τὴν $\widehat{\Gamma} = \widehat{Z}$. Τότε ὅμως τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ὡς ἰσογώνια.

Τέλος τὸ ἐνδεχόμενον (iv) δὲν ἔχομεν λόγους νὰ τὸ ἀποκλείσωμεν, συνεπῶς τοῦτο εἶναι τὸ μόνον τὸ ὁποῖον δύναται νὰ συμβαίνῃ (ἡ περίπτωσις iii εἶναι μερικὴ περίπτωσις τῆς iv). Ἄρα τότε τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια.

273. Θεώρημα. Ἐὰν εἰς δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ὁ λόγος τῶν ὑποτεινουσῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον δύο καθέτων πλευρῶν, ταῦτα εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (σχ. 272) διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει:

(1) $$\frac{ΒΓ}{ΕΖ}=\frac{ΑΒ}{ΔΕ}$$



Σχ. 272

Ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ λαμβάνομεν τμῆμα

(2) ΒΚ = ΕΖ καὶ φέρομεν ΚΙ // ΓΑ.

Τότε εἶναι προφανῶς

(3) $\overset{\Delta}{ΑΒΓ} \approx \overset{\Delta}{ΙΒΚ}$ καὶ ἑπομένως:

(4) $$\frac{ΒΓ}{ΒΚ}=\frac{ΑΒ}{ΙΒ}$$

Τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (4) τὰ πρῶτα μέλη εἶναι ἴσα λόγῳ τῆς (2). Ἄρα θὰ εἶναι καὶ τὰ δεύτερα μέλη ἴσα, ἤτοι

$$\frac{ΑΒ}{ΔΕ}=\frac{ΑΒ}{ΙΒ}$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται

(5) $$ΙΒ = ΔΕ$$

Ἐκ τῶν (2) καὶ (5) ἕπεται ὅτι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΙΒΚ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἴσα καὶ λόγῳ τῆς (3) ἔχομεν:

$$\overset{\Delta}{ΑΒΓ} \approx \overset{\Delta}{ΔΕΖ}$$

274. Σύνοψις τῶν περιπτώσεων ὁμοιότητος τριγώνων. Ἐξ ὅλων τῶν προηγουμένων θεωρημάτων συνάγεται ὅτι δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχουν :

i) Δύο γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν

ii) Τὰς πλευράς των ἀναλόγους.

iii) Μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ ἀναλόγων πλευρῶν.

iv) Τὰς πλευράς των παραλλήλους, μίαν πρὸς μίαν.

v) Τὰς πλευράς των καθέτους, μίαν πρὸς μίαν.

Εἰδικῶς διὰ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ἰσχύει ἡ πρότασις :

Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχουν μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην ἢ δύο πλευρὰς ἀναλόγους, μίαν πρὸς μίαν, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν καθέτου πρὸς κάθετον καὶ ὑποτεινούσης πρὸς ὑποτείνουσαν.

275. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν περιμέτρων δύο ὁμοίων τριγώνων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἂς θεωρήσωμεν δύο ὅμοια τρίγωνα $Α_1Β_1Γ_1$ καὶ $Α_2Β_2Γ_2$ (σχ. 273) καὶ ἔστω λ ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν, ἤτοι :

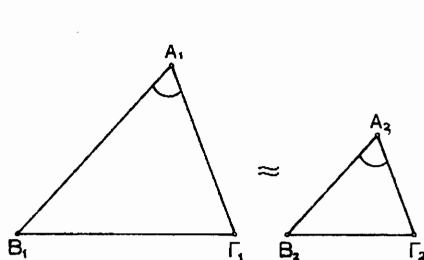
(1) $$λ=\frac{Α_1Β_1}{Α_2Β_2}=\frac{Α_1Γ_1}{Α_2Γ_2}=\frac{Β_1Γ_1}{Β_2Γ_2}=\frac{Α_1Β_1+Α_1Γ_1+Β_1Γ_1}{Α_2Β_2+Α_2Γ_2+Β_2Γ_2}=\frac{2τ_1}{2τ_2},$$ ὅπου

$2τ_1$ καὶ $2τ_2$ αἱ περίμετροι τῶν τριγώνων $Α_1Β_1Γ_1$ καὶ $Α_2Β_2Γ_2$ ἀντιστοίχως.

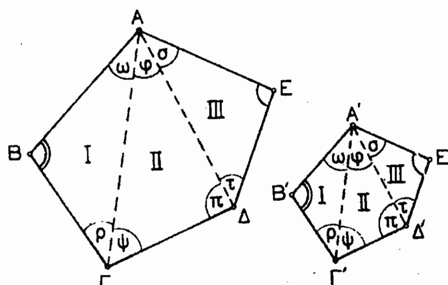
Πόρισμα. Ἐὰν τριγώνου τὰ μήκη τῶν πλευρῶν πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ ἀριθμόν τινα λ, τότε ἡ περίμετρος αὐτοῦ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἀριθμόν λ.

ΟΜΟΙΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

276. Ὁρισμός. Δύο πολύγωνα καλοῦνται ὅμοια, ὅταν δύνανται νὰ χωρισθοῦν εἰς ἰσάριθμα τρίγωνα, ὅμοια ἀνὰ δύο καὶ ὁμοίως κείμενα (σχ. 274).



Σχ. 273



Σχ. 274

Δύο ὅμοια πολύγωνα ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν, ὑπάρχει δὲ ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ κορυφῶν γωνιῶν καὶ πλευρῶν τῶν δύο πολυγώνων, ἀντίστοιχος ἐκείνης τῶν ὁμοίων τριγώνων. Ὅλα τὰ ζεύγη ἀντιστοίχων στοιχείων καλοῦνται **ὁμόλογα**. Διὰ τὸν συμβολισμὸν δύο ὁμοίων πολυγώνων χρησιμοποιοῦμεν τὸ αὐτὸ σύμβολον $\approx$ τῶν ὁμοίων τριγώνων.

277. Θεώρημα. Δύο ὅμοια πολύγωνα ἔχουν τὰς ὁμολόγους γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν τὰ ὅμοια πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ Α'Β'Γ'Δ'Ε' (σχ. 274), τὰ ὁποῖα ἔχομεν χωρίσει εἰς ζεύγη ὁμοίων τριγώνων ἤτοι :

(I) $\quad A\overset{\Delta}{B}\Gamma \approx A'\overset{\Delta}{B'}\Gamma'$

(II) $\quad A\overset{\Delta}{\Gamma}\Delta \approx A'\overset{\Delta}{\Gamma'}\Delta'$

(III) $\quad A\overset{\Delta}{\Delta}E \approx A'\overset{\Delta}{\Delta'}E'$

i) Τότε, λόγῳ τῶν ὁμοίων τριγώνων, εἶναι : $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{E} = \widehat{E'}$ ἐνῷ αἱ γωνίαι $\widehat{A}$, $\widehat{\Gamma}$ καὶ $\widehat{\Delta}$ τοῦ ἑνὸς πολυγώνου εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως μὲ τὰς $\widehat{A'}$, $\widehat{\Gamma'}$ καὶ $\widehat{\Delta'}$ τοῦ ἄλλου ὡς ἀθροίσματα ἴσων γωνιῶν.

ii) Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων (I) ἔχομεν :

$$(1) \qquad \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$$

ἐνῷ ἐκ τῶν ἐπίσης ὁμοίων τριγώνων (II) καὶ (III) ἔχομεν ἀντιστοίχως :

$$(2) \qquad \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{A\Delta}{A'\Delta'} \quad \text{καὶ} \quad \frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{\Delta E}{\Delta'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἔπεται ὅτι :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta E}{\Delta'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

278. Θεώρημα (ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου). Ἐὰν δύο πολύγωνα ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, καὶ ὁμοίως κειμένας καὶ τὰς πλευράς, τὰς κατὰ τὴν ἰδίαν διάταξιν περιεχούσας τὰς ἴσας γωνίας, ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν πάλιν τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ Α′Β′Γ′Δ′Ε′ (σχ. 274) τὰ ὁποῖα ὑποθέτομεν ὅτι ἔχουν

(1) $\widehat{A} = \widehat{A}', \widehat{B} = \widehat{B}', \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}', \widehat{\Delta} = \widehat{\Delta}', \widehat{E} = \widehat{E}'$ καὶ

(2) $$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta E}{\Delta'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ταῦτα δύνανται νὰ χωρισθοῦν εἰς ὅμοια τρίγωνα καὶ ὁμοίως κείμενα. Πρὸς τοῦτο φέρομεν τὰς διαγωνίους ΑΓ, ΑΔ, Α′Γ′ καὶ Α′Δ′ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι :

(I) $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$

διότι ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ ἀναλόγων πλευρῶν. Τότε θὰ εἶναι :

(3) $$\frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$$

Ἐπὶ πλέον δὲ ἔχομεν

(4) $A\widehat{\Gamma}\Delta = A'\widehat{\Gamma'}\Delta'$

ὡς διαφορὰς ἴσων γωνιῶν. Ἄρα ἐκ τῶν (2), (3) καὶ (4) ἔπεται ὅτι :

(II) $\overset{\Delta}{A\Gamma\Delta} \approx \overset{\Delta}{A'\Gamma'\Delta'}$

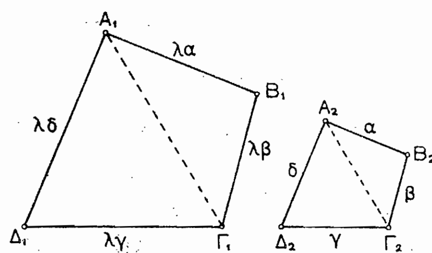
ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ ἀναλόγων πλευρῶν.

Ὁμοίως λαμβάνομεν :

(III) $\overset{\Delta}{A\Delta E} \approx \overset{\Delta}{A'\Delta'E'}$

ἄρα τὰ δύο πολύγωνα εἶναι ὅμοια.

Σημείωσις. Ὁ λόγος δύο ὁμολόγων πλευρῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων, καλεῖται **λόγος ὁμοιότητος** τῶν πολυγώνων.



Σχ. 275

279. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν περιμέτρων δύο ὁμοίων πολυγώνων, ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον ὁμοιότητος αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἔστω $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1 \approx A_2B_2\Gamma_2\Delta_2$ (σχ. 275) καὶ ἂς καλέσωμεν

α, β, γ καὶ δ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ $A_2B_2\Gamma_2\Delta_2$. Ἂν λ εἶναι ὁ λόγος ὁμοιότητος αὐτῶν, τότε αἱ πλευραὶ τοῦ $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ θὰ εἶναι λα, λβ, λγ καὶ λδ ἀντιστοίχως.

Ἄρα ὁ λόγος τῶν περιμέτρων τῶν δύο πολυγώνων θὰ εἶναι :

$$\frac{A_1B_1 + B_1\Gamma_1 + \Gamma_1\Delta_1 + \Delta_1A_1}{A_2B_2 + B_2\Gamma_2 + \Gamma_2\Delta_2 + \Delta_2A_2} = \frac{\lambda\alpha + \lambda\beta + \lambda\gamma + \lambda\delta}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} =$$

$$= \frac{\lambda(\alpha + \beta + \gamma + \delta)}{\alpha + \beta + + \gamma + \delta} = \lambda$$

ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

432. Δείξατε ὅτι τὰ κέντρα βάρους τῶν τεσσάρων τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα τυχὸν κυρτὸν τετράπλευρον διαιρεῖται ὑπὸ τῶν διαγωνίων του, εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου.

433. Δείξατε ὅτι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων τραπεζίου διαιρεῖ ἑκάστην διαγώνιον εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰς βάσεις του.

434. Διὰ τῆς κορυφῆς Β τριγώνου ΑΒΓ ἄγομεν εὐθεῖαν ΒΔ τέμνουσαν τὴν προέκτασιν τῆς πλευρᾶς ΑΓ εἰς τὸ Δ καὶ τοιαύτην, ὥστε νὰ εἶναι $\widehat{\Gamma B\Delta} = \widehat{A}$. Δείξατε ὅτι εἶναι $B\Delta^2 = \Delta A.\Delta\Gamma$.

435. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὰ ὕψη ΑΔ καὶ ΒΕ. Ἐὰν Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον, δείξατε ὅτι α) $HA\cdot H\Delta = HB\cdot HE$ καὶ β) $\Gamma A\cdot \Gamma E = \Gamma B\cdot \Gamma\Delta$.

436. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1$L) φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ καὶ ἐκ τοῦ Δ φέρομεν $\Delta E \perp AB$. Δείξατε ὅτι εἶναι $A\Delta^2 = A\Gamma\cdot\Delta E$.

437. Αἱ βάσεις ἑνὸς τραπεζίου ἔχουν μήκη α καὶ 3α καὶ αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ β καὶ 2β. Ἐὰν αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ τέμνωνται εἰς τὸ Ο, νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου μὲ κορυφὴν τὸ Ο καὶ βάσιν τὴν μεγαλυτέραν τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου.

438. Ἔστω κύκλος (Ο,R) καὶ ΑΒ μία χορδὴ αὐτοῦ. Εἰς τὸ Β φέρομεν ἐφαπτομένην (ε) καὶ ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὴν $A\Gamma \perp$ (ε). Δείξατε ὅτι εἶναι $AB^2 = 2R\cdot A\Gamma$.

439. Εἰς τυχὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἄγομεν τὴν διαγώνιον ΑΓ. Ἐὰν Ε καὶ Ζ εἶναι τὰ κέντρα βάρους τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ, δείξατε ὅτι εἶναι $EZ \mathbin{/\!/} = \frac{B\Delta}{3}$.

440. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Δείξατε ὅτι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του εἶναι κορυφαὶ τριγώνου ὁμοίου πρὸς τὸ ΑΒΓ.

441. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Α τῆς πλευρᾶς Οx δοθείσης ὀξείας γωνίας $x\widehat{O}y$ φέρομεν κάθετον ΑΒ ἐπὶ τὴν ἄλλην πλευράν της. Δείξατε ὅτι ὁ λόγος $\frac{AB}{AO}$ εἶναι σταθερὸς (ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ Α).

442. Τριγώνου ΑΒΓ, ἡ διχοτόμος ΑΔ τέμνει τὸν περιγεγραμμένον κύκλον εἰς τὸ Ε. Δείξατε ὅτι εἶναι α) $AB\cdot A\Gamma = A\Delta\cdot AE$, β) $EB^2 = EA\cdot E\Delta$.

443. Διὰ τῆς κορυφῆς Α ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς τὸ Δ καὶ τὸν περιγεγραμμένον κύκλον εἰς τὸ Ε. Δείξατε ὅτι εἶναι $AB^2 = A\Delta\cdot AE$.

444. Δείξατε ὅτι δύο παραλληλόγραμμα μὲ μίαν γωνίαν ἴσην ἢ παραπληρωματικὴν καὶ τὰς προσκειμένας πλευρὰς ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια.

445. Δείξατε ὅτι ἐὰν δύο παραλληλόγραμμα ἔχουν τὰς διαγωνίους των ἀναλόγους καὶ αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν ἴσας γωνίας, εἶναι ὅμοια.

446. Ἡ ἀπόστασις τυχόντος σημείου ἑνὸς κύκλου ἀπὸ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς μιᾶς ἐφαπτομένης εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου καὶ τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τὴν ἐφαπτομένην.

447. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐὰν Δ καὶ Ε εἶναι σημεῖα τῆς πλευρᾶς ΒΓ, τοιαῦτα ὥστε $\widehat{ΒΑΔ} = \widehat{ΓΑΕ}$ καὶ Ζ εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῆς ΑΔ μετὰ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ ΑΒΓ κύκλου, δείξατε ὅτι εἶναι $β \cdot γ = ΑΖ \cdot ΑΕ$.

Β΄.

448. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $\widehat{Β} - \widehat{Γ} = 1^{L}$. Ἐὰν ΑΔ εἶναι τὸ ὕψος του, δείξατε ὅτι εἶναι $ΑΔ^2 = ΔΒ \cdot ΔΓ$.

449. Ἔστω Ε τυχὸν σημεῖον τῆς διαγωνίου ΒΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Φέρομεν τὴν ΑΕ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς ΒΓ καὶ ΓΔ εἰς τὰ Ζ καὶ Η ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι εἶναι $ΑΕ^2 = ΕΖ \cdot ΕΗ$.

450. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ὁ περιγεγραμμένος κύκλος. Φέρομεν τὴν διάμετρον ΑΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ε καὶ ἐκ τοῦ Ε φέρομεν τὰς $ΕΖ \perp ΑΒ$ καὶ $ΕΗ \perp ΑΓ$. Δείξατε ὅτι εἶναι ΖΗ // ΒΓ.

451. Δείξατε ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ἑκάστη κορυφὴ καὶ τὰ ἴχνη τῶν δύο ἄλλων ὑψῶν εἶναι κορυφαὶ τριγώνου ὁμοίου πρὸς αὐτό.

452. Δείξατε ὅτι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων τραπεζίου διχοτομεῖ τὸ τμῆμα ποὺ ἄγεται ἀπὸ αὐτὸ παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις τοῦ τραπεζίου καὶ ἔχει τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν.

453. Δείξατε ὅτι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τραπεζίου διχοτομεῖ τὸ τμῆμα ποὺ ἄγεται ἀπὸ αὐτὸ παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις τοῦ τραπεζίου καὶ ἔχει τὰ ἄκρα του εἰς τὰς προεκτάσεις τῶν διαγωνίων.

454. Ἀπὸ σημεῖον Σ κείμενον ἐκτὸς δοθέντος κύκλου φέρομεν τὰ ἐφαπτόμενα τμήματα ΣΑ καὶ ΣΒ καὶ μίαν τυχοῦσαν τέμνουσαν ΣΓΔ. Δείξατε ὅτι εἶναι $ΑΓ \cdot ΒΔ = ΑΔ \cdot ΒΓ$.

455. Ἐὰν α καὶ β εἶναι αἱ βάσεις τραπεζίου, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ποὺ ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου τομῆς τῶν διαγωνίων παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις καὶ ἔχει τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν.

456. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τὰ τρία ὕψη του. Δείξατε ὅτι εἶναι $ΔΒ \cdot ΔΓ = ΔΕ \cdot ΔΖ$.

457. Ἡ ἀπόστασις τυχόντος σημείου ἑνὸς κύκλου ἀπὸ χορδὴν εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τὰς ἐφαπτομένας ποὺ ἄγονται εἰς τὰ ἄκρα τῆς χορδῆς.

ΟΜΟΙΟΘΕΣΙΑ

280. Ὁρισμοί. Δοθέντος σταθεροῦ σημείου Ο καὶ θετικοῦ ἀριθμοῦ k, ὁρίζομεν :

i) Ὁμόρροπον ὁμοιοθεσίαν τὴν ἀπεικόνισιν τυχόντος σημείου Α εἰς σημεῖον Α΄ τῆς ἡμιευθείας ΟΑ, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι ΟΑ΄ = k·ΟΑ.

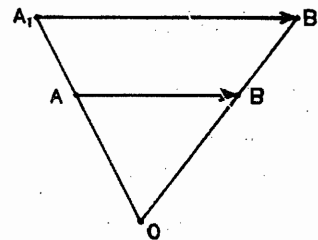
ii) Ἀντίρροπον ὁμοιοθεσίαν τὴν ἀπεικόνισιν τυχόντος σημείου A εἰς σημεῖον A′ τῆς ἀντιθέτου ἡμιευθείας πρὸς τὴν OA, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι OA′ = k·OA.

Τὸ σημεῖον O καλεῖται κέντρον τῆς ὁμοιοθεσίας καὶ ὁ ἀριθμὸς k λόγος αὐτῆς. Μία ὁμοιοθεσία μὲ κέντρον σημεῖον O καὶ λόγον k, συμβολίζεται μὲ μὲ F(O,k). Ἐὰν μέσῳ αὐτῆς, σημεῖον A ἀπεικονίζεται εἰς σημεῖον A′, συμβολίζομεν :

$$A \xrightarrow{F(O,k)} A'$$

281. Θεώρημα. Ἓν προσανατολισμένον εὐθύγραμμον τμῆμα $\vec{AB}$ ἀπεικονίζεται μέσῳ μιᾶς ὁμορρόπου ὁμοιοθεσίας F(O,k) εἰς προσανατολισμένον τμῆμα $\vec{A_1B_1}$ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\vec{A_1B_1} = k \cdot AB$ (ὁμόρροπον), ἐνῶ μέσῳ μιᾶς ἀντιρρόπου ὁμοιοθεσίας F(O,k) εἰς προσανατολισμένον τμῆμα $\vec{A_2B_2}$ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\vec{A_2B_2} = -k \cdot \vec{AB}$ (ἀντίρροπον).

Ἀπόδειξις. i) Ἐπειδὴ ἡ ὁμοιοθεσία εἶναι ὁμόρροπος, ἔχομεν (σχ. 276) :



Σχ. 276

$$\left.\begin{aligned} \vec{OA_1} &= k \cdot \vec{OA} \\ OB_1 &= k \cdot \vec{OB} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \frac{\vec{OA_1}}{\vec{OA}} &= k \\ \frac{\vec{OB_1}}{\vec{OB}} &= k \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Τὰ δεύτερα μέλη τῶν σχέσεων (1) εἶναι ἴσα, ἄρα θὰ εἶναι καὶ

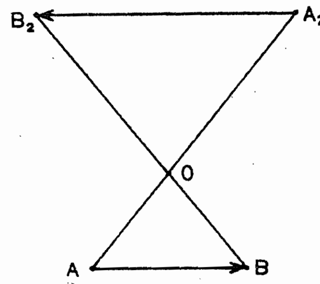
$$\frac{\vec{OA_1}}{\vec{OA}} = \frac{\vec{OB_1}}{\vec{OB}}.$$

Τότε $O\overset{\Delta}{A_1}B_1 \approx O\overset{\Delta}{A}B$, διότι ἐπὶ πλέον ἔχουν καὶ τὴν γωνίαν των εἰς τὸ O κοινήν. Ἄρα $\dfrac{\vec{A_1B_1}}{\vec{AB}} = \dfrac{\vec{OA_1}}{\vec{OA}}$ καὶ λόγῳ τῆς (1) $\Rightarrow \dfrac{\vec{A_1B_1}}{\vec{AB}} = k \Rightarrow$

$$\vec{A_1B_1} = k \cdot \vec{AB} \Rightarrow \vec{A_1B_1} \uparrow\uparrow \vec{AB} \quad (\text{διότι εἶναι } k > 0).$$

ii) Εἰς τὴν ἀντίρροπον ὁμοιοθεσίαν, ἐπειδὴ τὰ $\vec{OA}$ καὶ $\vec{OA_2}$ εἶναι ἀντίρροπα ἐξ ὁρισμοῦ, ἔχομεν (σχ. 277).

$$\left.\begin{array}{l}\vec{OA_2} = -k \cdot \vec{OA} \\ \vec{OB_2} = -k \cdot \vec{OB}\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}\dfrac{\vec{OA_2}}{\vec{OA}} = -k \\ \dfrac{\vec{OB_2}}{\vec{OB}} = -k\end{array}\right\} \quad (2)$$



Σχ. 277

Τὰ δεύτερα μέλη τῶν σχέσεων (2) εἶναι ἴσα, ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\dfrac{\vec{OA_2}}{\vec{OA}} = \dfrac{\vec{OB_2}}{\vec{OB}} \Rightarrow$

$\overset{\Delta}{OA_2B_2} \approx \overset{\Delta}{OAB}$, διότι ἔχουν καὶ τὰς γωνίας των εἰς τὸ O ἴσας ὡς κατὰ κορυφήν. Ἄρα $\dfrac{\vec{A_2B_2}}{\vec{AB}} = \dfrac{\vec{OA_2}}{\vec{OA}}$ καὶ λόγῳ τῆς (2) $\Rightarrow \dfrac{\vec{A_2B_2}}{\vec{AB}} = -k$

$\Rightarrow \vec{A_2B_2} = -k \cdot \vec{AB} \Rightarrow \vec{A_2B_2} \uparrow\downarrow \vec{AB}$ (διότι εἶναι $-k < 0$).

282. Θεώρημα. Ἐὰν δύο προσανατολισμένα τμήματα εἶναι παράλληλα (ὁμόρροπα ἢ ἀντίρροπα), ὑπάρχει ὁμοιοθεσία μέσῳ τῆς ὁποίας τὸ ἓν ἀπεικονίζεται ἐπὶ τοῦ ἄλλου.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν τὰ ὁμόρροπα τμήματα $\vec{AB}$ καὶ $\vec{A_1B_1}$ (σχ. 276). Φέρομεν τὰς AA_1 καὶ BB_1, αἱ ὁποῖαι ἐν γένει τέμνονται εἰς σημεῖον O. Τότε εἶναι προφανῶς $\overset{\Delta}{OAB} \approx \overset{\Delta}{OA_1B_1} \Rightarrow \dfrac{OA_1}{OA} = \dfrac{OB_1}{OB} = \dfrac{A_1B_1}{AB}$ καὶ ἐὰν θέσωμεν $\dfrac{A_1B_1}{AB} = k \Rightarrow OA_1 = k \cdot OA$ καὶ $OB_1 = k \cdot OB$, αἱ ὁποῖαι εἶναι χαρακτηριστικαὶ σχέσεις ὁμοιοθεσίας $F(O,k)$.

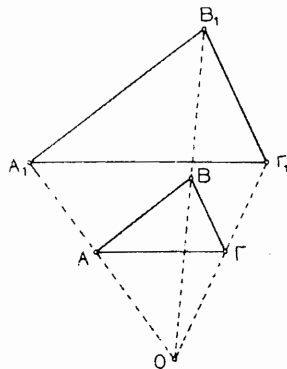
Ἐξαίρεσιν ἀποτελεῖ τὸ ἐνδεχόμενον $AB = A_1B_1$, διότι τότε αἱ AA_1 καὶ BB_1 θὰ εἶναι παράλληλοι. Συμβατικῶς δεχόμεθα ὅτι θὰ τέμνωνται εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν καὶ ὁ λόγος ὁμοιοθεσίας θὰ εἶναι $k = 1$.

Ὁμοίως διὰ τὰ ἀντίρροπα τμήματα $\vec{AB}$ καὶ $\vec{A_2B_2}$ (σχ. 277) ἔχομεν $\overset{\Delta}{OAB} \approx \overset{\Delta}{OA_2B_2} \Rightarrow \dfrac{\vec{OA_2}}{\vec{OA}} = \dfrac{\vec{OB_2}}{\vec{OB}} = \dfrac{\vec{A_2B_2}}{\vec{AB}} = -k \Rightarrow \vec{OA_2} = -k \cdot \vec{OA}$ καὶ

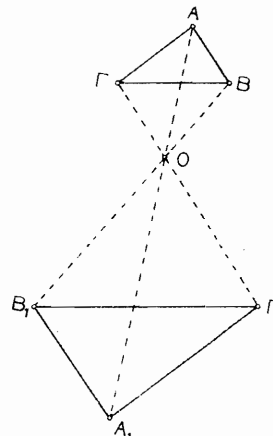
$\vec{OB_2} = -k \cdot \vec{OB} \Rightarrow A \xrightarrow{F(O,-k)} A_2$ καὶ $B \xrightarrow{F(O,-k)} B_2$.

283. Θεώρημα. Κάθε τρίγωνον ΑΒΓ ἀπεικονίζεται μέσῳ ὁμοιοθεσίας F (O,k) εἰς τρίγωνον $A_1B_1\Gamma_1$ ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ μὲ λόγον ὁμοιότητος k.

Ἀπόδειξις. Τὸ θεώρημα ἰσχύει καὶ δι' ὁμόρροπον καὶ δι' ἀντίρροπον ὁμοιοθεσίαν (σχ. 278 καὶ 279), διότι (§ 280) καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις εἶναι :



Σχ. 278

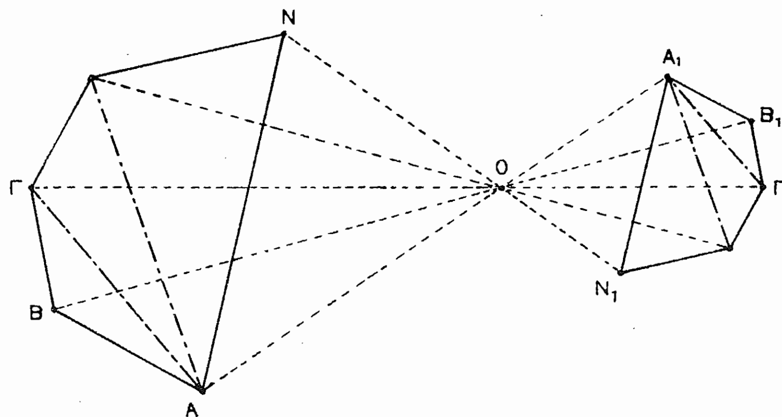


Σχ. 279

$A_1B_1 = k \cdot AB, \quad B_1\Gamma_1 = k \cdot B\Gamma, \quad \Gamma_1A_1 = k \cdot \Gamma A \Rightarrow$

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1\Gamma_1}{B\Gamma} = \frac{\Gamma_1A_1}{\Gamma A} = k \Rightarrow A_1\overset{\Delta}{B_1}\Gamma_1 \approx A\overset{\Delta}{B}\Gamma.$$

Τὸ θεώρημα ἐπεκτείνεται καὶ διὰ τυχὸν πολύγωνον ΑΒΓ...Ν τὸ ὁποῖον, μέσῳ ὁμοιοθεσίας $F(O,k)$, ἀπεικονίζεται εἰς ὅμοιον πολύγωνον $A_1B_1\Gamma_1...N_1$



Σχ. 280

(σχ. 280) μὲ λόγον ὁμοιότητος k. Ἡ ἀπόδειξις γίνεται διὰ διαιρέσεως τοῦ πολυγώνου ΑΒΓ...Ν εἰς τρίγωνα, μὲ διαγωνίους ἐκ τῆς κορυφῆς Α.

★ **284. Θεώρημα. Ἐὰν δύο ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν, ὑπάρχει ὁμοιοθεσία ἡ ὁποία ἀπεικονίζει τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου.**

Ἀπόδειξις i$_α$) Ἔστω ὅτι δύο ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ $Α_1Β_1Γ_1$ ἔχουν τὰς πλευρὰς των παραλλήλους, μίαν πρὸς μίαν καὶ ὁμορρόπους. (σχ. 281). Ἐὰν εἶναι $λ \neq 1$ ὁ λόγος ὁμοιότητος, αἱ εὐθεῖαι $ΑΑ_1$ καὶ $ΒΒ_1$ τέμνονται εἰς σημεῖον Ο τοιοῦτον, ὥστε:

$$\overset{\Delta}{ΟΑΒ} \approx \overset{\Delta}{ΟΑ_1Β_1}.$$

Ἄρα:

(1)
$$\frac{ΟΒ}{ΟΒ_1} = \frac{ΑΒ}{Α_1Β_1} = λ.$$

Ὁμοίως αἱ εὐθεῖαι $ΒΒ_1$ καὶ $ΓΓ_1$ τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον $Ο_1$ τοιοῦτον ὥστε:

$$\overset{\Delta}{Ο_1ΒΓ} \approx \overset{\Delta}{Ο_1Β_1Γ_1}.$$

Ἄρα:

(2)
$$\frac{Ο_1Β}{Ο_1Β_1} = \frac{ΒΓ}{Β_1Γ_1} = λ.$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι:

$$\frac{ΟΒ}{ΟΒ_1} = \frac{Ο_1Β}{Ο_1Β_1} \Rightarrow \frac{ΟΒ}{ΟΒ_1 - ΟΒ} = \frac{Ο_1Β}{Ο_1Β_1 - Ο_1Β} \Rightarrow \frac{ΟΒ}{ΒΒ_1} = \frac{Ο_1Β}{ΒΒ_1} \text{ ἄρα } ΟΒ = Ο_1Β$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται ὅτι $Ο \equiv Ο_1$, ἤτοι τὰ σημεῖα Ο καὶ $Ο_1$ ταυτίζονται ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ Β. Τότε θὰ εἶναι καὶ

$$ΟΑ = λ \cdot ΟΑ_1, \quad ΟΒ = λ \cdot ΟΒ_1, \quad ΟΓ = λ \cdot ΟΓ_1,$$

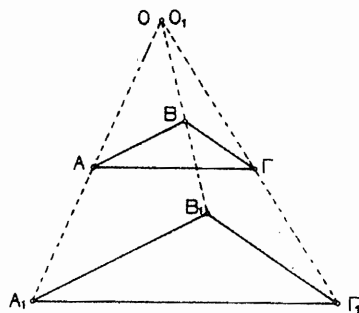
ἤτοι ὑπάρχει ὁμοιοθεσία F (Ο,λ), ἡ ὁποία ἀπεικονίζει τὸ $Α_1Β_1Γ_1$ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ.

Ἐὰν $λ = 1$, τὰ τετράπλευρα $ΑΒΒ_1Α_1$ καὶ $ΒΓΓ_1Β_1$ θὰ εἶναι παραλληλόγραμμα, ὁπότε

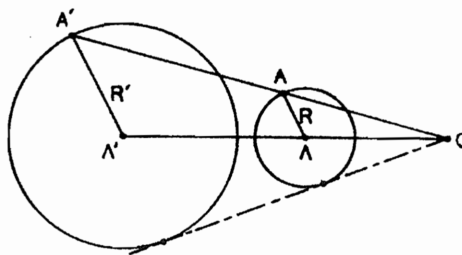
$$ΑΑ_1 \parallel ΒΒ_1 \parallel ΓΓ_1.$$

Τότε πάλιν ὑπάρχει ὁμοιοθεσία, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον ἔχει ἀπομακρυνθῆ εἰς τὸ ἄπειρον.

i$_β$) Ὁμοίως ἀποδεικνύεται τὸ θεώρημα καὶ ὅταν αἱ πλευραὶ τῶν ὁμοίων τριγώνων εἶναι ἀντίρροποι.



Σχ. 281



Σχ. 282

ii) Τὸ θεώρημα ὁμοίως δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ διὰ δύο ὅμοια πολύγωνα ἔχοντα τὰς πλευρὰς των παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν, διότι ταῦτα δύνανται νὰ χωρισθοῦν, διὰ διαγωνίων ἐκ δύο ὁμολόγων κορυφῶν των, εἰς ὅμοια τρίγωνα καὶ ὁμοίως κείμενα, μὲ τὰς πλευρὰς των παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν (σχ. 280). Ἡ ἀπόδειξις παραλείπεται.

★ 285. Θεώρημα. Τὸ ὁμοιόθετον ἑνὸς κύκλου εἶναι κύκλος.

Ἀπόδειξις. Ἔστω (Λ, R) κύκλος καὶ F (O,k) μία ὁμοιοθεσία (σχ. 282). Ἐὰν Λ′ εἶναι ἡ εἰκὼν τοῦ Λ κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν F (O, k), τὸ Λ′ εἶναι σταθερὸν σημεῖον ὡς εἰκὼν σταθεροῦ σημείου. Ἔστω Α τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου. Τότε (§ 280) εἶναι

$$ΛΑ \xrightarrow{F\,(O,k)} Λ'Α'$$

τοιοῦτον, ὥστε $Λ'Α' = k \cdot ΛΑ = k \cdot R$. Ἄρα τὸ σημεῖον Α' ἀνήκει εἰς κύκλον ἀκτῖνος $R' = k \cdot R$, ὁ ὁποῖος εἶναι ὁμοιόθετος τοῦ κύκλου $(Λ, R)$.

★ 286. Θεώρημα. Δύο κύκλοι $(Λ_1, R_1)$ καὶ $(Λ_2, R_2)$ ἔχουν δύο κέντρα ὁμοιοθεσίας.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν διάμετρον ΑΒ (σχ. 283) τοῦ κύκλου $(Λ_2, R_2)$ καὶ τὴν ἀκτῖνα $Λ_1Γ$ τοῦ κύκλου $(Λ_1, R_1)$ παράλληλον τῆς διαμέτρου ΑΒ. Ἔστω ὅτι αἱ ἀκτῖνες $Λ_2Α$ καὶ $Λ_1Γ$ εἶναι καὶ ὁμόρροποι. Τότε ἐφ' ὅσον $R_1 \neq R_2$, ἡ ΑΓ τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς διακέντρου $Λ_1Λ_2$ εἰς σημεῖον O_1, τοιοῦτον ὥστε:

(1) $$\frac{O_1Λ_1}{O_1Λ_2} = \frac{O_1Γ}{O_1A} = \frac{Λ_1Γ}{Λ_2A} = \frac{R_1}{R_2} = k.$$

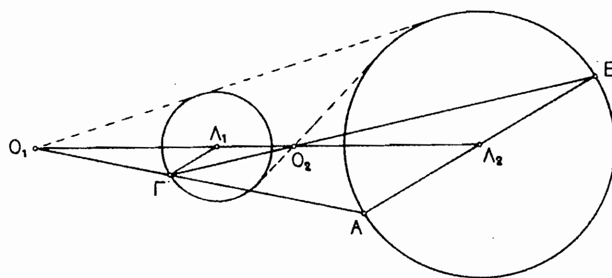
Ἐκ τῆς (1) ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον O_1 εἶναι σταθερόν, διότι ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τὰ $Λ_1$ καὶ $Λ_2$ εἶναι σταθερός, καὶ τέλος εἶναι κέντρον ὁμοιοθεσίας, διότι:

(2) $$O_1Γ = k \cdot O_1A,$$

ἤτοι ἀπεικονίζει τὸ τυχὸν σημεῖον Α τοῦ κύκλου $(Λ_2, R_2)$, ὅπως φαίνεται ἐκ τῆς σχέσεως (2), εἰς σημεῖον Γ τοῦ κύκλου $(Λ_1, R_1)$.

Ἐὰν φέρωμεν τὴν ΒΓ, αὕτη τέμνει τὴν διάκεντρον εἰς σημεῖον O_2 τοιοῦτον, ὥστε:

(3) $$\frac{O_2Λ_1}{O_2Λ_2} = \frac{O_2Γ}{O_2B} = \frac{Λ_1Γ}{Λ_2B} = \frac{R_1}{R_2} = k.$$



Σχ. 283

Ἐξ αὐτῆς ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον O_2 εἶναι σταθερόν, διότι ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τὰ $Λ_1$ καὶ $Λ_2$ εἶναι σταθερὸς καὶ τέλος εἶναι κέντρον ὁμοιοθεσίας διότι:

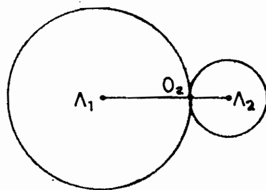
(4) $$O_2Γ = k \cdot O_2B$$

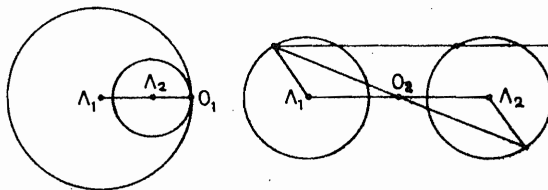
ἤτοι ἀπεικονίζει διὰ τῆς σχέσεως (4) τὸ τυχὸν σημεῖον Β τοῦ κύκλου $(Λ_2, R_2)$ εἰς σημεῖον Γ τοῦ κύκλου $(Λ_1, R_1)$.

Συμπέρασμα. Δύο τυχόντες κύκλοι ἔχουν δύο κέντρα ὁμοιοθεσίας εὑρισκόμενα ἐπὶ τῆς εὐθείας ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται ἡ διάκεντρος. Τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν δύο κέντρων τῶν κύκλων καὶ καλεῖται ἐσωτερικὸν κέντρον ὁμοιοθεσίας, ἐνῷ τὸ ἄλλο εὑρίσκεται εἰς τὴν προέκτασιν τῆς διακέντρου καὶ καλεῖται ἐξωτερικὸν κέντρον ὁμοιοθεσίας.

Παρατηρήσεις. i) Ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη τῶν δύο κύκλων, (ἐφ' ὅσον ὑπάρχει), διέρχεται ἀπὸ τὸ ἐξωτερικὸν κέντρον ὁμοιοθεσίας, καὶ ἡ κοινὴ ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη (ἐφ' ὅσον ὑπάρχει), διέρχεται ἀπὸ τὸ ἐσωτερικὸν κέντρον ὁμοιοθεσίας.

ii) Ἐὰν οἱ δύο κύκλοι ἐφάπτωνται, τὸ σημεῖον ἐπαφῆς εἶναι τὸ ἓν ἐκ τῶν δύο κέντρων ὁμοιοθεσίας (σχ. 284).





Σχ. 284 Σχ. 285

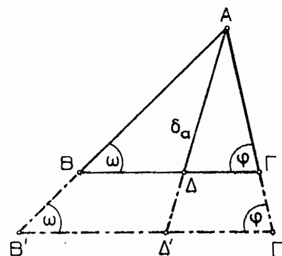
iii) Ἐὰν εἶναι $R_1 = R_2$, τὸ ἐξωτερικὸν κέντρον ὁμοιοθεσίας ἀπομακρύνεται εἰς τὸ ἄπειρον καὶ τὸ ἐσωτερικὸν εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τῆς διακέντρου (σχ. 285).

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΜΕ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

287. Παράδειγμα 1. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ γωνίαι $\widehat{B} = \omega$, καὶ $\widehat{\Gamma} = \varphi$ καὶ ἡ διχοτόμος δ_α.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον γνωρίζομεν δύο γωνίας τοῦ ζητουμένου τριγώνου, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἓν τρίγωνον ΑΒ′Γ′ ὅμοιον πρὸς τὸ ζητούμενον (σχ. 286), δηλαδὴ μὲ $\widehat{B'} = \omega$ καὶ $\widehat{\Gamma'} = \varphi$. Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΔ′ αὐτοῦ καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα $A\Delta = \delta_\alpha$. Ἐκ τοῦ Δ φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον τῆς Β′Γ′, ἡ ὁποία τέμνει τὰς ΑΒ′ καὶ ΑΓ′ εἰς τὰ Β καὶ Γ ἀντιστοίχως. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι ἔχει $\widehat{B} = \widehat{B'} = \omega$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'} = \varphi$ καὶ διχοτόμον τὴν $A\Delta = \delta_\alpha$.

Λύσις ὑπάρχει πάντοτε μία, ἐφ' ὅσον εἶναι $\omega + \varphi < 2^{\llcorner}$.



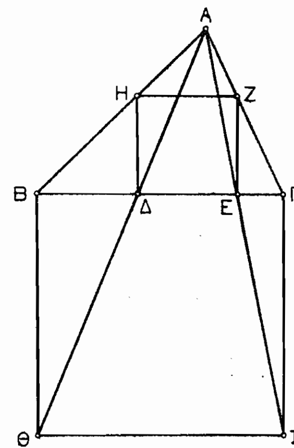
Σχ. 286

288. Παράδειγμα 2. Εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ, νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ΒΓ.

Ἀνάλυσις. Ἔστω ὅτι εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει ἐγγραφῇ τὸ τετράγωνον ΔΕΖΗ (σχ. 287) μὲ τὴν πλευρὰν ΔΕ ἐπὶ τῆς ΒΓ. Ἡ ὁμοιοθεσία μὲ κέντρον τὸ Α καὶ λόγον $k = \dfrac{AB}{AH}$, ἀπεικονίζει τὴν ΗΖ ἐπὶ τῆς ΒΓ καὶ τὸ τετράγωνον ΗΖΕΔ εἰς τετράγωνον ΒΓΙΘ, τὸ ὁποῖον δύναται ἐξ ἀρχῆς νὰ κατασκευασθῇ.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ καὶ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου,

τὸ τετράγωνον ΒΓΙΘ καὶ φέρομεν τὰς ΑΘ καὶ ΑΙ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως. Ἐκ τῶν Δ καὶ Ε φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὴν ΒΓ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Η καὶ Ζ ἀντιστοίχως. Τὸ τετράπλευρον ΔΕΖΗ εἶναι τὸ ζητούμενον τετράγωνον.



Σχ. 287

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ΔΗ // ΒΘ, ΔΕ // ΘΙ, ΕΖ // ΓΙ, ἕπεται ὅτι ἡ ὁμοιοθεσία κέντρου Α καὶ λόγου $k' = \frac{1}{k} = \frac{AH}{AB}$ ἀπεικονίζει τὰ σημεῖα Β,Θ, Ι,Γ εἰς τὰ Η,Δ,Ε,Ζ ἀντιστοίχως. Ἄρα :

$$B\Theta I\Gamma \xrightarrow{F(A,k')} H\Delta EZ \Rightarrow B\Theta I\Gamma \approx H\Delta EZ$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ ΒΘΙΓ εἶναι ἐκ κατασκευῆς τετράγωνον, ἕπεται ὅτι καὶ τὸ ΗΔΕΖ εἶναι τετράγωνον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Β'.

458. **Ἀντίστροφος ὁμοιοθεσία.** Ἐὰν σημεῖον Α ἀπεικονίζεται μέσῳ μιᾶς ὁμοιοθεσίας F(O,k) εἰς σημεῖον Α', δεῖξατε ὅτι ὑπάρχει ὁμοιοθεσία F(O,k') τοῦ αὐτοῦ κέντρου (καλουμένη ἀντίστροφος τῆς πρώτης), ἡ ὁποία ἀπεικονίζει τὸ Α' εἰς τὸ Α.

459. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ γωνίαι $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ καὶ ἡ διάμεσος μ_α.

460. Ὁμοίως ὅταν δίδωνται αἱ γωνίαι $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ καὶ τὸ ὕψος υ_α.

461. Δίδεται γωνία $x\widehat{O}y$ καὶ σημεῖον Α ἐσωτερικὸν αὐτῆς. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Α εὐθεῖα τέμνουσα τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς τὰ Β καὶ Γ, εἰς τρόπον ὥστε νὰ εἶναι $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\mu}{\nu}$.

462. Δίδεται γωνία $x\widehat{O}y$ καὶ σημεῖον Σ. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Σ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς τὰ Α καὶ Β, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι ΣΒ = 3 . ΣΑ.

463. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ὅμοιον πρὸς δοθὲν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ ἀκτὶς ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

464. Ὁμοίως ὅταν δίδεται ἡ ἀκτὶς R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

465. Δίδεται κύκλος (Κ, R) καὶ σημεῖον Σ. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Σ εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον εἰς τὰ Α καὶ Β, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι ΣΒ = 2 · ΣΑ.

466. Δίδεται κύκλος (Ο, R), εὐθεῖα (ε) καὶ σημεῖον Σ. Διὰ τοῦ Σ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὴν (ε) εἰς τὸ Α καὶ τὸν (Ο, R) εἰς τὸ Β, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι ΣΒ = 3 · ΣΑ.

467. Ἀπὸ τὸ ἓν τῶν κοινῶν σημείων Α δύο τεμνομένων κύκλων (Κ, R) καὶ (Λ, ρ) νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα αὐτοὺς εἰς τὰ Β καὶ Γ ἀντιστοίχως, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι ΑΒ = 2 · ΑΓ.

468. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ παραλληλόγραμμον ὅμοιον πρὸς δοθέν.

469. Μεταβλητὸν τρίγωνον ΑΒΓ διατηρεῖ σταθερὰν τὴν πλευρὰν ΒΓ = α κατὰ θέσιν καὶ μέγεθος καὶ τὴν διάμεσον ΒΔ = μ_β κατὰ μέγεθος. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῆς κορυφῆς Α.

ΔΕΣΜΗ ΕΥΘΕΙΩΝ

289. Ὁρισμός. Ἐπίπεδος δέσμη εὐθειῶν καλεῖται τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου, αἱ ὁποῖαι διέρχονται δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο.

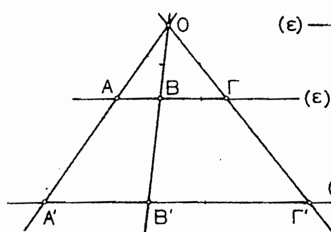
Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται **κέντρον** τῆς δέσμης. Αἱ εὐθεῖαι τῆς δέσμης καλοῦνται **ἀκτῖνες** αὐτῆς.

Ἐπίπεδος δέσμη εὐθειῶν δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ τὸ σύνολον τῶν παραλλήλων πρὸς ὡρισμένην διεύθυνσιν εὐθειῶν. Τότε τὸ κέντρον τῆς δέσμης ἔχει ἀπομακρυνθῇ εἰς τὸ ἄπειρον.

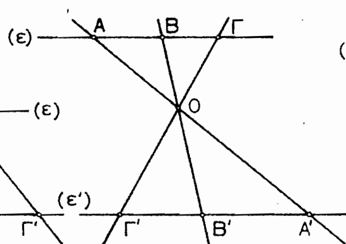
290. Θεώρημα τῆς δέσμης. Τρεῖς ἢ περισσότεραι ἀκτῖνες μιᾶς δέσμης ἀποκόπτουν ἐκ δύο παραλλήλων εὐθειῶν τμήματα ἀνάλογα.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἐπίπεδος δέσμη εὐθειῶν κέντρου Ο καὶ δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (ε) καὶ (ε'), τεμνόμεναι ὑπὸ τριῶν ἀκτίνων τῆς δέσμης εἰς τὰ σημεῖα Α,Β,Γ καὶ Α',Β',Γ' ἀντιστοίχως. Θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι :

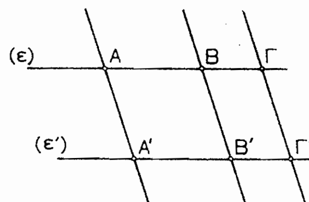
(1) $$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}.$$



Σχ. 288



Σχ. 289



Σχ. 290

Ἀπὸ τὰ δύο ζεύγη ὁμοίων τριγώνων (σχ. 288, 289) $O\overset{\Delta}{A}B \approx O\overset{\Delta}{A'}B'$ καὶ $O\overset{\Delta}{B}\Gamma \approx O\overset{\Delta}{B'}\Gamma'$ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OB'} \quad \text{καὶ} \quad \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{OB}{OB'}.$$

Αὗται ἔχουν τὰ δεύτερα μέλη των ἴσα.

Ἄρα θὰ εἶναι καί :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ διὰ δέσμην περισσοτέρων ἀκτίνων.

291. Θεώρημα. Ἐὰν τρεῖς (ἢ περισσότεραι) εὐθεῖαι τέμνουν δύο παραλλήλους εὐθείας (ε) καὶ (ε′) εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ καὶ Α′, Β′, Γ′ ἀντιστοίχως, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$, τότε αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι ἀκτῖνες μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς δέσμης, ἤτοι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἢ εἶναι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Ο τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ΑΑ′ καὶ ΒΒ′ (σχ. 288). Τότε εἶναι $O\overset{\Delta}{A}B \approx O\overset{\Delta}{A'}B'$, ἄρα :

$$(2) \qquad \frac{AB}{A'B'}=\frac{OB}{OB'}$$

Ἐὰν Ο′ εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ΒΒ′ καὶ ΓΓ′, τότε εἶναι $O'\overset{\Delta}{B}\Gamma \approx O'\overset{\Delta}{B'}\Gamma'$, ἄρα :

$$(3) \qquad \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{O'B}{O'B'}$$

Ἐκ τῆς ὑποθέσεως $\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$ καὶ τῶν (2) καὶ (3) ἕπεται :

$$\frac{OB}{OB'}=\frac{O'B}{O'B'} \quad \text{ἢ}$$

$$\frac{OB}{OB'-OB}=\frac{O'B}{O'B'-O'B} \Rightarrow \frac{OB}{BB'}=\frac{O'B}{BB'}.$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ἀναλογίας ἕπεται ὅτι ΟΒ = Ο′Β, δηλαδὴ τὰ σημεῖα Ο καὶ Ο′ συμπίπτουν. Ἄρα αἱ ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο, ἤτοι εἶναι ἀκτῖνες μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς δέσμης.

Ἐὰν εἶναι ΑΑ′//ΒΒ′, τὸ τετράπλευρον ΑΒΒ′Α′ εἶναι παραλληλόγραμμον (σχ. 290), ἑπομένως ΑΒ = Α′Β′. Τότε ἡ ὑπόθεσις (1) γράφεται :

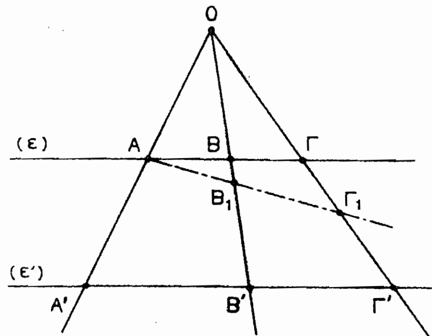
$$1=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται ὅτι ΒΓ = Β′Γ′. Ἄρα καὶ τὸ ΒΓΓ′Β′ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἑπομένως ΒΒ′//ΓΓ′, ἤτοι ΑΑ′//ΒΒ′//ΓΓ′.

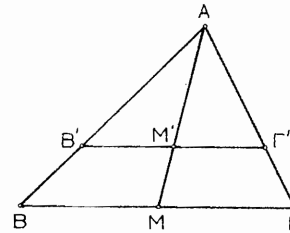
292. Θεώρημα. Ἐὰν τρεῖς ἀκτῖνες μιᾶς δέσμης κέντρου Ο τέμνωνται ὑπὸ δύο εὐθειῶν (ε) καὶ (ε′) εἰς τὰ σημεῖα Α,Β,Γ καὶ Α′, Β′, Γ′ ἀντιστοίχως καὶ εἶναι $\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$, αἱ εὐθεῖαι (ε) καὶ (ε′) εἶναι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν αἱ (ε) καὶ (ε′) δὲν εἶναι παράλληλοι (σχ. 291), φέρομεν ἐκ τοῦ Α τὴν $AB_1\Gamma_1$//Α′Β′Γ′ καὶ τότε, κατὰ τὸ θεώρημα 291, θὰ εἶναι : $\frac{AB_1}{A'B'}=\frac{B_1\Gamma_1}{B'\Gamma'} \Longleftrightarrow \frac{AB_1}{B_1\Gamma_1}=\frac{A'B'}{B'\Gamma'}$ (1). Ἐξ ὑποθέσεως ὅμως ἔχομεν

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} \Longleftrightarrow \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$ (2). 'Εκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2), αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰ δεύτερα μέλη των ἴσα, ἕπεται ὅτι $\frac{AB_1}{B_1\Gamma_1} = \frac{AB}{B\Gamma}$. 'Εξ αὐτῆς ἕπεται ὅτι (Θ. Θαλοῦ) $BB_1 // \Gamma\Gamma_1$, ὅπερ ἄτοπον, διότι αἱ BB_1 καὶ $\Gamma\Gamma_1$, ἐξ



Σχ. 291



Σχ. 292

ὑποθέσεως, τέμνονται εἰς τὸ Ο. Ἄρα κατ' ἀνάγκην πρέπει νὰ εἶναι $AB\Gamma // A'B'\Gamma'$ ἢ (ε)//(ε').

Πόρισμα. 'Εὰν τριγώνου ΑΒΓ ἡ ΑΜ εἶναι διάμεσος, πᾶν εὐθύγραμμον τμῆμα Β'Γ' // ΒΓ, ἔχον τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ, διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς διαμέσου.

Πράγματι, εἶναι : $\frac{BM}{B'M'} = \frac{\Gamma M}{\Gamma' M'}$ καί, ἐπειδὴ $BM = \Gamma M$, ἕπεται καὶ $B'M' = \Gamma'M'$ (σχ. 292).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Β'.

470. Δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ μέσα Κ καὶ Λ τῶν βάσεων τραπεζίου, διέρχεται διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου Ε τῶν διαγωνίων καὶ διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου Ζ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν.

471. 'Εὰν αἱ ἀκτῖνες μιᾶς δέσμης κέντρου Ο τέμνουν δύο παραλλήλους εὐθείας (ε) καὶ (ε') εἰς τὰ Α καὶ Α', Β καὶ Β', Γ καὶ Γ',... ἀντιστοίχως, δείξατε ὅτι αἱ διαγώνιοι τῶν τραπεζίων ΑΑ'Β'Β, ΒΒ'Γ'Γ, ΓΓ'Δ'Δ,... τέμνονται εἰς σημεῖα, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὰς (ε) καὶ (ε').

472. Φέρομεν δύο παραλλήλους πρὸς τὴν διαγώνιον ΑΓ κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς πλευράς του εἰς τὰ Ε, Θ καὶ Η,Ζ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΕΖ καὶ ΗΘ τέμνονται ἐπὶ τῆς ΒΔ.

473. 'Εκ τυχόντος σημείου Δ τῆς βάσεως ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν διάμεσον ΑΜ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ Ε καὶ Ζ. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα ΔΕ + ΔΖ εἶναι σταθερόν.

474. Δίδεται παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ ἔστω Ε τυχὸν σημεῖον τῆς διαγωνίου ΒΔ. Διὰ τοῦ Ε φέρομεν ἀνὰ μίαν παράλληλον πρὸς τὰς πλευράς του, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ εἰς τὰ Ζ καὶ Η ἀντιστοίχως καὶ τὰς ΑΔ καὶ ΒΓ εἰς τὰ Ι καὶ Θ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι εἶναι : α) ΖΘ//ΗΙ, καὶ β) αἱ ΙΖ καὶ ΗΘ τέμνονται ἐπὶ τῆς ΒΔ.

475. Δίδεται κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ ἔστω Ε τυχὸν σημεῖον τῆς ΑΒ. Διὰ τοῦ Ε φέρομεν παράλληλον τῆς ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ καὶ ἐκ τοῦ Ζ φέρομεν παράλληλον τῆς ΓΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΔ εἰς τὸ Η. Δείξατε ὅτι εἶναι :

α) ΑΕ · ΔΗ = ΒΕ · ΑΗ, καὶ ΕΗ//ΒΔ.

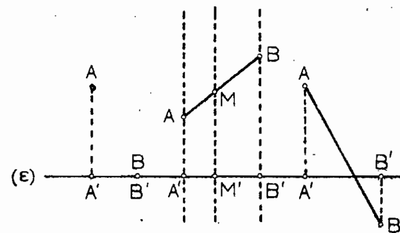
476. Δίδονται δύο εὐθεῖαι (ε_1), (ε_2) καὶ σημεῖον Α. Αἱ (ε_1) καὶ (ε_2) τέμνονται, ἀλλὰ τὸ σημεῖον τομῆς των δὲν εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ πεδίου σχεδιάσεως. Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα διὰ τοῦ Α διερχομένη καὶ ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν (ε_1) καὶ (ε_2).

ΠΕΡΙ ΟΡΘΩΝ ΠΡΟΒΟΛΩΝ

293. Ὁρισμοί. Ἔστω σημεῖον Α καὶ εὐθεῖα (ε) (σχ. 293). Φέρομεν τὴν ΑΑ′ ⊥ (ε). Τὸ σημεῖον Α′ ἐπὶ τῆς (ε) καλεῖται (ὀρθὴ) **προβολὴ** τοῦ σημείου Α ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε). Ἡ εὐθεῖα (ε) καλεῖται **προβολικὸς ἄξων** καὶ τὸ τμῆμα ΑΑ′ καλεῖται **προβάλλουσα** τοῦ σημείου Α.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἕπεται ὅτι, ἐὰν ἓν σημεῖον Β εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ προβολικοῦ ἄξονος, τότε ταυτίζεται μετὰ τῆς προβολῆς του.

Προβολὴ ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ ἐπὶ ἄξονα (ε), καλεῖται τὸ σύνολον τῶν προβολῶν τῶν σημείων τοῦ τμήματος ΑΒ, ἐπὶ τὸν ἄξονα (ε).



Σχ. 293

294. Θεώρημα. Ἡ προβολὴ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ ἐπὶ εὐθεῖαν (ε), εἶναι τμῆμα Α′Β′ μὲ ἄκρα τὰς προβολὰς τῶν ἄκρων τοῦ ΑΒ ἐπὶ τὴν (ε).

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν Α′ καὶ Β′ αἱ προβολαὶ τῶν ἄκρων Α καὶ Β τοῦ τμήματος ΑΒ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε) (σχ. 293). Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ τμήματος ΑΒ, προβάλλεται εἰς σημεῖον Μ′ τοῦ τμήματος Α′Β′ καὶ ἀντιστρόφως, ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖον Μ′ τοῦ τμήματος Α′Β′, εἶναι ἡ προβολὴ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε), ἑνὸς σημείου Μ τοῦ τμήματος ΑΒ.

Ἔστω Μ′ ἡ προβολὴ τυχόντος σημείου Μ τοῦ τμήματος ΑΒ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε). Αἱ εὐθεῖαι ΑΑ′, ΒΒ′ καὶ ΜΜ′ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (ε). Τὸ σημεῖον Μ, ὡς ἀνῆκον εἰς τὸ τμῆμα ΑΒ, εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς ζώνης τῶν παραλλήλων ΑΑ′ καὶ ΒΒ′. Ἄρα καὶ ἡ ΜΜ′ θὰ εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς ζώνης τῶν παραλλήλων ΑΑ′ καὶ ΒΒ′. Ἑπομένως ἡ ΜΜ′ θὰ τέμνῃ τὸ τμῆμα Α′Β′ εἰς σημεῖον Μ′, ἤτοι ἡ προβολὴ Μ′ τοῦ Μ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε) εἶναι σημεῖον τοῦ τμήματος Α′Β′.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται τὸ ἀντίστροφον, ἤτοι, ἐὰν Μ′ εἶναι σημεῖον τοῦ τμήματος Α′Β′, ἡ ἐξ αὐτοῦ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε), ὡς παράλληλος πρὸς τὰς ΑΑ′ καὶ ΒΒ′, θὰ τέμνῃ τὸ τμῆμα ΑΒ εἰς σημεῖον Μ. Ἄρα τὸ σημεῖον Μ′ εἶναι ἡ προβολὴ ἑνὸς σημείου Μ τοῦ τμήματος ΑΒ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α′.

477. Δείξατε ὅτι αἱ προβολαὶ δύο ἴσων καὶ παραλλήλων τμημάτων ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, εἶναι ἴσαι.

478. Ἐὰν Α′Β′ εἶναι ἡ προβολὴ τμήματος ΑΒ ἐπὶ εὐθεῖαν (ε), δείξατε ὅτι εἶναι ΑΒ $\geqq$ Α′Β′ $\geqq 0$. Πότε ἰσχύει τὸ πρῶτον ἴσον ; καὶ πότε τὸ δεύτερον ;

479. Δείξατε ὅτι τὸ μέσον ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος προβάλλεται εἰς τὸ μέσον τῆς προβολῆς του ἐπὶ τυχοῦσαν εὐθεῖαν.

480. Ἐὰν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ προβάλλεται ἐπὶ τρεῖς εὐθείας (ε_1), (ε_2), (ε_3) εἰς τὰ $Α_1Β_1$, $Α_2Β_2$, $Α_3Β_3$ ἀντιστοίχως, δείξατε ὅτι αἱ μεσοκάθετοι τῶν τμημάτων $Α_1Β_1$, $Α_2Β_2$ καὶ $Α_3Β_3$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Β′.

481. Ἐὰν τὰ μέσα Κ καὶ Λ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ, προβάλλωνται ἐπὶ εὐθεῖαν (ε) εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, δείξατε ὅτι ἡ προβολὴ τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἐπὶ τὴν (ε) εἶναι μηδενική.

482. Ἐὰν τὰ μέσα δύο διαδοχικῶν πλευρῶν τετραπλεύρου, προβάλλωνται ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, δείξατε ὅτι καὶ τὰ μέσα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου προβάλλονται εἰς ἓν σημεῖον. Ἐὰν τὰ μέσα δύο ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου προβάλλωνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, δείξατε ὅτι τὰ μέσα τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου προβάλλονται ἑκατέρωθεν τοῦ προηγουμένου σημείου εἰς ἴσας ἀποστάσεις.

483. Διὰ δοθέντος σημείου Σ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα (ε), ἐπὶ τὴν ὁποίαν αἱ προβολαὶ τῶν κορυφῶν δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ νὰ ὁρίζουν δύο ἴσα τμήματα.

484. Διὰ δοθέντος σημείου Σ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ὁποίαν αἱ προβολαὶ τῶν κορυφῶν τριγώνου ΑΒΓ νὰ ὁρίζουν δύο διαδοχικὰ τμήματα ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν νὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ ἄλλου.

ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΙΣ ΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

295. **Μετρικὴ σχέσις** γενικῶς εἰς τὴν γεωμετρίαν καλεῖται πᾶσα σχέσις συνδέουσα τὰ μέτρα εὐθυγράμμων τμημάτων, ὅταν ταῦτα μετρῶνται μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα μετρήσεως. Ἐπειδὴ ἡ μονὰς μετρήσεως εἶναι αὐθαίρετος, ἕπεται ὅτι πᾶσα μετρικὴ σχέσις εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς μονάδος μετρήσεως καὶ εἶναι καθαρῶς σχέσις λόγων.

Πᾶσα γεωμετρικὴ σχέσις εἶναι μετρικὴ σχέσις, ἤτοι σχέσις ἀληθεύουσα δι' οἱανδήποτε μονάδα μετρήσεως, εἶναι δὲ ὁμογενὴς ὡς πρὸς τὰ μήκη τὰ ὁποῖα περιέχει. Οὐδὲν γεωμετρικὸν θεώρημα καταλήγει εἰς μὴ ὁμογενῆ σχέσιν.

Ἐὰν α, β, γ εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα, ἡ σχέσις $2(\alpha)(\beta) = (\gamma)^2$ ἀναφερομένη εἰς τὰ μέτρα (α), (β), (γ) τῶν τμημάτων, εἶναι μετρικὴ σχέσις ὁμογενὴς δευτέρου βαθμοῦ καὶ διὰ τὴν ἁπλούστεσιν θὰ γράφεται $2\alpha\beta = \gamma^2$. Ἡ σχέσις $3\alpha^2 + \beta = \gamma^3$ δὲν εἶναι μετρικὴ σχέσις, διότι δὲν εἶναι ὁμογενής.

ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΙΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

296. Θεώρημα. Εἰς κάθε ὀρθογώνιον τρίγωνον ἑκάστη ἐκ τῶν καθέτων πλευρῶν του, εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῆς προβολῆς της ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

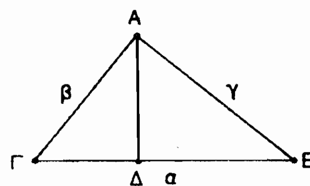
Ἀπόδειξις. Ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1^{L}$) μὲ πλευρὰς α, β, γ (σχ. 294). Φέρομεν ΑΔ ⊥ ΒΓ. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΑΓ εἶναι ὅμοια, διότι εἶναι ὀρθογώνια καὶ ἔχουν τὴν $\widehat{\Gamma}$ κοινήν.

Ἄρα :

$$\frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{\Delta\Gamma}{A\Gamma} \Longleftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\Delta\Gamma}{\beta} \Longleftrightarrow$$

(1) $\boldsymbol{\beta^2 = \alpha \cdot \Delta\Gamma}$,

ὅπου ΔΓ εἶναι ἡ προβολὴ τῆς πλευρᾶς β ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.



Σχ. 294

Ὁμοίως εἶναι $AB\Gamma \approx \Delta BA \Rightarrow \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\Delta B}{\gamma} \Longleftrightarrow$

(2) $\boldsymbol{\gamma^2 = \alpha \cdot \Delta B}$

Πόρισμα. Ὁ λόγος τῶν τετραγώνων τῶν δύο καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν προβολῶν αὐτῶν ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

Πράγματι, ἐὰν τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) τοῦ προηγουμένου θεωρήματος τὰς διαιρέσωμεν κατὰ μέλη, λαμβάνομεν :

$$\frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta B}.$$

297. Πυθαγόρειον Θεώρημα*. Εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο καθέτων πλευρῶν του, ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης.

Ἀπόδειξις. Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 294), ἀπὸ τὸ προηγούμενον θεώρημα ἔχομεν :

$$\beta^2 = \alpha \cdot \Delta\Gamma \quad \text{καὶ} \quad \gamma^2 = \alpha \cdot \Delta B.$$

(*) **Πυθαγόρας** (γεννηθεὶς εἰς Σάμον περὶ τὸ 580 π.Χ.), εἶναι ὁ πλέον ἔνδοξος ὀπαδὸς τοῦ Θαλοῦ. Ἐταξίδευσεν εἰς Αἴγυπτον καὶ Ἰνδίας καὶ κατόπιν ἀπεσύρθη εἰς Ἰταλίαν, ὅπου ἵδρυσε τὴν περίφημον Σχολήν του.

Διὰ προσθέσεως αὐτῶν κατὰ μέλη λαμβάνομεν : $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha(\Delta\Gamma + \Delta B)$. Ἀλλὰ $\Delta\Gamma + \Delta B = \Gamma B = \alpha$. Ἄρα ἡ προηγουμένη σχέσις γράφεται :

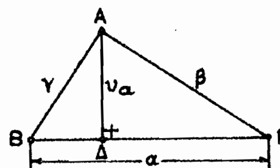
$$\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$$

298. Θεώρημα. Εἰς κάθε ὀρθογώνιον τρίγωνον, τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος, εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν δύο τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα τοῦτο διαιρεῖ τὴν ὑποτείνουσαν.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1^L$) καὶ $A\Delta = \upsilon_\alpha$ τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος (σχ. 295). Τὸ ὕψος διαιρεῖ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἰς δύο ὅμοια ὀρθογώνια τρίγωνα $\overset{\Delta}{\Delta A B} \approx \overset{\Delta}{\Delta \Gamma A}$, διότι ἕκαστον ἐξ αὐτῶν εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν :

$$\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{\Gamma\Delta}{A\Delta} \Longleftrightarrow A\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma \text{ ἢ}$$

$$\boldsymbol{\upsilon_\alpha^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma.}$$



Σχ. 295

299. Θεώρημα. Εἰς κάθε ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1^L$), ἰσχύει ἡ μετρικὴ σχέσις $\beta\gamma = \alpha\upsilon_\alpha$.

Ἀπόδειξις. Φέρομεν τὸ ὕψος $A\Delta = \upsilon_\alpha$ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι $\overset{\Delta}{BA\Delta} \approx \overset{\Delta}{B\Gamma A}$, διότι εἶναι ὀρθογώνια καὶ ἔχουν τὴν γωνίαν $\widehat{B}$ κοινήν.

$$\text{Ἄρα } \frac{AB}{A\Delta} = \frac{\Gamma B}{\Gamma A} \Longleftrightarrow \frac{\gamma}{\upsilon_\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} \Longleftrightarrow$$

$$\boldsymbol{\beta\gamma = \alpha\upsilon_\alpha}$$

300. Θεώρημα. Εἰς κάθε ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1^L$), ἰσχύει ἡ μετρικὴ σχέσις $\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{\upsilon^2_\alpha}$.

Ἀπόδειξις.

$$\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta^2\gamma^2} = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{(\beta\gamma)^2} =$$

$$= \frac{\alpha^2}{(\alpha\upsilon_\alpha)^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 \cdot \upsilon_\alpha^2} = \frac{1}{\upsilon_\alpha^2}$$

301. Ἀνακεφαλαίωσις τῶν μετρικῶν σχέσεων διὰ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα.

Ἐὰν ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ πλευρὰς α, β, γ καὶ $A\Delta = \upsilon_\alpha$ τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος του, ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

i) $\beta^2 = \alpha \cdot \Delta\Gamma$, $\gamma^2 = \alpha \cdot \Delta B$

ii) $\frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta B}$

iii) $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ καὶ ἐξ αὐτῆς αἱ :
$\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$ καὶ $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$

iv) $\upsilon_\alpha{}^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma$

v) $\beta\gamma = \alpha\upsilon_\alpha$

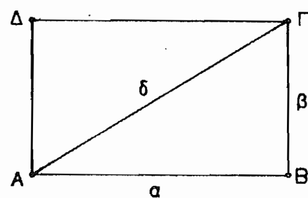
vi) $\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{\upsilon_\alpha{}^2}$

Σημείωσις. Πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου τὰ μέτρα τῶν πλευρῶν εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί, καλεῖται **πυθαγόρειον τρίγωνον.** Πυθαγόρειον τρίγωνον εἶναι π.χ. τὸ ἔχον μέτρα πλευρῶν 3,4,5, διότι $3^2 + 4^2 = 5^2 \Longleftrightarrow 9 + 16 = 25$.

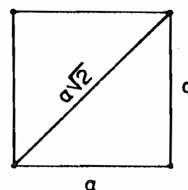
Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι παριστοῦν τὰ μέτρα τῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, καλοῦνται πυθαγόρειοι ἀριθμοί. Οἱ ἁπλούστεροι πυθαγόρειοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ 3, 4, 5.

Ὑπάρχουν ἄπειροι πυθαγόρειοι ἀριθμοὶ συνδεόμενοι διὰ τῆς σχέσεως $(\mu^2 - \nu^2)^2 + (2\mu\nu)^2 = (\mu^2 + \nu^2)^2$, ὅπου μ καὶ ν τυχόντες ἀκέραιοι ἀριθμοί. Ἐὰν π.χ. εἰς τὴν προηγουμένην σχέσιν θέσωμεν $\mu = 5$ καὶ $\nu = 2$, εὑρίσκομεν τοὺς πυθαγορείους ἀριθμοὺς $5^2 - 2^2 = 21$, $2 \cdot 5 \cdot 2 = 20$ καὶ $5^2 + 2^2 = 29$, δηλαδὴ τοὺς 21, 20, 29. Πράγματι εἶναι $21^2 + 20^2 = 29^2 \Longleftrightarrow 441 + 400 = 841$.

302. Διαγώνιος ὀρθογωνίου διαστάσεων α καὶ β. Ἔστω ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ μὲ διαστάσεις α καὶ β (σχ. 296). Φέρομεν τὴν διαγώνιον $A\Gamma = \delta$



Σχ. 296



Σχ. 297

καὶ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν : $A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 \Rightarrow \delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 \Rightarrow \boldsymbol{\delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$.

Πόρισμα. Ἡ διαγώνιος τετραγώνου πλευρᾶς α ἰσοῦται πρὸς $\alpha\sqrt{2}$ (σχ. 297).

303. Ὕψος ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς α. Ἔστω ΑΒΓ ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α (σχ. 298). Φέρομεν τὸ ὕψος $ΑΔ = υ$ αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ μέσον της

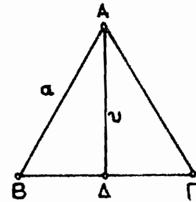
$\Rightarrow ΒΔ = \dfrac{α}{2}$.

Τότε, ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΔ λαμβάνομεν: $ΑΔ^2 = ΑΒ^2 - ΒΔ^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow υ^2 = α^2 - \left(\frac{α}{2}\right)^2 = α^2 - \frac{α^2}{4} =$$

$$= \frac{4α^2 - α^2}{4} = \frac{3α^2}{4}.$$ Ἄρα

$$υ = \frac{α\sqrt{3}}{2}$$



Σχ. 298

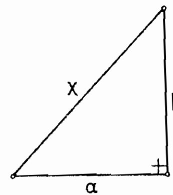
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ Τῌ ΒΟΗΘΕΙᾼ ΤΩΝ ΑΝΩΤΕΡΩ ΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ

304. i) Νὰ κατασκευασθῇ εὐθύγραμμον τμῆμα x, ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν $x = \sqrt{α^2 + β^2}$, ὅπου α καὶ β εἶναι δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα.

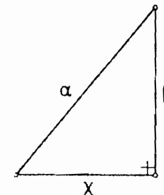
Ἡ δοθεῖσα σχέσις γράφεται $x^2 = α^2 + β^2$, ἐκ τῆς ὁποίας φαίνεται ὅτι τὸ x δύναται νὰ εἶναι ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου, μὲ καθέτους πλευρὰς τὰ τμήματα α καὶ β. Τὸ τρίγωνον κατασκευάζεται (σχ. 299).

ii) Νὰ κατασκευασθῇ εὐθύγραμμον τμῆμα x, ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν $x = \sqrt{α^2 - β^2}$, $α > β$.

Ἡ δοθεῖσα σχέσις γράφεται $x^2 = α^2 - β^2$, ἐκ τῆς ὁποίας φαίνεται ὅτι τὸ x δύναται νὰ εἶναι κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ ὑποτείνουσαν α καὶ τὴν ἄλλην κάθετον β. Τὸ τρίγωνον κατασκευάζεται (σχ. 300).



Σχ. 299



Σχ. 300

iii) Νὰ κατασκευασθῇ εὐθύγραμμον τμῆμα x, ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν $x = \sqrt{α^2 + β^2 + γ^2 + δ^2}$, ὅπου α, β, γ καὶ δ εἶναι δεδομένα εὐθύγραμμα τμήματα.

Ἡ δοθεῖσα σχέσις γράφεται

$$x^2 = α^2 + β^2 + γ^2 + δ^2.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα $α^2 + β^2$ δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ $ΑΓ^2$ (σχ. 301), ὅπου ΑΓ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ καθέ-

τους πλευρὰς τὰς α καὶ β. Ἐν συνεχείᾳ δὲ κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2 + γ^2$ μὲ τὸ $ΑΔ^2$ καὶ ἀκολούθως τὸ $ΑΔ^2 + δ^2$ μὲ τὸ $ΑΕ^2$. Ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται τότε ὅτι εἶναι

$$x^2 = ΑΕ^2 = ΑΔ^2 + δ^2 = ΑΓ^2 + γ^2 + δ^2 = α^2 + β^2 + γ^2 + δ^2.$$

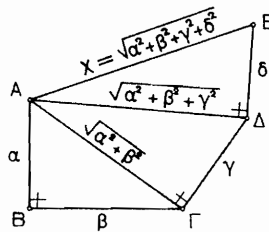
Σημείωσις. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τμῆμα x ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν $x = \sqrt{α^2 + β^2 + \ldots + ε^2 + ζ^2}$, ὅταν δίδεται πεπερασμένον πλῆθος εὐθυγράμμων τμημάτων α, β,..., ε, ζ.

iv) Νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα x, ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν $x = \sqrt{α^2 - β^2 + γ^2 - δ^2}$ ὅπου α, β, γ καὶ δ δοθέντα τμήματα, τοιαῦτα ὥστε $α^2 - β^2 + γ^2 - δ^2 > 0$.

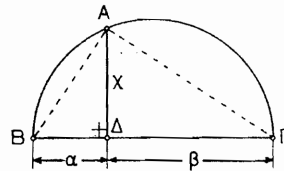
Ἡ δοθεῖσα σχέσις δύναται νὰ γραφῇ

$$x^2 = α^2 + γ^2 - (β^2 + δ^2) \quad ἢ \quad x^2 = λ^2 - μ^2,$$

ὅπου τὰ εὐθύγραμμα τμήματα λ καὶ μ ἱκανοποιοῦν τὰς σχέσις $λ^2 = α^2 + γ^2$



Σχ. 301



Σχ. 302

καὶ $μ^2 = β^2 + δ^2$ καὶ κατασκευάζονται ὡς εἰς τὴν περίπτωσιν (i). Τότε πλέον δύναται νὰ κατασκευασθῇ καὶ τὸ x ὅπως εἰς τὴν περίπτωσιν (ii).

v) Κατασκευὴ μέσης ἀναλόγου.

Νὰ κατασκευασθῇ εὐθύγραμμον τμῆμα x, ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν $x^2 = αβ$, ὅπου α καὶ β δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα.

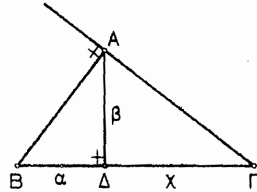
Παρατηροῦμεν ὅτι (§ 298) τὸ x δύναται νὰ εἶναι τὸ ἐκ τῆς ὀρθῆς γωνίας ὕψος τριγώνου, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὴν ὑποτείνουσαν εἰς δύο τμήματα μὲ μήκη α καὶ β. Διὰ τὴν κατασκευὴν λαμβάνομεν ἐπ' εὐθείας διαδοχικὰ τμήματα $ΒΔ = α$ καὶ $ΔΓ = β$ (σχ. 302) καὶ μὲ διάμετρον τὴν ΒΓ, γράφομεν ἡμικύκλιον. Ἐκ τοῦ Δ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ Α. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι προφανῶς ὀρθογώνιον ($\widehat{Α} = 1^{L}$). Ἑπομένως τὸ ζητούμενον τμῆμα εἶναι τὸ $x = ΑΔ$, τὸ ὁποῖον ἱκανοποιεῖ τὴν σχέσιν $x^2 = αβ$.

vi) Νὰ κατασκευασθῇ εὐθύγραμμον τμῆμα x, ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν $αx = β^2$, ὅπου α καὶ β δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα.

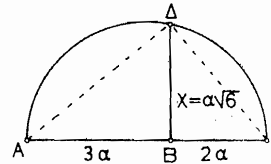
Ἂν β εἶναι τὸ ἐκ τῆς ὀρθῆς γωνίας ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ α τὸ

ἓν ἐκ τῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα τοῦτο διαιρεῖ τὴν ὑποτείνουσαν (σχ. 303), τότε τὸ x θὰ εἶναι τὸ ἕτερον.

Κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΔ ($\widehat{\Delta} = 1^{L}$) μὲ καθέτους πλευρὰς τὰς α καὶ β. Ἐκ τῆς κορυφῆς Α φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΔ εἰς τὸ σημεῖον Γ. Τὸ τμῆμα ΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον, ἤτοι ΓΔ $= x$, διότι κατὰ τὴν § 298 ἱκανοποιεῖ τὴν δοθεῖσαν σχέσιν $\alpha \cdot \Gamma\Delta = \beta^2$.



Σχ. 303



Σχ. 304

vii) Νὰ κατασκευασθῇ εὐθύγραμμον τμῆμα x, ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν $x = \alpha\sqrt{6}$, ὅπου α δοθὲν τμῆμα.

Ἡ δοθεῖσα σχέσις γράφεται $x^2 = 6\alpha^2$ ἢ $x^2 = 3\alpha \cdot 2\alpha$. Ἡ κατασκευὴ εἶναι ὁμοία μὲ τὴν τῆς περιπτώσεως (v) καὶ φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 304.

305. Πρόβλημα. Νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα x τοιοῦτον, ὥστε :

$$\frac{x^2}{\alpha^2} = \frac{\mu}{\nu}$$

ὅπου α δοθὲν τμῆμα καὶ $\frac{\mu}{\nu}$ δεδομένος ἀριθμητικὸς λόγος.

Κατασκευή. Μὲ διάμετρον ΒΓ $= \mathrm{B\Delta} + \Delta\Gamma = \mu + \nu$ γράφομεν ἡμικύκλιον καὶ ἐκ τοῦ Δ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ Α. Ἐπὶ τῆς ΑΓ λαμβάνομεν τμῆμα ΑΗ $= \alpha$ καὶ φέρομεν τὴν ΗΖΕ//ΓΔΒ (σχ. 305). Τὸ τμῆμα ΑΕ $= x$ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀπόδειξις. Γνωρίζομεν ὅτι (§ 296, πορ.) :

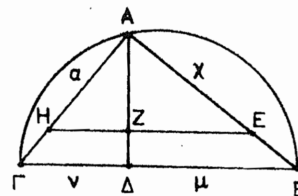
(1) $$\frac{\mathrm{AE}^2}{\mathrm{AH}^2} = \frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{ZH}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{x^2}{\alpha^2} = \frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{ZH}}$$

Ἀλλά, κατὰ τὸ θεώρημα τῆς δέσμης, εἶναι :

(2) $$\frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{ZH}} = \frac{\mathrm{B\Delta}}{\Delta\Gamma} = \frac{\mu}{\nu}$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται :

$$\frac{x^2}{\alpha^2} = \frac{\mu}{\nu}.$$



Σχ. 305

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

485. 'Ορθογωνίου τριγώνου αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ εἶναι 15m καὶ 20m. Νὰ εὑρεθοῦν ἡ ὑποτείνουσα, αἱ προβολαὶ τῶν καθέτων πλευρῶν ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν καὶ τὸ ὕψος, ποὺ ἄγεται ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

486. 'Ορθογωνίου τριγώνου αἱ προβολαὶ τῶν καθέτων πλευρῶν του ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν εἶναι 2m καὶ 8m. Νὰ εὑρεθοῦν τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος καὶ αἱ κάθετοι πλευραὶ τοῦ τριγώνου.

487. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 84m καὶ ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 37m.

488. Δείξατε ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν αὐτῶν ἐπὶ τὴν τρίτην πλευράν.

489. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1^{L}$) φέρομεν ἐκ τοῦ μέσου Δ τῆς ΑΒ κάθετον ΔΕ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν. Δείξατε ὅτι $EΓ^2 - EB^2 = AΓ^2$.

490. Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αἱ διαγώνιοι εἶναι κάθετοι. Δείξατε ὅτι $AB^2 + ΓΔ^2 = BΓ^2 + AΔ^2$.

491. Δίδεται γωνία $x\widehat{O}y = 45^0$ καὶ σημεῖον Μ ἐσωτερικὸν αὐτῆς. 'Εκ τοῦ Μ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν Οx, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Οx εἰς τὸ Α καὶ τὴν Οy εἰς τὸ Β. Δείξατε ὅτι $AB^2 + AM^2 = OM^2$.

492. Δίδεται ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ καὶ σημεῖον Ε ἐσωτερικὸν αὐτοῦ. 'Εὰν συνδέσωμεν τὸ Ε μὲ τὰς κορυφὰς τοῦ ὀρθογωνίου, δείξατε ὅτι εἶναι

$$EA^2 + EΓ^2 = EB^2 + EΔ^2$$

493. Νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα x ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν $x^2 = α^2 + β^2 + γ^2$, ὅπου α, β, γ εἶναι δεδομένα τμήματα.

494. Νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα $x = α\sqrt{30}$, ἔνθα α δεδομένον τμῆμα.

495. Δίδεται τεταρτοκύκλιον ΑΟΒ. 'Απὸ τυχὸν σημεῖον Γ τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ φέρομεν $ΓE \perp OA$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν διχοτόμον τῆς ὀρθῆς γωνίας $A\widehat{O}B$ εἰς τὸ Δ. Δείξατε ὅτι εἶναι $ΓE^2 + ΔE^2 = OA^2$.

496. Νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα $x = α\sqrt{3} + β\sqrt{5}$ ἔνθα καὶ β α δεδομένα τμήματα.

Β΄.

497. Δείξατε ὅτι ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη δύο κύκλων ἐφαπτομένων ἐξωτερικῶς εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο διαμέτρων αὐτῶν.

498. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς κοινῆς ἐξωτερικῆς ὡς καὶ τῆς κοινῆς ἐσωτερικῆς ἐφαπτομένης δύο κύκλων ἀκτίνων α καὶ 4α, ἐὰν ἡ διάκεντρος αὐτῶν εἶναι 6α.

499. Νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα $x = \sqrt{α^2 - βγ}$, ἔνθα α, β, γ δεδομένα τμήματα.

500. Νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα $x = \sqrt{α^2 + β^2 - γδ}$, ἔνθα α, β, γ, δ δεδομένα τμήματα.

501. Δίδεται τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α. 'Επὶ τῶν πλευρῶν του καὶ ἐκτὸς τοῦ τετραγώνου κατασκευάζομεν τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΖ, ΓΔΗ, ΔΑΘ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι τετράγωνον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρά του.

502. Νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα $x = \sqrt{αβ} - \sqrt{γδ}$ ἔνθα α, β, γ, δ δεδομένα τμήματα.

503. Δίδονται δύο εὐθεῖαι $(ε_1)$, $(ε_2)$ τεμνόμεναι καθέτως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος

τῶν σημείων Μ, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς (ε_1) καὶ (ε_2) παραμένει σταθερόν.

504. Νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα $x = \sqrt{\alpha^2 + 2\beta^2 + 3\gamma^2}$ ἔνθα α, β, γ δοθέντα τμήματα.

505. Δίδεται κύκλος (Ο, R) καὶ δύο χορδαὶ αὐτοῦ, τεμνόμεναι καθέτως εἰς τὸ σημεῖον Μ. Ἐὰν α, β, γ, δ εἶναι τὰ τμήματα, εἰς τὰ ὁποῖα αὗται διαιροῦνται ὑπὸ τοῦ Μ, δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$ εἶναι σταθερόν.

506. Δίδεται κύκλος (Ο,R) καὶ σημεῖον Σ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ. Διὰ τοῦ Σ φέρομεν δύο χορδὰς ΑΣΒ καὶ ΓΣΔ, τεμνομένας καθέτως. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα $AB^2 + \Gamma\Delta^2$ εἶναι σταθερόν.

507. Νὰ κατασκευασθοῦν δύο εὐθύγραμμα τμήματα x καὶ y, τὰ ὁποῖα ἱκανοποιοῦν τὰς συνθήκας $x^2 + y^2 = \alpha^2$ καὶ $xy = \beta^2$, ὅπου τὰ α καὶ β εἶναι δεδομένα εὐθύγραμμα τμήματα.

ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΙΣ ΤΥΧΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΝ

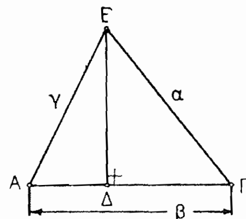
306. Θεώρημα. Εἰς πᾶν τρίγωνον, τὸ τετράγωνον πλευρᾶς, κειμένης ἀπέναντι ὀξείας γωνίας, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, ἠλαττωμένον κατὰ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς ἄλλης ἐπὶ ταύτην.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $\widehat{A} < 90^0$ (σχ. 306). Φέρομεν τὴν $B\Delta \perp A\Gamma$ καὶ θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι

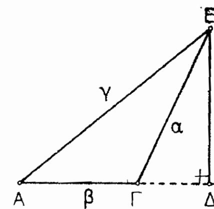
$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta.$$

Θὰ διακρίνωμεν δύο περιπτώσεις, ἤτοι :

i) Τὸ σημεῖον Δ κεῖται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ. Τοῦτο συμβαίνει, ὅταν εἶναι $\widehat{\Gamma} < 90^0$ καὶ



Σχ. 306



Σχ. 307

ii) Τὸ σημεῖον Δ κεῖται εἰς τὴν προέκτασιν τῆς ΑΓ (σχ. 307). Τοῦτο συμβαίνει, ὅταν εἶναι $\widehat{\Gamma} > 90^0$.

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΓΔ λαμβάνομεν :

(1) $$\alpha^2 = \Gamma\Delta^2 + \Delta B^2$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν (i) εἶναι $\Gamma\Delta = \beta - A\Delta$, ἐνῷ εἰς τὴν περίπτωσιν (ii) εἶναι $\Gamma\Delta = A\Delta - \beta$. Καὶ εἰς τὰς δύο ὅμως περιπτώσεις εἶναι :

$$\Gamma\Delta^2 = (\beta - A\Delta)^2 = (A\Delta - \beta)^2 = \beta^2 + A\Delta^2 - 2\beta \cdot A\Delta.$$

Τότε ἡ σχέσις (1) γράφεται :

(2) $$\alpha^2 = \beta^2 + A\Delta^2 - 2\beta \cdot A\Delta + \Delta B^2$$

᾿Αλλὰ ἐπειδὴ $A\Delta^2 + \Delta B^2 = \gamma^2$, ἡ (2) γράφεται :

$$\boldsymbol{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta}$$

307. Θεώρημα. Εἰς πᾶν ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς, τῆς κειμένης ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, ηὐξημένον κατὰ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς ἄλλης ἐπὶ ταύτην.

᾿Απόδειξις. Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ μὲ $\widehat{A} > 90^0$ (σχ. 308). Φέρομεν τὴν $B\Delta \perp A\Gamma$ καὶ θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta.$$

᾿Απὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΓΔ λαμβάνομεν

(1) $$\alpha^2 = \Gamma\Delta^2 + \Delta B^2$$

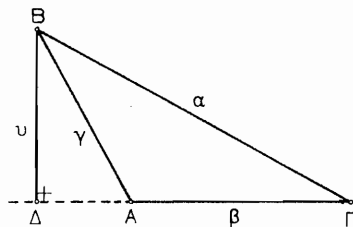
᾿Αλλὰ $\Gamma\Delta = \beta + A\Delta \Rightarrow \Gamma\Delta^2 = (\beta + A\Delta)^2 = \beta^2 + 2\beta \cdot A\Delta + A\Delta^2$.

Τότε ἡ σχέσις (1) γράφεται :

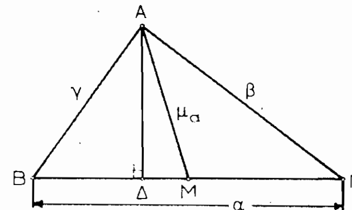
(2) $$\alpha^2 = \beta^2 + 2\beta \cdot A\Delta + A\Delta^2 + \Delta B^2$$

καὶ ἐπειδὴ $A\Delta^2 + \Delta B^2 = \gamma^2$, ἡ (2) γράφεται :

$$\boldsymbol{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta}$$



Σχ. 308



Σχ. 309

308. Πρῶτον θεώρημα τῆς διαμέσου. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύει ἡ σχέσις

$$\boldsymbol{\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu^2_\alpha + \frac{\alpha^2}{2}}$$

ὅπου μ_α ἡ ἐκ τοῦ Α διάμεσος.

᾿Απόδειξις. Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 309) καὶ ΑΔ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Διὰ τῆς διαμέσου ΑΜ τὸ τρίγωνον χωρίζεται εἰς δύο ἄλλα τρίγωνα ΑΜΒ καὶ ΑΜΓ. Ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι $\widehat{AM\Gamma} > 90^0$. Τότε θὰ εἶναι $\widehat{AMB} < 90^0$ καὶ ἐκ τῶν δύο προηγουμένων θεωρημάτων θὰ ἔχωμεν :

(1) $$\beta^2 = \mu_\alpha{}^2 + M\Gamma^2 + 2M\Gamma \cdot M\Delta$$

(2) $$\gamma^2 = \mu_\alpha{}^2 + MB^2 - 2MB \cdot M\Delta.$$

Διὰ προσθέσεως αὐτῶν κατὰ μέλη καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι εἶναι $MB = M\Gamma = \frac{\alpha}{2}$, ἔχομεν :

$$(3) \qquad \beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + 2MB^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$$

Σημείωσις. Εἰς πολλὰς περιπτώσεις χρησιμοποιοῦμεν καὶ τὴν μορφὴν (3).

Παρατήρησις i) Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω τύπου τοῦ θεωρήματος τῆς διαμέσου, διὰ κυκλικῆς ἐναλλαγῆς τῶν γραμμάτων α, β καὶ γ, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀντιστοίχως τοὺς τύπους :

$$\gamma^2 + \alpha^2 = 2\mu_\beta^2 + \frac{\beta^2}{2} \quad \text{καὶ} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 2\mu_\gamma^2 + \frac{\gamma^2}{2}$$

Παρατήρησις ii) Ἐκ τῶν τριῶν ἀνωτέρω τύπων λαμβάνομεν τοὺς τύπους :

$$4\mu_\alpha^2 = 2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2, \quad 4\mu_\beta^2 = 2\gamma^2 + 2\alpha^2 - \beta^2,$$
$$4\mu_\gamma^2 = 2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2$$

ἐκ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ μήκη τῶν διαμέσων τριγώνου, ὅταν γνωρίζωμεν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του.

309. Δεύτερον θεώρημα τῆς διαμέσου. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot M\Delta$$

(ὑποτιθεμένου ὅτι $\beta \geqq \gamma$), ὅπου Μ τὸ μέσον τῆς ΒΓ καὶ Δ ἡ προβολὴ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ μὲ $\beta \geqq \gamma$ (σχ. 309) Τότε θὰ εἶναι (§ 307 καὶ § 306) :

$$\beta^2 = \mu_\alpha^2 + M\Gamma^2 + 2M\Gamma \cdot M\Delta$$
$$\gamma^2 = \mu_\alpha^2 + MB^2 - 2MB \cdot M\Delta$$

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ταύτας κατὰ μέλη, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι $MB = M\Gamma = \frac{\alpha}{2}$, ἔχομεν : $\beta^2 - \gamma^2 = 4MB \cdot M\Delta = 4\frac{\alpha}{2} \cdot M\Delta$ ἢ

$$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot M\Delta$$

310. Βασικὸν κριτήριον διὰ τὸ εἶδος γωνίας τριγώνου. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα θεωρήματα καὶ ἀπὸ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα ἕπεται ὅτι εἰς τρίγωνον ΑΒΓ

$$\text{i) Ἂν } \widehat{A} < 1^L \iff \alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$$
$$\text{ii) Ἂν } \widehat{A} = 1^L \iff \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$
$$\text{iii) Ἂν } \widehat{A} > 1^L \iff \alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2.$$

Τὰ ἀντίστροφα ἀποδεικνύονται διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς, ἤτοι: Ἂν $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, ἀποκλείονται τὰ ἐνδεχόμενα $\widehat{A} = 1^L$ ἢ $\widehat{A} > 1^L$, διότι ἐξ αὐτῶν ἕπεται $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ ἢ $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ ἀντιστοίχως. Ἄρα θὰ εἶναι $\widehat{A} < 1^L$. Ὁμοίως καὶ διὰ τὰς (ii) καὶ (iii).

Εὐνόητον εἶναι ὅτι εἰς τρίγωνον μὲ γνωστὰς πλευρὰς τὸ κριτήριον ἐφαρμόζεται μόνον διὰ τὴν μεγαλυτέραν πλευράν, διότι, ἂν τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον ἢ ἀμβλυγώνιον, αὐτὸ θὰ συμβαίνῃ εἰς τὴν γωνίαν ἔναντι τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

508. Δείξατε ὅτι εἰς πᾶν τραπέζιον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων του ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του σὺν τῷ διπλασίῳ γινομένῳ τῶν δύο βάσεων.

509. Εἰς ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) φέρομεν παράλληλον τῆς ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι $ΒΕ^2 = ΕΓ^2 + ΒΓ \cdot ΔΕ$.

510. Εἰς ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) συνδέομεν τὴν κορυφὴν Α μὲ τυχὸν σημεῖον Δ τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Δείξατε ὅτι $ΑΒ^2 = ΑΔ^2 + ΔΒ \cdot ΔΓ$.

511. Τρίγωνον ἔχει πλευρὰς α, β, γ καὶ γωνίαν $\widehat{A} = 120^0$. Δείξατε ὅτι εἶναι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma$.

512. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων πλευρῶν παραλληλογράμμου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων του.

513. Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αἱ διαγώνιοι τέμνονται καθέτως. Δείξατε ὅτι $|ΑΒ^2 - ΑΔ^2| = |ΓΒ^2 = ΓΔ^2|$.

514. Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἶδος τῶν γωνιῶν τριγώνου ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰς

i) $\alpha = 3\lambda,\ \beta = 4\lambda,\ \gamma = 6\lambda$

ii) $\alpha = \lambda,\ \beta = \frac{\lambda}{2},\ \gamma = \frac{2\lambda}{3}$

iii) $\alpha = 8\lambda,\ \beta = 15\lambda,\ \gamma = 17\lambda$

iv) $\alpha = 7\lambda,\ \beta = 6\lambda,\ \gamma = 8\lambda$.

Β'.

515. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαμέσων ἑνὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὰ 3/4 τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν του.

516. Ἐὰν Μ εἶναι τὸ κέντρον βάρους τριγώνου ΑΒΓ, δείξατε ὅτι:

$$ΜΑ^2 + ΜΒ^2 + ΜΓ^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{3}.$$

517. Μὲ πλευρὰν ΑΒ = γ κατασκευάζομεν δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΒΕ ἑκατέρωθεν αὐτῆς. Ἐὰν Γ εἶναι τυχὸν σημεῖον, δείξατε ὅτι $ΓΔ^2 + ΓΕ^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, ἔνθα α, β, γ εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

518. Δίδεται κύκλος, διάμετρος ΑΒ αὐτοῦ καὶ χορδὴ ΓΔ παράλληλος τῆς ΑΒ. Ἐὰν Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς διαμέτρου ΑΒ, δείξατε ὅτι εἶναι $ΜΓ^2 + ΜΔ^2 = ΜΑ^2 + ΜΒ^2$.

519. Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α. Ἐὰν Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου, δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα $MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2$ εἶναι σταθερόν.

520. Διαιροῦμεν τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ = α ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ εἰς τρία ἴσα τμήματα ΒΔ = ΔΕ = ΕΓ καὶ φέρομεν τὰς ΑΔ καὶ ΑΕ. Δείξατε ὅτι εἶναι $A\Delta^2 + AE^2 + \Delta E^2 = \frac{2\alpha^2}{3}$.

521. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει ἡ σχέσις $MA^2 + MB^2 = k^2$, ἔνθα Α, Β εἶναι σταθερὰ σημεῖα καὶ k δεδομένον τμῆμα.

522. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν κυρτὸν τετράπλευρον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων πλευρῶν του ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων του, ηὐξημένον κατὰ τὸ τετραπλάσιον τετράγωνον τοῦ τμήματος μὲ ἄκρα τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του.

523. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται ἡ πλευρὰ α, τὸ ὕψος υ_α καὶ τὸ ἄθροισμα $\beta^2 + \gamma^2 = k^2$, ἔνθα k δεδομένον τμῆμα.

524. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α, υ_β καὶ $\beta^2 + \gamma^2 = k^2$, ἔνθα k δεδομένον τμῆμα.

525. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει $MA^2 - MB^2 = k^2$, ἔνθα Α, Β εἶναι σταθερὰ σημεῖα καὶ k δεδομένον τμῆμα.

526. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α, υ_α καὶ $\beta^2 - \gamma^2 = k^2$, ἔνθα k δεδομένον τμῆμα.

527. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α, μ_α καὶ $\beta^2 - \gamma^2 = k^2$, ἔνια k δεδομένον τμῆμα.

ΕΜΒΑΔΑ ΚΛΕΙΣΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

311. Ὁρισμός. Μία θεμελιώδης ἔννοια, ἡ ὁποία συνδέεται ἄμεσα μὲ οἱονδήποτε κλειστὸν ἐπίπεδον σχῆμα, εἶναι ἡ ἔννοια τῆς ἐκτάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου του. Ἡ ἔκτασις ἀκριβῶς αὕτη καλεῖται **ἐμβαδὸν** τοῦ σχήματος.

312. Ἰσεμβαδικὰ ἢ ἰσοδύναμα καλοῦνται δύο σχήματα, ὅταν ἔχουν ἴσα ἐμβαδά.

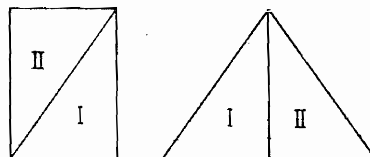
Ἡ σχέσις τῆς ἰσότητος τῶν ἐμβαδῶν τῶν σχημάτων εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας, ἤτοι εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική.

Διὰ τὸν συμβολισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς πολυγώνου ΑΒΓ...Ν, δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸ σύμβολον (ΑΒΓ...Ν) ἢ ἁπλῶς Ε, ὅταν εἶναι γνωστὸν ποῦ ἀναφέρεται αὐτό.

313. Ἀξιώματα διὰ τὰ ἐμβαδὰ τῶν σχημάτων.

i) Δύο ἴσα σχήματα εἶναι ἰσεμβαδικά.

ii) Ἐὰν δύο σχήματα ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἴσα ἢ ἰσεμβαδικὰ τμήματα ἓν πρὸς ἕν, τότε εἶναι ἰσεμβαδικὰ (σχ. 310).



Σχ. 310

iii) Ἂν εἰς ἰσεμβαδικὰ σχήματα προσθέσωμεν ἰσεμβαδικὰ σχήματα, προκύπτουν ἰσεμβαδικὰ σχήματα.

ΕΜΒΑΔΟΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ

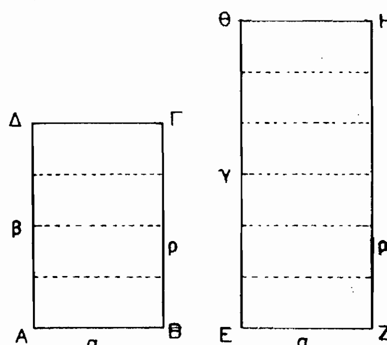
314. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὀρθογωνίων, μὲ μίαν τῶν διαστάσεών των ἴσην, ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἄλλων διαστάσεών των.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν δύο ὀρθογώνια ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ μὲ διαστάσεις ΑΒ $=\alpha$, ΑΔ $=\beta$ καὶ ΕΖ $=\alpha$, ΕΘ $=\gamma$ (σχ. 311). Ἐὰν συμβολίσωμεν μὲ $E(\alpha,\beta)$ καὶ $E(\alpha,\gamma)$ τὰ ἐμβαδά των ἀντιστοίχως, θὰ δείξωμεν ὅτι $\dfrac{E(\alpha,\beta)}{E(\alpha,\gamma)}=\dfrac{\beta}{\gamma}$.

Ἔστω ὅτι ὁ λόγος τῶν διαστάσεων β καὶ γ ἰσοῦται πρὸς ἀριθμητικόν τι κλάσμα μ/ν, ἤτοι

$$(1) \qquad \frac{\beta}{\gamma}=\frac{\mu}{\nu}.$$

Ἐξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὴν πλευρὰν ΑΔ $=\beta$ εἰς μ τὸ πλῆθος ἴσα πρὸς ρ τμήματα, ἤτοι $\beta=\mu\rho$ καὶ τὴν πλευρὰν ΕΘ $=\gamma$ νὰ τὴν διαιρέσωμεν εἰς ν τὸ πλῆθος ἴσα πρὸς ρ τμήματα, ἤτοι $\gamma=\nu\rho$ καὶ τότε θὰ εἶναι πράγματι $\dfrac{\beta}{\gamma}=\dfrac{\mu\rho}{\nu\rho}=\dfrac{\mu}{\nu}$. Ἀπὸ τὰ διαιρετικὰ σημεῖα ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΔ καὶ ΕΘ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς βάσεις ΑΒ καὶ ΕΖ ἀντιστοίχως τῶν ὀρθογωνίων. Τότε τὰ δύο ὀρθογώνια διαιροῦνται εἰς μ καὶ ν ἀντιστοίχως στοιχειώδη ἴσα ὀρθογώνια, μὲ διαστάσεις (α,ρ) ἕκαστον, καὶ ἔστω $E(\alpha,\rho)$ τὸ στοιχειῶδες ἐμβαδὸν ἑκάστου ἐξ αὐτῶν. Προφανῶς θὰ ἔχωμεν διὰ τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἀρχικῶν ὀρθογωνίων :



Σχ. 311

$$E(\alpha,\beta)=\mu\cdot E(\alpha,\rho) \text{ καὶ } E(\alpha,\gamma)=\nu\cdot E(\alpha,\rho)\Rightarrow\frac{E(\alpha,\beta)}{E(\alpha,\gamma)}=\frac{\mu\cdot E(\alpha,\rho)}{\nu\cdot E(\alpha,\rho)}=\frac{\mu}{\nu}$$

καί, λόγῳ τῆς σχέσεως (1), ἡ τελευταία γράφεται

$$\frac{E(\alpha,\beta)}{E(\alpha,\gamma)}=\frac{\beta}{\gamma}.$$

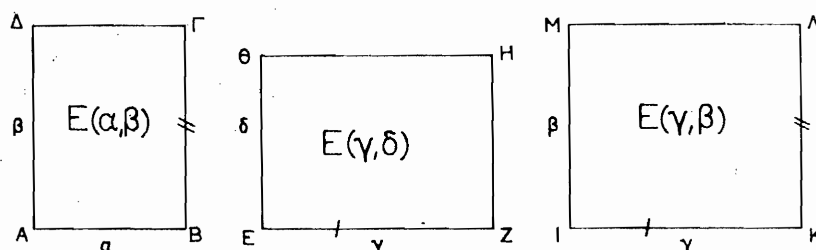
Σημείωσις. Τὸ θεώρημα δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ ὅταν τὰ τμήματα ΑΔ καὶ ΕΘ εἶναι ἀσύμμετρα. Ἡ ἀπόδειξις παραλείπεται, ὡς ἐκφεύγουσα τῶν πλαισίων τοῦ βιβλίου.

315. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὀρθογωνίων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν διαστάσεων αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἂς θεωρήσωμεν δύο ὀρθογώνια ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ μὲ διαστάσεις (α,β) καὶ (γ,δ) ἀντιστοίχως (σχ. 312).

Ἐὰν συμβολίσωμεν μὲ Ε(α,β) καὶ Ε(γ,δ) τὰ ἐμβαδά των, θὰ δείξωμεν ὅτι $\frac{E(\alpha,\beta)}{E(\gamma,\delta)} = \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}$.

Κατασκευάζομεν βοηθητικὸν ὀρθογώνιον ΙΚΛΜ, λαμβάνοντες ὡς διαστάσεις του ἀνὰ μίαν ἐξ ἑκάστου τῶν δύο πρώτων, ἤτοι μὲ διαστάσεις β καὶ γ.



Σχ. 312

Ἑπομένως μὲ Ε(γ,β) θὰ συμβολίσωμεν τὸ ἐμβαδόν του. Τότε, ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, ἕπεται ὅτι :

$$\frac{E(\alpha,\beta)}{E(\gamma,\beta)} = \frac{\alpha}{\gamma} \quad \text{καὶ} \quad \frac{E(\gamma,\beta)}{E(\gamma,\delta)} = \frac{\beta}{\delta}.$$

Πολλαπλασιάζομεν αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ λαμβάνομεν :

$$\frac{E(\alpha,\beta)}{E(\gamma,\beta)} \cdot \frac{E(\gamma,\beta)}{E(\gamma,\delta)} = \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{\beta}{\delta} \Longleftrightarrow \frac{E(\alpha,\beta)}{E(\gamma,\delta)} = \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}.$$

316. Μονάδες μετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν. Ἡ θεωρία καὶ ἡ πρᾶξις ἀπέδειξαν ὅτι αἱ πλέον κατάλληλοι καὶ αἱ πλέον εὔχρηστοι μονάδες μετρήσεως τῶν ἐμβαδῶν εἶναι αἱ τετραγωνικαὶ μονάδες, ἤτοι τὰ ἐμβαδὰ τετραγώνων, τῶν ὁποίων ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν μονάδα μετρήσεως τῶν μηκῶν. Κατ' ἀναλογίαν τῶν μονάδων μετρήσεως τῶν μηκῶν, θὰ ἔχωμεν ὡς βασικὴν μονάδα μετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν τὸ τετραγωνικὸν μέτρον ($1m^2$) καὶ ἐξ αὐτοῦ τὰ πολλαπλάσια καὶ ὑποπολλάσιά του.

317. Θεώρημα. Τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν διαστάσεών του.

Ἀπόδειξις. Λαμβάνομεν ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν ἐμβαδῶν τετράγωνον πλευρᾶς 1. Τότε θὰ εἶναι $E(1,1) = 1$ τετραγωνικὴ μονάς. Κατὰ τὸ θεώρημα 315 θὰ εἶναι :

$$\frac{E(\alpha,\beta)}{E(1,1)} = \frac{\alpha\beta}{1 \cdot 1} = \alpha\beta.$$

Ἄρα : $E(\alpha,\beta) = \alpha\beta \cdot E(1,1)$ ἢ $E(\alpha,\beta) = \alpha\beta$ τετραγωνικαὶ μονάδες, ὅπου $E(\alpha,\beta)$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου μὲ διαστάσεις α καὶ β καὶ $E(1,1)$ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τετραγωνικῆς μονάδος.

Γενικῶς διὰ τὸ ἐμβαδὸν Ε ὀρθογωνίου διαστάσεων α καὶ β, ἔχομεν τὸν τύπον :

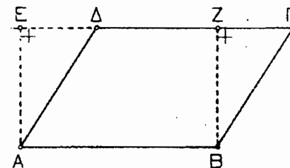
$$\mathbf{E = \alpha\beta}$$

Πόρισμα. Τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου πλευρᾶς α, ἰσοῦται πρὸς α^2.

Παρατήρησις : Ἀπὸ τὸν προηγούμενον τύπον $E = \alpha\beta$ τοῦ ἐμβαδοῦ ὀρθογωνίου, ἕπεται ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ἐμβαδοῦ εἰς τετραγωνικὰς μονάδας ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν τμημάτων α καὶ β, ὅταν αὐτὰ μετρηθοῦν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα μετρήσεως.

318. Ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου. Θεώρημα. Τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον ἐπ' αὐτὴν ὕψος.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 313). Φέρομεν τὰς $AE \perp \Gamma\Delta$ καὶ $BZ \perp \Gamma\Delta$. Τότε εἶναι τριγ. ΑΕΔ = τριγ. ΒΖΓ, διότι εἶναι ὀρθογώνια, ἔχουν τὰς $A\Delta = B\Gamma$, ὡς ἀπέναντι πλευρὰς παραλληλογράμμου καὶ τὰς $AE = BZ$, ὡς παράλληλα τμήματα μεταξὺ παραλλήλων. Ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ἐμβαδὰ ἴσα, ἤτοι



Σχ. 313

$$(AE\Delta) = (BZ\Gamma).$$

Τότε θὰ εἶναι :

$$(AB\Gamma\Delta) = (ABZ\Delta) + (BZ\Gamma) = (ABZ\Delta) + (AE\Delta) = (ABZE).$$

Ἀλλὰ τὸ ΑΒΖΕ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἑπομένως εἶναι $(ABZE) = AB \cdot AE$. Τότε ἡ τελευταία σχέσις γράφεται :

$$(AB\Gamma\Delta) = AB \, . \, AE$$

Θέτομεν $(AB\Gamma\Delta) = E$, $AB = \beta$, $AE = \upsilon$ καὶ λαμβάνομεν τὸν τύπον

$$\mathbf{E = \beta\upsilon}$$

ἤτοι τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ἐπ' αὐτὴν ὕψος.

Πόρισμα Ι. Δύο παραλληλόγραμμα μὲ ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἰσεμβαδικά.

Πόρισμα ΙΙ. Ἐὰν δύο παραλληλόγραμμα ἔχουν ἴσας βάσεις, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τὰς βάσεις ὑψῶν. Καὶ ἂν ἔχουν ἴσα ὕψη, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων βάσεων.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν, ἃς θεωρήσωμεν δύο παραλληλόγραμμα μὲ ἴσας βάσεις

β καὶ ὕψη $υ_1$ καὶ $υ_2$. Τότε τὰ ἐμβαδά των θὰ εἶναι $E_1 = βυ_1$ καὶ $E_2 = βυ_2 \Rightarrow$ $\frac{E_1}{E_2} = \frac{βυ_1}{βυ_2} = \frac{υ_1}{υ_2}$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ἡ πρότασις καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν ἴσων ὑψῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

528. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου τοῦ ὁποίου ἡ μία διάστασις εἶναι 4m καὶ ὁ λόγος της πρὸς τὴν ἄλλην διάστασιν εἶναι 0,5.

529. Ὀρθογώνιον ἔχει βάσιν 8m καὶ ἐμβαδὸν $36m^2$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος του.

530. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 44m ;

531. Ὀρθογώνιον καὶ τετράγωνον εἶναι ἰσεμβαδικά. Ἂν ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι 45m, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ εἶναι τὰ 4/9 τῆς βάσεώς του, νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου.

532. Παραλληλογράμμου αἱ δύο προσκείμεναι πλευραὶ ἔχουν μήκη 6m καὶ 8m καὶ σχηματίζουν γωνίαν 60^0. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδόν του.

319. Ἐμβαδὸν τριγώνου. Θεώρημα. Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιγινόμενον μιᾶς τῶν πλευρῶν του ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον αὐτῆς ὕψος.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 314) καὶ $ΑΔ = υ_α$ τὸ ὕψος του, ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν πλευρὰν $ΒΓ = α$. Ἐκ τῶν Α καὶ Γ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς ΒΓ καὶ ΒΑ ἀντιστοίχως, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς σημεῖον Ζ καὶ οὕτω σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΖ. Εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον χωρίζεται δι' ἑκάστης τῶν διαγωνίων του εἰς δύο ἴσα τρίγωνα. Τότε θὰ εἶναι $\overset{\Delta}{ΑΒΓ} = \overset{\Delta}{ΓΖΑ}$ καὶ ἐὰν θέσωμεν $(ΑΒΓ) = Ε$ τότε θὰ εἶναι :

(1) $(ΑΒΓΖ) = 2Ε$

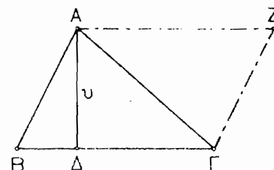
Ἀλλά, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, εἶναι :

(2) $(ΑΒΓΖ) = ΒΓ \cdot ΑΔ = α \cdot υ_α$.

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἕπεται :

$$2Ε = α \cdot υ_α \quad ἤ$$

$$\mathbf{Ε = \frac{1}{2} α \cdot υ_α}$$



Σχ. 314

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι : $Ε = \frac{1}{2} β \cdot υ_β = \frac{1}{2} γ \cdot υ_γ$.

Πόρισμα I. Τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιγινόμενον τῶν καθέτων πλευρῶν του.

Πόρισμα II. Δύο τρίγωνα μὲ ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἰσεμβαδικά.

Πόρισμα III. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν ἴσας βάσεις, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων πρὸς τὰς βάσεις ὑψῶν. Ἐὰν ἔχουν ἴσα ὕψη, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων πρὸς αὐτὰ βάσεων.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν, ἂς θεωρήσωμεν δύο τρίγωνα μὲ ἴσας βάσεις β καὶ ἔστωσαν $υ_1$ καὶ $υ_2$ τὰ ὕψη αὐτῶν. Ἐὰν E_1 καὶ E_2 εἶναι τὰ ἐμβαδά των, θὰ ἔχωμεν :

$E_1 = \frac{1}{2}βυ_1$, $E_2 = \frac{1}{2}βυ_2$. Διὰ διαιρέσεως αὐτῶν κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$\frac{E_1}{E_2} = \frac{υ_1}{υ_2}$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ἡ πρότασις μὲ τὰ ἴσα ὕψη.

320. Ἐμβαδὸν ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς α. Τὸ ὕψος ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς α, ἰσοῦται πρὸς $\frac{α\sqrt{3}}{2}$ (§ 303). Ἄρα τὸ ἐμβαδόν του εἶναι :

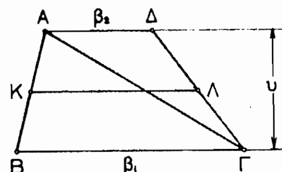
$$E = \frac{1}{2}α \cdot \frac{α\sqrt{3}}{2} \Rightarrow E = \frac{α^2\sqrt{3}}{4}$$

321. Ἐμβαδὸν κυρτοῦ τραπεζίου. Θεώρημα. Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κυρτοῦ τραπεζίου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν βάσεών του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ἀπόδειξις. Ἔστω κυρτὸν τραπέζιον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι $ΒΓ = β_1$ καὶ $ΑΔ = β_2$ καὶ υ τὸ ὕψος αὐτοῦ (σχ. 315). Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΑΓ, διὰ τῆς ὁποίας τὸ τραπέζιον χωρίζεται εἰς δύο τρίγωνα. Ἐὰν καλέσωμεν Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου, ἔχομεν :

(1) $$E = (ΑΒΓ) + (ΑΔΓ)$$

Ἀλλὰ τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος υ καὶ βάσεις τὰς $β_1$ καὶ $β_2$ ἀντιστοίχως, ἐπομένως :



Σχ. 315

(2) $$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}β_1 \cdot υ \quad καὶ \quad (ΑΔΓ) = \frac{1}{2}β_2 \cdot υ$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται :

3) $$E = \frac{1}{2}(β_1 + β_2) \cdot υ$$

Πόρισμα. Τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς διαμέσου αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Πράγματι, ἐὰν εἶναι ΚΛ = δ ἡ διάμεσος τοῦ τραπεζίου, γνωρίζομεν (§ 156) ὅτι εἶναι $ΚΛ = \frac{β_1 + β_2}{2}$. Τότε ὁ τύπος (3) γράφεται :

$$E = ΚΛ \cdot υ \quad ἢ \quad E = δυ.$$

322. Θεώρημα. **Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην ἢ παραπληρωματικήν, εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν πλευρῶν, αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὴν ἴσην ἢ τὴν παραπληρωματικὴν γωνίαν.**

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν γωνίαν των $\widehat{A}$ ἴσην (σχ. 316 α) ἢ παραπληρωματικὴν (σχ. 316 β). Θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι : $\dfrac{(ΑΒΓ)}{(ΑΔΕ)} = \dfrac{ΑΒ \cdot ΑΓ}{ΑΔ \cdot ΑΕ}$.

Φέρομεν τὴν ΒΕ. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΕ ἔχουν ἀπὸ τὴν κορυφὴν Β τὸ αὐτὸ ὕψος ΒΖ. Ἄρα (§ 319 πόρ. ΙΙΙ) θὰ εἶναι :

$$(1) \qquad \frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΒΕ)} = \frac{ΑΓ}{ΑΕ}$$

Ὁμοίως τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΔΕ ἔχουν ἀπὸ τὴν κορυφὴν Ε τὸ αὐτὸ ὕψος ΕΗ. Ἄρα θὰ εἶναι :

$$(2) \qquad \frac{(ΑΒΕ)}{(ΑΔΕ)} = \frac{ΑΒ}{ΑΔ}$$

Πολλαπλασιάζομεν τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ λαμβάνομεν :

$$\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΒΕ)} \cdot \frac{(ΑΒΕ)}{(ΑΔΕ)} = \frac{ΑΓ}{ΑΕ} \cdot \frac{ΑΒ}{ΑΔ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΔΕ)} = \frac{ΑΒ \cdot ΑΓ}{ΑΔ \cdot ΑΕ}.$$

ΕΜΒΑΔΑ ΤΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

323. Θεώρημα. **Τὸ ἐμβαδὸν πολυγώνου, περιγεγραμμένου περὶ κύκλον, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιγινόμενον τῆς περιμέτρου αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.**

Ἀπόδειξις. Ἔστω ΑΒΓΔΕ τυχὸν πολύγωνον, περιγεγραμμένον περὶ κύκλον (Ο,ρ) (σχ. 317). Φέρομεν τὰς ΟΑ, ΟΒ,...,ΟΕ. Τότε θὰ εἶναι :

$$(ΑΒΓΔΕ) = (ΟΑΒ) + (ΟΒΓ) + \ldots + (ΟΕΑ) =$$

$$= \frac{1}{2} ΑΒ \cdot ρ + \frac{1}{2} ΒΓ \cdot ρ + \ldots + \frac{1}{2} ΕΑ \cdot ρ =$$

$$= \frac{ΑΒ + ΒΓ + \ldots + ΕΑ}{2} \cdot ρ.$$

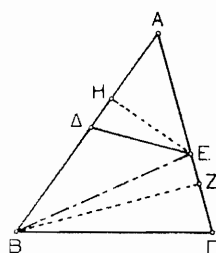
Ἄρα $(ΑΒΓΔΕ) = \dfrac{1}{2} (ΑΒ + ΒΓ + \ldots + ΕΑ) \cdot ρ.$

Πόρισμα. Τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον :

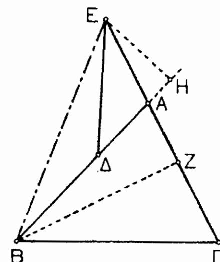
$$Ε = τρ$$

ὅπου 2τ, εἶναι ἡ περίμετρος αὐτοῦ καὶ ρ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

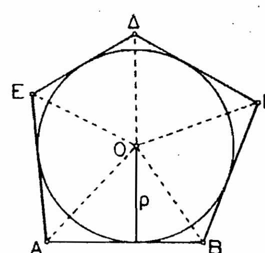
324. Ἐμβαδὸν οἱουδήποτε πολυγώνου. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς τυχόντος πολυγώνου, ἀναλύομεν αὐτὸ ἐν γένει εἰς ἄθροισμα ἢ



Σχ. 316α



Σχ. 316β



Σχ. 317

διαφορὰν ἄλλων γνωστῶν ἐμβαδῶν, ἀναλόγως τῶν ἑκάστοτε γνωστῶν στοιχείων. Εἰς τὰ ἑπόμενα ὑποδεικνύομεν μερικοὺς τρόπους ἐργασίας :

i) Διὰ τριγωνισμοῦ μὲ διαγωνίους ἐκ μιᾶς κορυφῆς (σχ. 318).

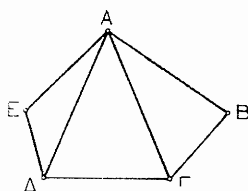
$$(ΑΒΓΔΕ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) + (ΑΔΕ).$$

ii) Διὰ τριγωνισμοῦ, διαιροῦντες τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα μὲ κοινὴν κορυφὴν γνωστὸν σημεῖον Ο (σχ. 319).

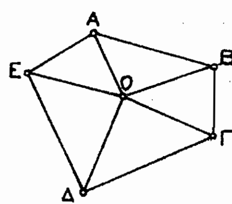
$$(ΑΒΓΔΕ) = (ΟΑΒ) + (ΟΒΓ) + ... + (ΟΕΑ).$$

iii) Διαιροῦντες τὸ πολύγωνον εἰς ὀρθογώνια τρίγωνα καὶ τραπέζια (σχ. 320).

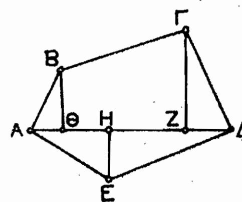
$$(ΑΒΓΔΕ) = (ΑΒΘ) + (ΒΓΖΘ) + (ΓΔΖ) + (ΔΕΗ) + (ΕΑΗ)$$



Σχ. 318



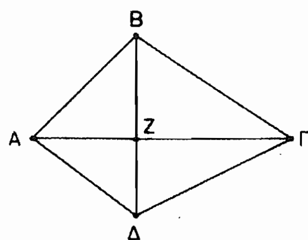
Σχ. 319

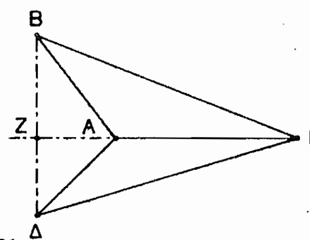


Σχ. 320

325. Θεώρημα. Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τετραπλεύρου, τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι εἶναι κάθετοι, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἡμιγινόμενον αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τυχὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς διαγωνίους του καθέτους, ἤτοι $ΑΓ \perp ΒΔ$ (σχ. 321). Διὰ τῆς διαγωνίου ΑΓ





Σχ. 321

τοῦτο χωρίζεται εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ καὶ συνεπῶς εἶναι :

(1) $$(ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΔΓ).$$

Τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουν κοινὴν τὴν βάσιν ΑΓ καὶ ὕψη τὰ ΒΖ καὶ ΔΖ ἀντιστοίχως, ὅπου Ζ εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων.

Τότε ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν :

$$(ΑΒΓΔ) = \frac{1}{2} ΑΓ \cdot ΒΖ + \frac{1}{2} ΑΓ \cdot ΔΖ =$$

$$\frac{1}{2} ΑΓ \cdot (ΒΖ + ΔΖ) = \frac{1}{2} ΑΓ \cdot ΒΔ \text{ ἢ}$$

$$(ΑΒΓΔ) = \frac{1}{2} ΑΓ \cdot ΒΔ$$

Παρατήρησις. Ὡς ἀπεδείχθη, τὸ προηγούμενον θεώρημα ἰσχύει καὶ διὰ τὸ μὴ κυρτὸν τετράπλευρον τοῦ σχήματος 315 μὲ καθέτους τὰς διαγωνίους του. Δὲν ἰσχύει ὅμως τὸ θεώρημα διὰ τὰ μὴ κυρτὰ διασταυρούμενα τετράπλευρα.

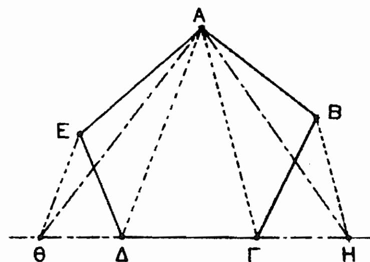
Πόρισμα. Ἐὰν ρόμβος ἔχῃ διαγωνίους $δ_1$ καὶ $δ_2$, τὸ ἐμβαδόν του δίδεται ἐκ τοῦ τύπου.

$$E = \frac{δ_1 \cdot δ_2}{2}.$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ

326. Πρόβλημα. Δοθὲν κυρτὸν πολύγωνον νὰ μετασχηματισθῇ εἰς ἄλλο ἰσεμβαδικόν, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ μίαν πλευρὰν ὀλιγωτέραν.

Λύσις. Ἔστω τὸ κυρτὸν πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ (σχ. 322). Δυνάμεθα νὰ τὸ μετασχηματίσωμεν εἰς ἄλλο ἰσεμβαδικόν, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τέσσαρας πλευράς, ὡς ἑξῆς: Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΑΓ καὶ ἀπὸ τὴν κορυφὴν Β φέρομεν τὴν ΒΗ//ΑΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΔΓ εἰς τὸ Η. Τέλος φέρομεν τὴν ΑΗ. Τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ εἶναι ἰσεμβαδικὸν μὲ τὸ τετράπλευρον ΑΗΔΕ. Πράγματι εἶναι :



Σχ. 322

(1) $$(ΑΒΓ) = (ΑΗΓ),$$

διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΓ καὶ ἴσα ὕψη, ἀφοῦ εἶναι ΒΗ//ΑΓ. Εἰς τὰ μέλη τῆς ἰσότητος (1) προσθέτομεν τὸ τετράπλευρον (ΑΓΔΕ), ἤτοι :

$$(ΑΒΓ) + (ΑΓΔΕ) = (ΑΗΓ) + (ΑΓΔΕ) \quad \text{ἢ}$$

$$\mathbf{(ΑΒΓΔΕ) = (ΑΗΔΕ).}$$

Παρατήρησις. Ἂν φέρωμεν τὴν διαγώνιον ΑΔ καὶ τὴν ΕΘ//ΑΔ καὶ τὴν ΑΘ, εὑρίσκομεν ὁμοίως (ΑΗΔΕ) = (ΑΗΘ). Ὥστε :

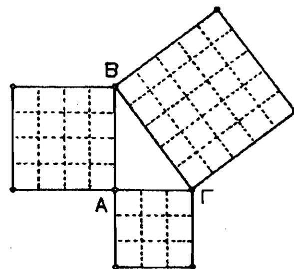
$$(ΑΒΓΔΕ) = (ΑΗΔΕ) = (ΑΗΘ),$$

Τελικῶς τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ μετεσχηματίσθη εἰς τὸ ἰσεμβαδικὸν τρίγωνον ΑΗΘ.

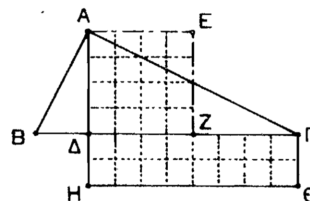
327. Τὸ γινόμενον δύο εὐθυγράμμων τμημάτων ὡς γεωμετρικὸν μέγεθος.

Μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τῆς ἐννοίας τοῦ ἐμβαδοῦ, τὸ γινόμενον δύο εὐθυγράμμων τμημάτων, τὸ ὁποῖον μέχρι πρὸ τῶν ἐμβαδῶν εἶχε ἁπλῶς τὴν ἔννοιαν τοῦ γινομένου τῶν μέτρων των, λαμβάνει ὑπόστασιν γεωμετρικοῦ μεγέθους καὶ συγκεκριμένως ὑπόστασιν ἐμβαδοῦ.

Οὕτως, ἡ βασικὴ σχέσις $α^2 = β^2 + γ^2$ τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος, ἡ ὁποία ἀναφέρεται εἰς ὀρθογώνια τρίγωνα, δύναται νὰ ἑρμηνευθῇ ὡς ἐκφράζουσα σχέσιν ἐμβαδῶν τῶν τετραγώνων, ποὺ κατασκευάζονται ἐπὶ τῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου (σχ. 323) μὲ πλευρὰς τὰς ἀντιστοίχους πλευρᾶς τοῦ τριγώνου.



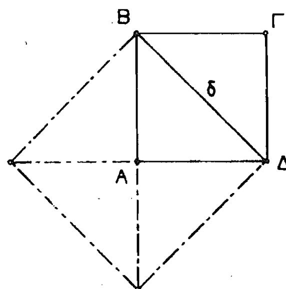
Σχ. 323



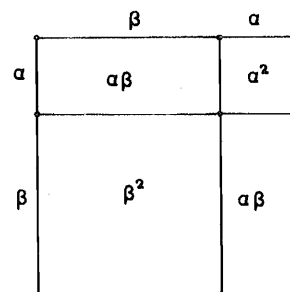
Σχ. 324

Ἡ γνωστὴ σχέσις ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $υ_α^2 = ΔΒ \cdot ΔΓ$ (σχ. 324), ἐκφράζει ὅτι τὸ τετράγωνον ΑΔΖΕ ἔχει ἐμβαδὸν ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΔΓΘΗ μὲ διαστάσεις ΓΔ καὶ ΔΗ = ΔΒ.

Ἐπίσης ἡ γνωστὴ σχέσις $δ = α\sqrt{2}$, ποὺ συνδέει τὴν διαγώνιον δ τετρα-



Σχ. 325



Σχ. 326

γώνου μὲ τὴν πλευρὰν του α καὶ ἡ ὁποία γράφεται καὶ $\delta^2 = 2\alpha^2$, ἐκφράζει ὅτι τὸ τετράγωνον, ποὺ κατασκευάζεται ἐπὶ τῆς διαγωνίου τετραγώνου μὲ πλευρὰν τὴν διαγώνιον, εἶναι διπλάσιον ἀπὸ τὸ τετράγωνον (βλ. καὶ σχῆμα 325).

Γενικῶς κάθε ὁμογενὴς σχέσις δευτέρου βαθμοῦ, ὡς πρὸς τὸ μῆκος, ἑρμηνεύεται ὡς σχέσις ἐμβαδῶν. Ἓν ἀκόμη παράδειγμα, ἡ γνωστὴ ταυτότης $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, ὅπου τὰ α καὶ β παριστοῦν εὐθύγραμμα τμήματα, παριστᾷ σχέσιν ἐμβαδῶν ὡς φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 326.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

533. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἄγεται ἐπὶ πλευρᾶς 5m, ἐὰν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εἶναι 10 m².

534. Ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ εἶναι 3 m καὶ 4 m. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν του καὶ τὸ ὕψος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

535. Τρίγωνον καὶ ὀρθογώνιον ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ εἶναι ἰσεμβαδικά. Νὰ εὑρεθῇ σχέσις συνδέουσα τὰ ἀντίστοιχα ὕψη των.

536. Δείξατε ὅτι τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων, ποὺ ἔχουν κορυφὴν τυχὸν σημεῖον τῆς περιμέτρου παραλληλογράμμου καὶ βάσεις τὰς διαγωνίους αὐτοῦ, ἔχουν σταθερὸν ἄθροισμα.

537. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ δύο πλευραὶ εἶναι 12 m καὶ 8 m, ἡ δὲ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένη γωνία εἶναι 30^0 ἢ 150^0. Συγκρίνατε καὶ αἰτιολογίσατε τὰ ἀποτελέσματα εἰς τὰς δύο περιπτώσεις.

538. Δείξατε ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον μία διάμεσος τὸ διαιρεῖ εἰς δύο ἰσοδύναμα τρίγωνα.

539. Νὰ διαιρεθῇ τρίγωνον εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη δι' εὐθειῶν ἀγομένων ἐκ μιᾶς κορυφῆς του.

540. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι 4 m καὶ 6 m ἡ δὲ ἀπόστασίς των εἶναι 3 m.

541. Τραπεζίου ἡ μία βάσις εἶναι τριπλασία τῆς ἄλλης. Νὰ εὑρεθοῦν αὗται, ἐὰν τὸ ὕψος του εἶναι 3 m καὶ τὸ ἐμβαδόν του εἶναι 12 m².

542. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον τῆς μιᾶς διαγωνίου παραλληλογράμμου φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευράς του. Δείξατε ὅτι ἐκ τῶν τεσσάρων σχηματιζομένων παραλληλογράμμων τὰ δύο, ποὺ δὲν περιέχουν τμήματα τῆς διαγωνίου αὐτῆς, εἶναι ἰσοδύναμα.

543. Ἐὰν συνδέσωμεν δι' εὐθυγράμμων τμημάτων τυχὸν σημεῖον Σ ἐσωτερικὸν παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ μὲ τὰς κορυφάς του, δείξατε ὅτι :

$$(\Sigma AB) + (\Sigma\Gamma\Delta) = (\Sigma A\Delta) + (\Sigma B\Gamma)$$

544. Ἐὰν συνδέσωμεν τυχὸν σημεῖον Σ τῆς διαγωνίου ΒΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ μὲ τὰς κορυφὰς Α καὶ Γ, δείξατε ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον διαιρεῖται εἰς δύο ζεύγη ἰσοδυνάμων τριγώνων.

545. Ἀπὸ τὰς κορυφὰς τυχόντος τετραπλεύρου φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς διαγωνίους του. Δείξατε ὅτι τὸ σχηματισθὲν περιγεγραμμένον περὶ τὸ τετράπλευρον παραλληλόγραμμον, ἔχει ἐμβαδὸν διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραπλεύρου.

546. Δείξατε ὅτι τὰ δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων τραπεζίου καὶ βάσεις τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς αὐτοῦ, εἶναι ἰσοδύναμα.

547. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχουν $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$ καὶ $\widehat{B} + \widehat{E} = 2L$. Δείξατε ὅτι εἶναι : $\frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$.

548. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐκ τυχόντος σημείου Μ ἄγομεν καθέτους ἐπὶ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ ἐπ' αὐτῶν λαμβάνομεν τμήματα ΜΔ = ΑΒ καὶ ΜΕ = ΑΓ. Δείξατε ὅτι εἶναι (ΑΒΓ) = (ΜΔΕ).

549. Τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει ΑΒ = 48 m καὶ ΑΓ = 12 m. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος ἑκάστης τῶν ἴσων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς αὐτό, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία τῶν ἴσων πλευρῶν ἰσοῦται μὲ τὴν γωνίαν $\widehat{A}$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

550. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐκ σημείου Ο ἐσωτερικοῦ τοῦ ΑΒΓ φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ καὶ ἐπ' αὐτῶν λαμβάνομεν τμήματα ΟΔ = ΑΒ, ΟΕ = ΒΓ, ΟΖ = ΓΑ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι εἶναι (ΔΕΖ) = 3(ΑΒΓ).

Β΄.

551. Νὰ διαιρεθῇ τετράγωνον εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη δι' εὐθειῶν ἀγομένων ἐκ μιᾶς κορυφῆς του.

552. Νὰ διαιρεθῇ παραλληλόγραμμον εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη δι' εὐθειῶν ἀγομένων ἐκ μιᾶς κορυφῆς του.

553. Νὰ διαιρεθῇ παραλληλόγραμμον εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη δι' εὐθείας, διερχομένης ἐκ σημείου Σ αὐτοῦ.

554. Ἐὰν συνδέσωμεν τὸ κέντρον βάρους τριγώνου μὲ τὰς κορυφάς του, δείξατε ὅτι τοῦτο διαιρεῖται εἰς τρία ἰσοδύναμα τρίγωνα.

555. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον, μὲ κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τυχόντος τετραπλεύρου, ἔχει ἐμβαδὸν ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραπλεύρου.

556. Δείξατε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς μιᾶς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ μέσου τῆς ἄλλης ἀπ' αὐτήν.

557. Δίδεται παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ σημεῖον Ο, μὴ κείμενον ἐντὸς τῆς γωνίας $\widehat{A}$ οὔτε ἐντὸς τῆς κατὰ κορυφήν της. Δείξατε ὅτι εἶναι (ΟΑΓ) = (ΟΑΒ) + (ΟΑΔ).

558. Τριγώνου ΑΒΓ προεκτείνομεν τὰς πλευράς του κατὰ κυκλικὴν σειρὰν καὶ ἐφ' ἑκάστης προεκτάσεως λαμβάνομεν τμήματα ΑΓ′ = ΑΓ, ΒΑ′ = ΒΑ, ΓΒ′ = ΓΒ. Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου Α′Β′Γ′ συναρτήσει τοῦ ἐμβαδοῦ Ε τοῦ ΑΒΓ.

559. Παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ προεκτείνομεν τὰς πλευράς του κατὰ κυκλικὴν σειρὰν καὶ ἐφ' ἑκάστης προεκτάσεως λαμβάνομεν τμήματα ΑΔ′ = ΑΔ, ΒΑ′ = ΒΑ, ΓΒ′ = ΓΒ, ΔΓ′ = ΔΓ. α) Δείξατε ὅτι τὸ Α′Β′Γ′Δ′ εἶναι παραλληλόγραμμον. β) Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ Α′Β′Γ′Δ′ συναρτήσει τοῦ ἐμβαδοῦ Ε τοῦ ΑΒΓΔ.

560. Τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον κέντρου Ο. Δείξατε ὅτι εἶναι (ΟΑΒ) + (ΟΓΔ) = (ΟΑΔ) + (ΟΒΓ).

561. Δοθὲν κυρτὸν πεντάγωνον νὰ μετασχηματισθῇ εἰς ὀρθογώνιον.

562. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ σημεῖον Σ τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Ἐκ τῆς κορυφῆς Α φέρομεν εὐθεῖαν (ε) ⊥ ΑΣ καὶ ἐκ τῶν Β καὶ Γ φέρομεν τὰς ΒΒ′ καὶ ΓΓ′ καθέτους ἐπὶ τὴν (ε). Δείξατε ὅτι εἶναι

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} A\Sigma \cdot B'\Gamma'$$

563. Δίδεται ὀξυγώνιον τρίγωνον καὶ ὁ περιγεγραμμένος αὐτοῦ κύκλος. Δείξατε ὅτι

τὸ κυρτὸν ἑξάγωνον, μὲ κορυφὰς τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου καὶ τὰ ἀντιδιαμετρικὰ αὐτῶν σημεῖα, ἔχει ἐμβαδὸν διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου.

564. Ἀπὸ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων κυρτοῦ τετραπλεύρου φέρομεν ἀνὰ μίαν παράλληλον πρὸς τὴν ἄλλην διαγώνιον καὶ ἔστω ὅτι αὗται τέμνονται εἰς τὸ Ο. Ἐὰν συνδέσωμεν τὸ Ο μὲ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, δείξατε ὅτι τὸ τετράπλευρον διαιρεῖται εἰς τέσσαρα ἰσοδύναμα τετράπλευρα.

565. Ἐὰν Ο εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος μὲ ἄκρα τὰ μέσα τῶν διαγωνίων κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ καὶ συνδέσωμεν αὐτὸ μὲ τὰς κορυφὰς τοῦ τετραπλεύρου, δείξατε ὅτι εἶναι : (ΟΑΒ) + (ΟΓΔ) = (ΟΑΔ) + (ΟΒΓ).

566. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ μέσου Μ αὐτῆς λαμβάνομεν τμήματα ΜΔ = ΜΕ. Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ. Ἐὰν ἡ ΒΖ τέμνῃ τὴν ΑΕ εἰς τὸ Η, δείξατε ὅτι εἶναι (ΑΒΗ) = (ΗΖΓΕ).

567. Ἀπὸ σημεῖον Σ τῆς πλευρᾶς ΑΒ δοθέντος τετραπλεύρου ΑΒΓΔ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ διαιρῇ τὸ τετράπλευρον εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

568. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ὁ κύκλος μὲ διάμετρον τὴν ΒΓ τέμνει τὸ ὕψος ΑΔ εἰς τὸ Ε. Ἐὰν Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου, δείξατε ὅτι εἶναι

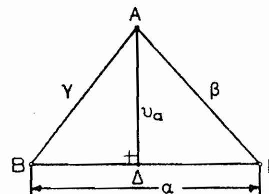
$$\alpha)\ \Delta E^2 = \Delta A \cdot \Delta H \quad \text{καὶ} \quad \beta)\ \frac{(EB\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{(HB\Gamma)}{(EB\Gamma)}.$$

569. Τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει ΑΒ = γ, ΑΓ = β καὶ $\widehat{A} = 30^0$. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ καὶ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου κατασκευάζομεν τετράγωνα ΑΒΔΕ, ΑΓΖΗ καὶ φέρομεν τὴν ΕΗ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν (ΒΓΖΗΕΔΒ).

328. Ἐμβαδὸν τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν του. Πρόβλημα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν Ε τριγώνου ΑΒΓ, ἐκ τῶν πλευρῶν α, β, γ αὐτοῦ.

Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ μὲ $\widehat{B} < 1^L$ (σχ. 327). Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ $= \upsilon_\alpha$ καὶ ἔχομεν :

$$(1) \qquad E = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha$$



Σχ. 327

Ἀρκεῖ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος υ_α ἐκ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ ἔχομεν

$$(2) \qquad \upsilon_\alpha^2 = \gamma^2 - B\Delta^2$$

Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ΒΔ ἐκ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου. Ἐκ τοῦ θεωρήματος 306 λαμβάνομεν :

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha \cdot B\Delta. \quad \text{Ἄρα} \quad B\Delta = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha} \quad \text{ἢ}$$

$$(3) \qquad B\Delta^2 = \frac{(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2)^2}{4\alpha^2}.$$

Δυνάμει τῆς (3) ἡ (2) γράφεται :

$$\upsilon_\alpha^2 = \gamma^2 - \frac{(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2)^2}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha^2\gamma^2 - (\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2)^2}{4\alpha^2} =$$

$$= \frac{(2\alpha\gamma + \alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2)\cdot(2\alpha\gamma - \alpha^2 - \gamma^2 + \beta^2)}{4\alpha^2} =$$

$$= \frac{[(\alpha+\gamma)^2 - \beta^2]\cdot[\beta^2 - (\alpha-\gamma)^2]}{4\alpha^2} =$$

$$= \frac{(\alpha+\gamma+\beta)(\alpha+\gamma-\beta)(\beta+\alpha-\gamma)(\beta-\alpha+\gamma)}{4\alpha^2}$$

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι :

$$\alpha+\beta+\gamma = 2\tau, \text{ ἕπεται } \alpha+\beta-\gamma = 2(\tau-\gamma),$$
$$\alpha-\beta+\gamma = 2(\tau-\beta) \text{ καὶ } \beta-\alpha+\gamma = 2(\tau-\alpha).$$

Τότε ἡ τελευταία σχέσις γράφεται :

$$\upsilon_\alpha{}^2 = \frac{2\tau\cdot 2(\tau-\alpha)\cdot 2(\tau-\beta)\cdot 2(\tau-\gamma)}{4\alpha^2} \quad \text{ἢ}$$

$$(4) \qquad \upsilon_\alpha = \frac{2\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}{\alpha}$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (4) ἕπεται ὅτι :

$$\mathbf{E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}$$

Ὁ ἀνωτέρω τύπος τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι γνωστὸς ὡς **τύπος τοῦ Ἥρωνος.**

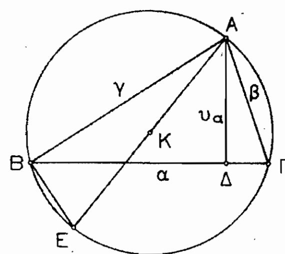
ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΑΚΤΙΝΩΝ ΤΩΝ ΚΥΚΛΩΝ ΕΝΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΩΝ ΠΛΕΥΡΩΝ ΑΥΤΟΥ

★ 329. Θεώρημα. Εἰς κάθε τρίγωνον τὸ γινόμενον τῶν δύο πλευρῶν του ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς διαμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὸ κύκλου ἐπὶ τὸ ὕψος, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τρίτην πλευράν του.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, $ΑΔ = \upsilon_\alpha$, τὸ ἐκ τῆς κορυφῆς Α ὕψος του καὶ ΑΚΕ = 2R ἡ διάμετρος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὸ κύκλου (σχ. 328). Τὰ τρίγωνα ΑΔΓ καὶ ΑΒΕ εἶναι ὅμοια, διότι εἶναι ὀρθογώνια ($\widehat{ΑΒΕ} = 1^{L}$ ὡς βαίνουσα εἰς ἡμικύκλιον) καὶ ἔχουν $\widehat{Γ} = \widehat{Ε}$, ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς τὸ αὐτὸ τόξον. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος λαμβάνομεν

$$\frac{ΑΒ}{ΑΔ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\gamma}{\upsilon_\alpha} = \frac{2R}{\beta}.$$

Ἄρα $\quad \mathbf{\beta\gamma = 2R\upsilon_\alpha}$



Σχ. 328

Πόρισμα Ι. Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\mathbf{E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}}$

Πράγματι, ἐὰν τὴν ἀποδειχθεῖσαν σχέσιν τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ α, λαμβάνομεν :

$$\alpha\beta\gamma = 2R\alpha\upsilon_\alpha \quad \text{ἢ} \quad \alpha\beta\gamma = 2R\cdot 2E. \quad \text{Ἄρα} \quad \mathbf{E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}}.$$

Πόρισμα ΙΙ. Ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τρίγωνον δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $R = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}$.

Πράγματι, ἐκ τοῦ προηγουμένου τύπου λαμβάνομεν $R = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4E}$ καί, ἐπειδὴ εἶναι (§ 328) $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$, ἕπεται ὅτι

$$R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}$$

★ **330. Ὑπολογισμὸς τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τρίγωνον.** Γνωρίζομεν ὅτι (§ 323, πόρ.) τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου εἶναι $E = \tau \cdot \rho$. Ἐξ αὐτοῦ λαμβάνομεν

$$\rho = \frac{E}{\tau} \quad \text{ἢ} \quad \rho = \frac{\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}{\tau}$$

$$\text{ἢ} \quad \rho = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}$$

★ **331. Ὑπολογισμὸς τῶν ἀκτίνων τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων.** Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ, Κ τὸ κέντρον τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὴν πλευρὰν α καὶ R_α ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ (σχ. 329). Τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ τριγώνου ΑΒΓ δύναται νὰ ἐκφρασθῇ, ὡς ἑξῆς :
$E = (KAB) + (KA\Gamma) - (KB\Gamma) =$

$$= \frac{1}{2}\gamma R_\alpha + \frac{1}{2}\beta R_\alpha - \frac{1}{2}\alpha R_\alpha = \frac{1}{2}(\gamma+\beta-\alpha)R_\alpha = \frac{1}{2}\,2(\tau-\alpha)R_\alpha =$$

$$= (\tau-\alpha)R_\alpha \quad \text{ἢ} \quad E = (\tau-\alpha)R_\alpha \quad \text{ἄρα}$$

$$R_\alpha = \frac{E}{\tau-\alpha} \quad \text{ἢ}$$

$$R_\alpha = \frac{\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}{\tau-\alpha} = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau-\alpha}}$$

$$\text{ἄρα} \quad R_\alpha = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau-\alpha}}$$

Ὁμοίως λαμβάνομεν.

$$R_\beta = \frac{E}{\tau-\beta} = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}{\tau-\beta}}$$

$$\text{καὶ} \quad R_\gamma = \frac{E}{\tau-\gamma} = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\tau-\gamma}}$$

ΛΟΓΟΣ ΕΜΒΑΔΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

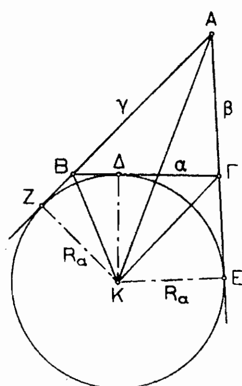
332. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων τριγώνων ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου ὁμοιότητος αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν δύο ὅμοια τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $A_2B_2\Gamma_2$ (σχ. 330). Ἄν λ εἶναι ὁ λόγος ὁμοιότητος αὐτῶν καὶ α, β,γ, εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ $A_2B_2\Gamma_2$, τότε λα, λβ, λγ θὰ εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ $A_1B_1\Gamma_1$. Ἐπειδὴ τὰ δύο

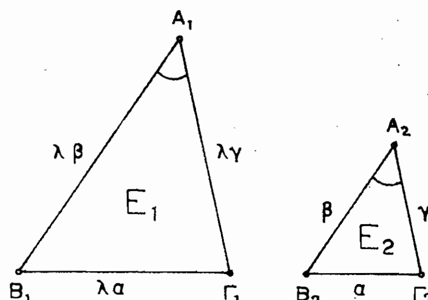
τρίγωνα ἔχουν $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$, τὰ ἐμβαδά των E_1 καὶ E_2 θὰ πληροῦν τὴν σχέσιν :

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{A_1B_1 \cdot A_1\Gamma_1}{A_2B_2 \cdot A_2\Gamma_2} = \frac{\lambda\gamma \cdot \lambda\beta}{\gamma \cdot \beta} = \lambda^2 \Rightarrow$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \lambda^2.$$



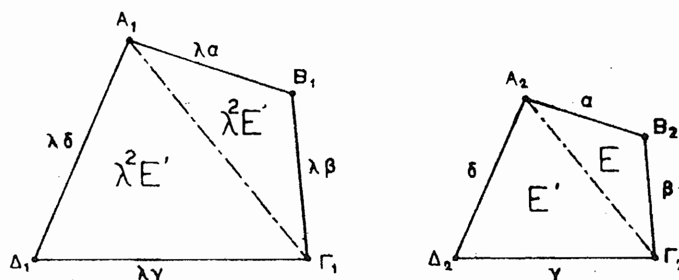
Σχ. 329



Σχ. 330

333. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου ὁμοιότητος αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν δύο ὅμοια πολύγωνα $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1 \approx A_2B_2\Gamma_2\Delta_2$. Διαιροῦμεν αὐτὰ διὰ διαγωνίων ἐξ ὁμολόγου κορυφῆς εἰς ζεύγη ὁμοίων τριγώνων, ἤτοι $A_1\overset{\Delta}{B_1}\Gamma_1 \approx A_2\overset{\Delta}{B_2}\Gamma_2$ (σχ. 331) καὶ $A_1\overset{\Delta}{\Gamma_1}\Delta_1 \approx A_2\overset{\Delta}{\Gamma_2}\Delta_2$. Ἐὰν



Σχ. 331

εἶναι λ ὁ λόγος ὁμοιότητος τῶν πολυγώνων, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα ἔχομεν :

$$\lambda^2 = \frac{(A_1B_1\Gamma_1)}{(A_2B_2\Gamma_2)} = \frac{(A_1\Gamma_1\Delta_1)}{(A_2\Gamma_2\Delta_2)} = \frac{(A_1B_1\Gamma_1) + (A_1\Gamma_1\Delta_1)}{(A_2B_2\Gamma_2) + (A_2\Gamma_2\Delta_2)} = \frac{(A_1B_1\Gamma_1\Delta_1)}{(A_2B_2\Gamma_2\Delta_2)}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

570. Τρίγωνον ἔχει πλευρὰς 25 cm, 52 cm, 63 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

571. Παραλληλογράμμου αἱ δύο προσκείμεναι πλευραὶ ἔχουν μήκη 9 cm καὶ 10 cm καὶ ἡ μία διαγώνιος εἶναι 17 cm. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

572. Τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ἰσοῦται μὲ $\tau(\tau-\alpha)$. Δείξατε ὅτι τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.

573. Τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει ἐμβαδὸν 90 m^2. Ἐκ σημείου Μ τοῦ ὕψους ΑΔ, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τοῦτο εἰς δύο τμήματα ἔχοντα λόγον 2/1, φέρομεν παράλληλον τῆς ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ Ε καὶ Ζ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΕΖ.

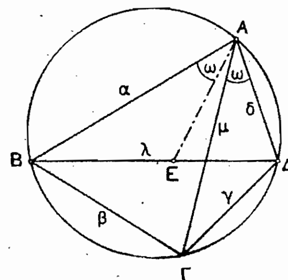
574. Τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $\alpha = 17$ cm, $\beta = 8$ cm, $\gamma = 15$ cm. i) Δείξατε ὅτι εἶναι ὀρθογώνιον. ii) Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος $\frac{(ΑΒΔ)}{(ΑΓΔ)}$.

ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΙΣ ΤΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

★ 334. Πρῶτον Θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου. Εἰς πᾶν ἐγγράψιμον τετράπλευρον τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων του ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τὸ ἐγγράψιμον εἰς κύκλον τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰς $ΑΒ = \alpha$, $ΒΓ = \beta$, $ΓΔ = \gamma$, $ΔΑ = \delta$ καὶ διαγωνίους $ΒΔ = \lambda$ καὶ $ΑΓ = \mu$. Θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι :

$$ΒΔ \cdot ΑΓ = ΑΒ \cdot ΓΔ + ΒΓ \cdot ΑΔ \quad ἤ \quad \lambda\mu = \alpha\gamma + \beta\delta.$$



Σχ. 332

Μὲ πλευρὰν τὴν ΑΒ καὶ κορυφὴν Α κατασκευάζομεν γωνίαν $\widehat{ΒΑΕ} = \widehat{ΓΑΔ} = \omega$, (σχ. 332), ἔνθα Ε εἶναι ἡ τομὴ τῆς ΑΕ καὶ τῆς διαγωνίου ΒΔ. Τότε θὰ εἶναι τριγ. ΑΒΕ $\approx$ τριγ. ΑΓΔ, διότι ἔχουν $\widehat{ΒΑΕ} = \widehat{ΓΑΔ} = \omega$ ἐκ κατασκευῆς καὶ $\widehat{ΑΒΕ} = \widehat{ΑΓΔ}$ ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς τὸ αὐτὸ τόξον. Ἄρα θὰ εἶναι :

$$(1) \qquad \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{ΒΕ}{ΓΔ} \quad ἤ \quad \frac{\alpha}{\mu} = \frac{ΒΕ}{\gamma}. \quad \text{Ἄρα} \quad \mu \cdot ΒΕ = \alpha\gamma.$$

Ἐπίσης ἔχομεν τριγ. ΑΒΓ $\approx$ τριγ. ΑΕΔ, ὡς ἔχοντα $\widehat{ΒΑΓ} = \widehat{ΕΑΔ} = \omega + \widehat{ΕΑΓ}$ καὶ $\widehat{ΒΓΑ} = \widehat{ΕΔΑ}$, ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς τὸ αὐτὸ τόξον. Ἄρα θὰ εἶναι :

$$(2) \qquad \frac{ΒΓ}{ΕΔ} = \frac{ΑΓ}{ΑΔ} \quad ἤ \quad \frac{\beta}{ΕΔ} = \frac{\mu}{\delta}. \quad \text{Ἄρα :} \quad \mu \cdot ΕΔ = \beta\delta.$$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς τελευταίας τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν : $\mu(ΒΕ + ΕΔ) = \alpha\gamma + \beta\delta$. καί, ἐπειδὴ εἶναι $ΒΕ + ΕΔ = ΒΔ = \lambda$, ἡ τελευταία ἰσότης γράφεται :

$$\boldsymbol{\lambda\mu = \alpha\gamma + \beta\delta.}$$

★ 335. Δεύτερον θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου. Εἰς πᾶν ἐγγράψιμον τετράπλευρον ὁ λόγος τῶν διαγωνίων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων τῶν πλευρῶν, τῶν συντρεχουσῶν εἰς τὰ ἄκρα ἑκάστης διαγωνίου.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τὸ ἐγγράψιμον εἰς κύκλον τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰς ΑΒ = α, ΒΓ = β, ΓΔ = γ, ΔΑ = δ καὶ διαγωνίους ΒΔ = λ καὶ ΑΓ = μ (σχ. 332). Θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι :

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\alpha\beta + \gamma\delta}{\alpha\delta + \beta\gamma}$$

Γνωρίζομεν ὅτι (§ 329, πόρ. I) εἶναι :

(1) $$(ΑΒΔ) = \frac{\lambda\alpha\delta}{4R} \quad \text{καὶ}$$

(2) $$(ΓΒΔ) = \frac{\lambda\beta\gamma}{4R},$$

ὅπου R ἡ ἀκτὶς τοῦ περὶ τὸ ΑΒΓΔ περιγεγραμμένου κύκλου.

Διὰ προσθέσεως τῶν (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

(3) $$(ΑΒΓΔ) = \frac{\lambda(\alpha\delta + \beta\gamma)}{4R}$$

Ἐπίσης ἔχομεν :

(4) $$(ΒΑΓ) = \frac{\mu\alpha\beta}{4R} \quad \text{καὶ} \quad (ΔΑΓ) = \frac{\mu\gamma\delta}{4R}$$

Προσθέτοντες αὐτὰς κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

(5) $$(ΑΒΓΔ) = \frac{\mu\,(\alpha\beta + \gamma\delta)}{4R}$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (3) καὶ (5) λαμβάνομεν :

$$\lambda\,(\alpha\delta + \beta\gamma) = \mu\,(\alpha\beta + \gamma\delta) \quad \text{ἢ}$$

$$\frac{\boldsymbol{\lambda}}{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\boldsymbol{\alpha\beta + \gamma\delta}}{\boldsymbol{\alpha\delta + \beta\gamma}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

575. Εἰς κύκλον ἐγγράφομεν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐὰν Μ εἶναι σημεῖον τοῦ ἐλάσσονος τόξου $\widehat{ΒΓ}$, δείξατε ὅτι εἶναι ΜΑ = ΜΒ + ΜΓ.

576. Δίδεται κύκλος (Ο, R) καὶ τρία σημεῖα του Α, Β, Γ. Ἐὰν εἶναι ΑΒ = α, ΒΓ = β, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ΑΓ ἐκ τῶν α, β καὶ R.

577. Κυρτοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ δίδονται τὰ μήκη τῶν τεσσάρων πλευρῶν του α, β, γ, δ. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν διαγωνίων του.

Β΄.

578. Δίδεται παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Κύκλος διερχόμενος διὰ τῆς κορυφῆς Α τέμνει τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΔ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Η ἀντιστοίχως καὶ τὴν διαγώνιον ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Δείξατε ὅτι εἶναι :

$$ΑΒ \cdot ΑΕ + ΑΔ \cdot ΑΗ = ΑΓ \cdot ΑΖ$$

579. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν δοθείσης γωνίας $x\widehat{A}y$ λαμβάνομεν δύο τμήματα ΑΜ καὶ ΑΝ συνδεόμενα διὰ τῆς σχέσεως α . ΑΜ + β . ΑΝ = λ^2, ὅπου α, β καὶ λ δοθέντα τμήματα. Δείξατε ὅτι ὁ κύκλος, ὁ περιγεγραμμένος περὶ τὸ τρίγωνον ΑΜΝ, διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου (ἴδε ἄσκ. 578).

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΔΙΧΟΤΟΜΩΝ ΓΩΝΙΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

336. Θεώρημα τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου. Ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος γωνίας τριγώνου τέμνει τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς δύο μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰς προσκειμένας πλευρὰς τοῦ τριγώνου καὶ ἀντιστρόφως.

Ἂν ΑΔ εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A}$, θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι εἶναι $\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$.

Ἀπόδειξις. Ἐκ τῆς κορυφῆς Β φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν διχοτόμον ΑΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΓΑ εἰς τὸ Ε (σχ. 333). Τότε, κατὰ τὸ Θ. 265, πόρ. θὰ εἶναι :

$$(1) \qquad \frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{AE}{A\Gamma}$$

Ἀλλά, ἐπειδὴ ΕΒ//ΑΔ, ἔχομεν $\widehat{B_1} = \widehat{A_1}$ καὶ $\widehat{E} = \widehat{A_2}$ καί, ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ ἕπεται ὅτι $\widehat{B_1} = \widehat{E}$, ἤτοι τὸ τρίγωνον ΑΒΕ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἄρα ΑΕ = ΑΒ. Τότε ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$(2) \qquad \frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$$

Ἀντιστρόφως : Ἔστω ὅτι εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύει ἡ σχέσις (2). Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A}$. Φέρομεν τὴν ΒΕ// ΑΔ καὶ λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν (1). Αἱ σχέσεις (1) καὶ (2) ἔχουν τὰ πρῶτα μέλη των ἴσα. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ

$$\frac{AE}{A\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma} \text{ καὶ ἄρα } AE = AB.$$

Ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒΕ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἄρα $\widehat{B_1} = \widehat{E}$. Ἀλλά, λόγῳ τῶν ΒΕ//ΑΔ, ἔχομεν :

$$\widehat{B_1} = \widehat{A_1} \text{ καὶ } \widehat{E} = \widehat{A_2}. \text{ Ἄρα : } \widehat{A_1} = \widehat{A_2}$$

καὶ ἑπομένως ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A}$.

Παρατήρησις : Ἡ ἀνωτέρω ἀναλογία (2) γράφεται :

$$\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta}, \text{ ἢ } \frac{\Delta B}{\Delta B + \Delta\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta + \gamma}, \text{ ἢ } \frac{\Delta B}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta + \gamma}$$

Ἄρα : $\Delta B = \frac{\alpha\gamma}{\beta + \gamma}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν $\Delta\Gamma = \frac{\alpha\beta}{\beta + \gamma}$.

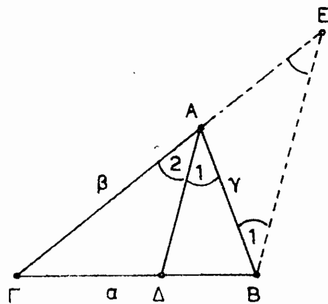
337. Θεώρημα τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου. Ἡ διχοτόμος ἐξωτερικῆς γωνίας τριγώνου τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς εἰς σημεῖον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς πλευρᾶς αὐτῆς εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς προσκειμένας πλευρὰς τοῦ τριγώνου καὶ ἀντιστρόφως.

Ἂν ΑΖ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας $\widehat{A}$, θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι $\frac{ZB}{Z\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$.

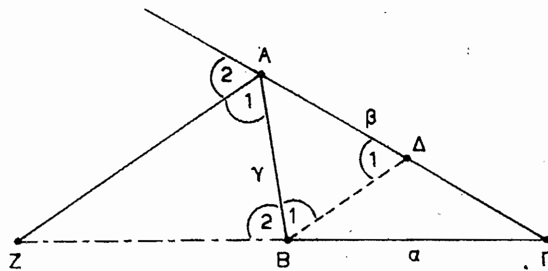
Ἀπόδειξις. Φέρομεν τὴν ΒΔ//ΑΖ (σχ. 334). Τότε, κατὰ τὸ Θ. 265 πόρ. ἔχομεν :

(1) $$\frac{ZB}{Z\Gamma} = \frac{A\Delta}{A\Gamma}.$$

Ἀλλά, λόγῳ τῶν ΑΖ//ΒΔ, ἔχομεν $\widehat{B_1} = \widehat{A_1}$ καὶ $\widehat{\Delta_1} = \widehat{A_2}$ καί, ἐπειδὴ



Σχ. 333



Σχ. 334

εἶναι $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$, ἕπεται : $\widehat{B_1} = \widehat{\Delta_1}$, ἤτοι τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἰσοσκελές. Ἄρα ΑΔ = ΑΒ. Τότε ἡ ἀναλογία (1) γίνεται :

(2) $$\mathbf{\frac{ZB}{Z\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}}$$

Ἀντιστρόφως : Ἔστω ὅτι εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύει ἡ ἀναλογία (2). Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ΑΖ εἶναι διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας $\widehat{A}$. Φέρομεν τὴν ΒΔ//ΑΖ. Τότε ἰσχύει ἡ ἀναλόγία (1). Αἱ σχέσεις (1) καὶ (2) ἔχουν τὰ πρῶτα μέλη των ἴσα. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ

$$\frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}, \quad \text{καὶ ἄρα} \quad A\Delta = AB.$$

Ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἄρα εἶναι $\widehat{B_1} = \widehat{\Delta_1}$. Ἀλλά, λόγῳ τῶν ΒΔ//ΑΖ, ἔχομεν :

$\widehat{B_1} = \widehat{A_1}$ καὶ $\widehat{\Delta_1} = \widehat{A_2}$. Ἄρα $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$, ἤτοι ἡ ΑΖ εἶναι διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας $\widehat{A}$.

Παρατηρήσεις. i) Τὸ σημεῖον Ζ εὑρίσκεται πρὸς τὸ μέρος τῆς μικροτέρας πλευρᾶς (σχ. 334). Πράγματι, ἔστω ὅτι $\beta > \gamma \Longleftrightarrow \widehat{B} > \widehat{\Gamma} \Rightarrow \widehat{B} - \widehat{\Gamma} = \varphi > 0$. Ἡ γωνία $\widehat{A_1}$, ὡς τὸ ἥμισυ τῆς ἐξωτερικῆς τῆς $\widehat{A}$, ἰσοῦται πρὸς

$\frac{\widehat{B}+\widehat{\Gamma}}{2}$. 'Αρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι $\widehat{A}_1+\widehat{B}_2<2^L$, ὅπου $\widehat{B}_2$ ἡ ἐξωτερικὴ τῆς $\widehat{B}$.

$$\widehat{A}_1+\widehat{B}_2=\frac{\widehat{B}+\widehat{\Gamma}}{2}+2^L-\widehat{B}=2^L-\frac{\widehat{B}-\widehat{\Gamma}}{2}=2^L-\frac{\varphi}{2}<2^L.$$

ii) Ὑπολογισμὸς τῶν ἀποστάσεων τοῦ Ζ ἀπὸ τὰ Β καὶ Γ :

$$\frac{ZB}{Z\Gamma}=\frac{\gamma}{\beta} \quad ἢ \quad \frac{ZB}{Z\Gamma-ZB}=\frac{\gamma}{\beta-\gamma} \quad ἢ \quad \frac{ZB}{\alpha}=\frac{\gamma}{\beta-\gamma}$$

Ἄρα : $ZB=\frac{\alpha\gamma}{\beta-\gamma}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν $Z\Gamma=\frac{\alpha\beta}{\beta-\gamma}$.

Εἰς τὸ σχῆμα 334 ὑπετέθη $\beta>\gamma$. Ἂν εἶναι $\gamma>\beta$, τότε αἱ ἄνω τιμαὶ τῶν ΖΒ καὶ ΖΓ γίνονται $ZB=\frac{\alpha\gamma}{\gamma-\beta}$ καὶ $Z\Gamma=\frac{\alpha\beta}{\gamma-\beta}$. Ὥστε γενικῶς εὑρίσκομεν :

$$ZB=\frac{\alpha\gamma}{|\beta-\gamma|} \quad καὶ \quad Z\Gamma=\frac{\alpha\beta}{|\beta-\gamma|}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

580. Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ διάμεσος ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ μὲ τὴν πλευρὰν ΒΓ, τέμνουν τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς εἰς τὰ Ε καὶ Ζ. Δείξατε ὅτι εἶναι ΕΖ//ΒΓ.

581. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ΑΒ = 7,5 cm, ΒΓ = 8 cm καὶ ΑΓ = 4,5 cm. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ ΒΓ ὑπὸ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας $\widehat{A}$.

582. Εἰς τὸ τρίγωνον τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τοῦ τμήματος μὲ ἄκρα τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ διχοτόμοι τῆς γωνίας $\widehat{A}$ (ἐσωτερικὴ καὶ ἐξωτερική) τέμνουν τὴν ΒΓ.

583. Τρίγωνον ἔχει πλευρὰς 3α, 4α, 5α. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων, εἰς τὰ ὁποῖα τέμνουν τὴν μικροτέραν πλευρὰν ἡ ἐσωτερικὴ καὶ ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος τῆς ἀπέναντι γωνίας.

584. Τέσσαρες ἡμιευθεῖαι μὲ κοινὴν ἀρχὴν σημεῖον Ο σχηματίζουν διαδοχικὰς γωνίας ἴσας πρὸς 45^0 ἑκάστην. Τέμνομεν αὐτὰς δι' εὐθείας ΑΒΓΔ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι ΟΑ = ΟΔ. Δείξατε ὅτι εἶναι $AB^2=A\Delta\cdot B\Gamma$.

Β.΄

585. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ εἶναι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του, δείξατε ὅτι ἀληθεύει ἡ σχέσις $B\Delta\cdot\Gamma E\cdot ZA=\Gamma\Delta\cdot BZ\cdot AE$.

586. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν Η, Θ, Κ εἶναι τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$ τέμνουν ἀντιστοίχως τὰς προεκτάσεις τῶν πλευρῶν του, δείξατε ὅτι εἶναι $HB\cdot\Theta\Gamma\cdot KA=H\Gamma\cdot\Theta A\cdot KB$.

587. Ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\widehat{A}=90^0$) ἔχει $\widehat{B}=15^0$ καὶ ΑΒ = λ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἄλλαι πλευραὶ τοῦ τριγώνου.

588. Τριγώνου ΑΒΓ δίδονται αἱ πλευραὶ α, β, γ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του τέμνουν τὰς πλευράς του.

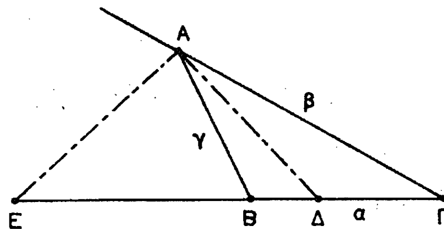
338. Ἁρμονικὴ διαίρεσις τμήματος εἰς δεδομένον λόγον.

Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 329), ΑΔ καὶ ΑΕ εἶναι αἱ διχοτόμοι τῆς γωνίας $\widehat{A}$ (ἐσωτερικὴ καὶ ἐξωτερική), γνωρίζομεν ἀπὸ τὰ δύο θεωρήματα τῶν διχοτόμων ὅτι :

$$\frac{ΔΒ}{ΔΓ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ} \quad καὶ \quad \frac{ΕΒ}{ΕΓ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}.$$

Ἐξ αὐτῶν ἕπεται ὅτι (ἔχουν τὰ δεύτερα μέλη των ἴσα)

$$(1) \qquad \frac{ΔΒ}{ΔΓ}=\frac{ΕΒ}{ΕΓ}$$



Σχ. 335

ἤτοι ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τοῦ Δ ἀπὸ τὰ Β καὶ Γ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀποστάσεων τοῦ Ε ἀπὸ τὰ Β καὶ Γ. Τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει ἡ σχέσις (1), καλοῦνται **ἁρμονικὰ συζυγῆ** σημεῖα ὡς πρὸς τὰ Β καὶ Γ. Τὸ Δ καλεῖται **ἁρμονικὸν συζυγὲς** τοῦ Ε ὡς πρὸς τὰ Β καὶ Γ, ὁμοίως καὶ τὸ Ε εἶναι ἁρμονικὸν συζυγὲς τοῦ Δ ὡς πρὸς τὰ Β καὶ Γ. Ἡ τετρὰς σημείων Ε, Β, Δ, Γ καλεῖται **ἁρμονικὴ τετρὰς σημείων** ἢ **ἁρμονικὴ σημειοσειρά.** Ὁ λόγος $\frac{ΔΒ}{ΔΓ}$ καλεῖται **λόγος τομῆς** τοῦ τμήματος ΒΓ. Ἐπίσης λέγομεν ὅτι τὸ τμῆμα ΒΓ εἶναι **διῃρημένον ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς εἰς λόγον** $\frac{ΔΒ}{ΔΓ}$.

Παρατήρησις. Ὅταν λέγωμεν ὅτι τμῆμα ΒΓ εἶναι διῃρημένον ὑπὸ σημείου Δ εἰς λόγον ρ, ἐννοοῦμεν ὅτι $\frac{ΔΒ}{ΔΓ}=ρ$ καὶ ὄχι $\frac{ΔΓ}{ΔΒ}=ρ$.

339. Θεώρημα. Ἐὰν τὰ Δ καὶ Ε εἶναι ἁρμονικὰ συζυγῆ, ὡς πρὸς τὰ Β καὶ Γ, τότε καὶ τὰ Β καὶ Γ εἶναι ἁρμονικὰ συζυγῆ ὡς πρὸς τὰ Δ καὶ Ε.

Ἀπόδειξις. Ἐκ τῆς ὑποθέσεως ἕπεται ὅτι $\frac{ΔΒ}{ΔΓ}=\frac{ΕΒ}{ΕΓ}$. Ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{ΔΒ}{ΕΒ}=\frac{ΔΓ}{ΕΓ}$ ἢ $\frac{ΒΔ}{ΒΕ}=\frac{ΓΔ}{ΓΕ}$, ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται ὅτι τὰ Β καὶ Γ εἶναι ἁρμονικὰ συζυγῆ ὡς πρὸς τὰ Δ καὶ Ε.

340. Πρόβλημα. Δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ νὰ διαιρεθῇ ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς εἰς δεδομένον λόγον μ /ν.

Λύσις. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν τυχοῦσαν ἡμιευθεῖαν Αx, ἐπὶ τῆς ὁποίας

λαμβάνομεν τμῆμα ΑΕ $= \mu$ (σχ. 336). Ἐκ τοῦ Β φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον τῆς Αx καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς ἑκατέρωθεν τοῦ Β τμήματα ΒΖ $=$ ΒΗ $= \nu$. Φέρομεν τὰς ΕΗ καὶ ΕΖ, αἱ ὁποῖαι τεμνουν τὴν ΑΒ εἰς τὰ ζητούμενα σημεῖα Γ καὶ Δ.

Ἀπόδειξις. Λόγῳ τῶν παραλλήλων ΑΕ καὶ ΗΒΖ, σχηματίζονται δύο ζεύγη ὁμοίων τριγώνων, ἤτοι: $\overset{\Delta}{\Gamma A E} \approx \overset{\Delta}{\Gamma B H}$ καὶ $\overset{\Delta}{\Delta A E} \approx \overset{\Delta}{\Delta B Z}$. Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν ἀντιστοίχως: $\dfrac{\Gamma A}{\Gamma B} = \dfrac{AE}{BH} = \dfrac{\mu}{\nu}$ καὶ $\dfrac{\Delta A}{\Delta B} = \dfrac{AE}{BZ} = \dfrac{\mu}{\nu}$.

Ἄρα τὰ Γ καὶ Δ εἶναι τὰ ζητούμενα σημεῖα.

Διερεύνησις. **i)** Ἐὰν $\mu/\nu \neq 1 \Longleftrightarrow \mu \neq \nu$, τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν.
ii) Ἐὰν $\mu/\nu = 1 \Longleftrightarrow \mu = \nu$ (σχ. 337), τὸ τετράπλευρον ΑΒΖΕ εἶναι

Σχ. 336

Σχ. 337

παραλληλόγραμμον καὶ συνεπῶς ἡ ΕΖ δὲν δίδει σημεῖον Δ ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἐνῷ ἡ ΕΗ δίδει τὸ Γ εἰς τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΑΒ (διατί;). Συμβατικῶς δεχόμεθα ὅτι ὑπάρχει λύσις, μὲ τὴν διευκρίνησιν ὅτι τὸ Δ ἔχει ἀπομακρυνθῆ εἰς τὸ ἄπειρον.

iii) Ὑπάρχει μία μόνον λύσις τοῦ προβλήματος, ἤτοι τὰ Γ καὶ Δ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ εἶναι μονοσημάντως (κατὰ ἕνα μόνον τρόπον) ὡρισμένα. Πράγματι ἀπὸ τὴν σχέσιν $\dfrac{\Gamma A}{\Gamma B} = \dfrac{\mu}{\nu}$ λαμβάνομεν $\dfrac{\Gamma A}{\Gamma A + \Gamma B} = \dfrac{\mu}{\mu + \nu} \Rightarrow$

$\dfrac{\Gamma A}{AB} = \dfrac{\mu}{\mu + \nu} \Rightarrow \Gamma A = AB \cdot \dfrac{\mu}{\mu + \nu}$, ἤτοι τὸ σημεῖον Γ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΑΒ ἀπέχει σταθερὸν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ Α καὶ ἑπομένως εἶναι μονοσημάντως ὡρισμένον. Ὁμοίως καὶ διὰ τὸ Δ (σχ. 336) τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ τμήματος ΑΒ καὶ ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ΑΒ, ἐφ' ὅσον εἶναι $\mu > \nu$, λαμβάνομεν: $\dfrac{\Delta A}{\Delta B} = \dfrac{\mu}{\nu} \Rightarrow \dfrac{\Delta A}{\Delta A - \Delta B} = \dfrac{\mu}{\mu - \nu} \Rightarrow \dfrac{\Delta A}{AB} =$

$= \dfrac{\mu}{\mu - \nu} \Rightarrow \Delta A = AB \cdot \dfrac{\mu}{\mu - \nu}$, ἤτοι τὸ Δ ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ΑΒ, ἀπέχει σταθερὰν ἀπόστασιν ἐκ τοῦ Α καὶ ἑπομένως εἶναι μονοσημάντως ὡρισμένον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Β΄.

589. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἄγομεν τὰς ΒΕ καὶ ΓΖ καθέτους ἐπὶ τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς γωνίας $\widehat{A}$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ Ε καὶ Ζ εἶναι ἁρμονικὰ συζυγῆ τῶν σημείων Α καὶ Δ.

590. Δίδεται ἡμικύκλιον ΑΒ. Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Β τῆς διαμέτρου καὶ ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ ἡμικυκλίου φέρομεν ἄλλην ἐφαπτομένην, ἡ ὁποία συναντᾷ αὐτὰς εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ καὶ τὴν προέκτασιν τῆς ΑΒ εἰς τὸ Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα Μ καὶ Ε εἶναι ἁρμονικὰ συζυγῆ τῶν Γ καὶ Δ.

591. Ἀπὸ σημεῖον Ο ἄγομεν τὰς ἐφαπτομένας ΟΑ καὶ ΟΒ εἰς ἕνα κύκλον καὶ τὴν διάμετρον ΓΔ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη διέρχεται διὰ τοῦ Ο. Ἂν ἡ χορδὴ ΑΒ τέμνῃ τὴν ΓΔ εἰς τὸ σημεῖον Ε, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ Ο καὶ Ε εἶναι ἁρμονικὰ συζυγῆ τῶν Γ καὶ Δ.

592. Εἰς κύκλον δίδεται διάμετρος ΑΒ καὶ χορδὴ ΓΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. Αἱ εὐθεῖαι ΜΓ καὶ ΜΔ, ποὺ ἑνώνουν τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ κύκλου μὲ τὰ Γ καὶ Δ, τέμνουν τὴν ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ Ε καὶ Ζ εἶναι ἁρμονικὰ συζυγῆ πρὸς τὰ Α καὶ Β.

593. Δίδεται κύκλος Κ καὶ ἡ διάμετρος ΑΒ. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς διαμέτρου ΑΒ λαμβάνομεν σημεῖον Ε καὶ ἐκ τοῦ Ε φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΕΗ καὶ ΕΘ καὶ τὴν χορδὴν ΗΘ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν διάμετρον ΑΒ εἰς τὸ Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : α) τὸ ΕΚ εἶναι ὁ ἀριθμητικὸς μέσος τῶν ΕΑ καὶ ΕΒ, β) τὸ ΕΗ εἶναι ὁ γεωμετρικὸς μέσος (ἢ μέσος ἀνάλογος) τῶν ΕΑ καὶ ΕΒ καὶ γ) τὸ ΕΔ εἶναι ὁ ἁρμονικὸς μέσος τῶν ΕΑ καὶ ΕΒ.

Σημ. Ἂν Α, Γ, Η εἶναι κατὰ σειρὰν ὁ ἀριθμητικὸς μέσος, ὁ γεωμετρικὸς μέσος καὶ ὁ ἁρμονικὸς μέσος δύο τμημάτων λ καὶ μ, τότε εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς ἀλγέβρας ὅτι εἶναι : $A = \frac{\lambda + \mu}{2}$, $\Gamma^2 = \lambda\mu$, $H = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + \mu}$.

594. Δίδεται εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ καὶ σημεῖον Γ τῆς εὐθείας ΑΒ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἁρμονικὸν συζυγὲς τοῦ Γ, ὡς πρὸς τὰ Α καὶ Β ὅταν τὸ Γ i) εἶναι ἐκτὸς τοῦ τμήματος ΑΒ καὶ ii) ἀνήκῃ εἰς τὸ τμῆμα ΑΒ.

595. Δίδεται εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ καὶ μεταβλητὸν σημεῖον Χ τοῦ ΑΒ. Ἐὰν Ψ εἶναι τὸ ἁρμονικὸν συζυγὲς τοῦ Χ ὡς πρὸς τὰ Α καὶ Β, νὰ μελετηθῇ ἡ κίνησις τοῦ Ψ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, ὅταν τὸ Χ διαγράφῃ τὸ τμῆμα ΑΒ.

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ ΚΥΚΛΟΣ (*)

341. Πρόβλημα. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ἔχουν δεδομένον λόγον $\frac{\mu}{\nu} \neq 1$.

Λύσις. Ἔστωσαν Α καὶ Β τὰ δοθέντα σημεῖα καὶ Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου μὲ τὴν ἰδιότητα :

$$\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}. \tag{1}$$

(*) **Ἀπολλώνιος** (περὶ τὸ 247 π.Χ.). Ἐπραγματεύθη τὴν γεωμετρίαν τῆς Θέσεως, δηλαδὴ τῆς μορφῆς καὶ τῆς σχέσεως τῶν σχημάτων. Εἰς αὐτὸν ὀφείλεται τὸ ἔργον περὶ κωνικῶν εἰς ὀκτὼ βιβλία. Ἐξ αὐτῶν ἑπτὰ ἐσώθησαν. Τὸ ὄγδοον ἀποκατεστάθη ὑπὸ τοῦ ἀστρονόμου Halley τὸ 1646, βάσει πληροφοριῶν τοῦ Πάππου. Τὸ ἔργον του ὑπῆρξεν ἡ αἰτία νὰ τοῦ δοθῇ ἡ ἐπωνυμία τοῦ κατ᾽ ἐξοχὴν γεωμέτρου.

Διχοτομοῦμεν ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς τὴν γωνίαν $\widehat{M}$ τοῦ τριγώνου ΜΑΒ καὶ ἔστωσαν Γ καὶ Δ ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα, κατὰ τὰ ὁποῖα αἱ διχοτόμοι τέμνουν τὴν ΑΒ (σχ. 338). Τότε ὁ λόγος $\frac{\mu}{\nu}$ ἔχει μεταφερθῇ διὰ τῶν διχοτόμων ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἤτοι :

$$\frac{ΓΑ}{ΓΒ} = \frac{\mu}{\nu} \ (\S\ 336) \text{ καὶ } \frac{ΔΑ}{ΔΒ} = \frac{\mu}{\nu} \ (\S\ 337).$$

Σχ. 338

Τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένα καὶ ἐπὶ πλέον εἶναι ἁρμονικὰ συζυγῆ τῶν Α καὶ Β μὲ λόγον τομῆς $\frac{\mu}{\nu}$. Ἐπὶ πλέον εἶναι $Γ\widehat{M}Δ = 1^{L}$, ὡς σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῆς γωνίας $\widehat{M}$. Ἄρα τὸ Μ εὑρίσκεται ἐπὶ κύκλου διαμέτρου ΓΔ.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω Ν τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου τούτου. Θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι $\frac{ΝΑ}{ΝΒ} = \frac{\mu}{\nu}$.

Ἐκ τοῦ Β φέρομεν ΒΕ//ΓΝ καὶ ΒΖ//ΔΝ. Τότε, ἐπειδὴ $Γ\widehat{N}Δ = 1^{L}$, θὰ εἶναι καὶ $Ε\widehat{Β}Ζ = 1^{L}$. Λόγῳ τῶν παραλλήλων ἔχομεν :

(2) $$\frac{ΝΑ}{ΝΕ} = \frac{ΓΑ}{ΓΒ} = \frac{\mu}{\nu} \quad \text{καὶ}$$

(3) $$\frac{ΝΑ}{ΝΖ} = \frac{ΔΑ}{ΔΒ} = \frac{\mu}{\nu}$$

Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) ἕπεται :

$$\frac{ΝΑ}{ΝΕ} = \frac{ΝΑ}{ΝΖ}.$$

Ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν ΝΕ = ΝΖ, δηλαδὴ τὸ Ν εἶναι μέσον τοῦ ΕΖ καί, ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΕΒΖ εἶναι ὀρθογώνιον, ἕπεται ὅτι :

(4) $$ΝΕ = ΝΒ = ΝΖ.$$

Τότε, ἡ σχέσις (2), λόγῳ τῆς (4) γράφεται :

$$\frac{NA}{NB} = \frac{\mu}{\nu}$$

Ἄρα ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος εἶναι ὁ κύκλος διαμέτρου ΓΔ.

Κατασκευή. Δοθέντων τῶν Α, Β καὶ τοῦ λόγου $\frac{\mu}{\nu}$ διαιροῦμεν ἁρμονικῶς τὸ τμῆμα ΑΒ, ὅπως εἰς τὸ πρόβλημα 340, καὶ εὑρίσκομεν τὰ Γ καὶ Δ. Μὲ διάμετρον τὴν ΓΔ γράφομεν τὸν κύκλον.

Σημείωσις. Ἐὰν εἶναι $\frac{\mu}{\nu} = 1$, τότε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β, δηλαδὴ ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΑΒ. Τοῦτο ἐξηγεῖται καὶ διὰ τῆς προηγουμένης κατασκευῆς, διότι τὸ μὲν Γ θὰ ἦτο τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΑΒ, τὸ δὲ Δ θὰ εἶχεν ἀπομακρυνθῆ εἰς τὸ ἄπειρον. Ἄρα ὁ κύκλος διαμέτρου ΓΔ θὰ εἶχεν ἄπειρον εἰς τὸ μῆκος ἀκτῖνα, ἑπομένως θὰ εἶχε ἐκφυλισθῆ εἰς εὐθεῖαν διερχομένην ἐκ τοῦ μέσου τοῦ ΑΒ καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Ὁ προηγούμενος γεωμετρικὸς τόπος καλεῖται **ἀπολλώνιος κύκλος,** ἐξ ὀνόματος τοῦ μελετήσαντος αὐτὸν Ἕλληνος μαθηματικοῦ Ἀπολλωνίου (περὶ τὸ 247 π.Χ.).

Ἐν γένει, ἀπολλώνιος κύκλος, ὡς πρὸς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, καλεῖται κάθε κύκλος διαμέτρου ΓΔ, ὅπου τὰ Γ καὶ Δ εἶναι ἁρμονικὰ συζυγῆ τῶν Α καὶ Β. Ἑπομένως ὑπάρχουν ἄπειροι ἀπολλώνιοι κύκλοι, ὡς πρὸς δύο σημεῖα Α καὶ Β. Διὰ νὰ ὁρισθῇ δὲ εἷς ἐξ αὐτῶν, δοθέντων τῶν Α καὶ Β, χρειάζεται νὰ δοθῇ ὁ λόγος τομῆς $\frac{\mu}{\nu}$, ἢ ἓν ἐκ τῶν σημείων Γ καὶ Δ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

596. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται ἡ βάσις α, ἡ διάμεσος μ_α καὶ ὁ λόγος $\frac{\mu}{\nu}$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

597. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται ἡ βάσις α, ἡ γωνία $\widehat{A} = \omega$ καὶ ὁ λόγος $\frac{\mu}{\nu}$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

598. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ βάσις α, τὸ ὕψος υ_α καὶ ὁ λόγος $\frac{\mu}{\nu}$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

599. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῆς βάσεώς του α, τοῦ λόγου $\frac{\mu}{\nu}$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν καὶ τῆς γωνίας $\widehat{B}$.

600. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται ἡ πλευρὰ β καὶ ὁ λόγος $\frac{\mu}{\nu}$ τῆς ὑποτεινούσης πρὸς τὴν ἄλλην κάθετον πλευράν.

601. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται ἡ πλευρὰ α, ἡ διχοτόμος δ_α καὶ ὁ λόγος $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\mu}{\nu}$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

Β΄.

602. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α, $\beta^2 - \gamma^2 = \lambda^2$, ἔνθα λ δεδομένον τμῆμα καὶ τοῦ σημείου Δ, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α τέμνει τὴν ΒΓ.

603. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα δύο δοθέντες κύκλοι (C_1) καὶ (C_2) φαίνονται ὑπὸ ἴσας γωνίας.

604. Δίδονται ἐπ' εὐθείας διαδοχικῶς τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\widehat{AMB} = \widehat{BM\Gamma} = \widehat{\Gamma M\Delta}$.

ΔΥΝΑΜΙΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΠΡΟΣ ΚΥΚΛΟΝ

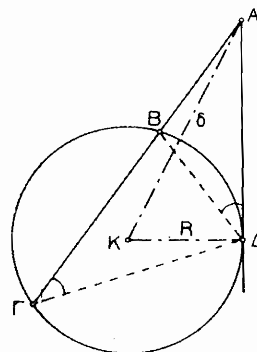
342. Θεώρημα. Ἔστω κύκλος (Κ, R) καὶ σημεῖον Α τοῦ ἐπιπέδου του. Ἐὰν διὰ τοῦ Α θεωρήσωμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν, τέμνουσαν τὸν κύκλον εἰς τὰ Β καὶ Γ, τὸ γινόμενον ΑΒ·ΑΓ εἶναι σταθερόν, ἤτοι τὸ αὐτὸ δι' οἱανδήποτε τέμνουσαν.

Ἀπόδειξις. Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, ἤτοι :

i) Τὸ σημεῖον Α εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ κύκλου (Κ, R) (σχ. 339). Φέρομεν καὶ τὴν ἐφαπτομένην ΑΔ καὶ τὰς ΔΒ καὶ ΔΓ. Τότε παρατηροῦμεν ὅτι :

$$\overset{\triangle}{AB\Delta} \approx \overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$$

διότι ἔχουν τὴν γωνίαν $\widehat{A}$ κοινὴν καὶ $\widehat{A\Delta B} = \widehat{\Gamma}$ (ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης, § 205). Ἄρα θὰ εἶναι :



Σχ. 339

$$\frac{AB}{A\Delta} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} \Rightarrow$$

$$(1) \qquad \Rightarrow AB \cdot A\Gamma = A\Delta^2$$

Ἀλλὰ τὸ μῆκος τῆς ἐφαπτομένης ΑΔ εἶναι ὡρισμένον καὶ ἀνεξάρτητον τῆς θέσεως τῆς τεμνούσης ΑΒΓ. Ἄρα, ἐκ τῆς σχέσεως (1), ἕπεται ὅτι τὸ γινόμενον ΑΒ · ΑΓ εἶναι σταθερόν.

Τὴν σχέσιν (1) δυνάμεθα νὰ τὴν μετασχηματίσωμεν, φέροντες τὴν ΑΚ = δ καὶ τὴν ἀκτῖνα ΚΔ = R. Τότε, ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΚ, λαμβάνομεν :

$A\Delta^2 = \delta^2 - R^2$ καὶ ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$\mathbf{AB \cdot A\Gamma = \delta^2 - R^2.}$$

ii) Τὸ Α εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ κύκλου (Κ, R). Ἔστω ΒΑΓ τυχοῦσα τέμνουσα διερχομένη διὰ τοῦ Α (σχ. 340). Φέρομεν καὶ τὴν διάμετρον ΔΕ, ἡ

ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ Α, καὶ τὰς ΒΔ καὶ ΓΕ. Τότε παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι :

$$\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Delta}} \approx \overset{\Delta}{\mathrm{AE\Gamma}}$$

διότι ἔχουν τὰς γωνίας των $\widehat{A}$ ἴσας, ὡς κατὰ κορυφήν, καὶ $\widehat{B}=\widehat{E}$, ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς τὸ αὐτὸ τόξον $\widehat{\Gamma\Delta}$. Ἄρα θὰ εἶναι :

$$\frac{AB}{AE}=\frac{A\Delta}{A\Gamma} \Rightarrow$$

(2) $$AB \cdot A\Gamma = A\Delta \cdot AE$$

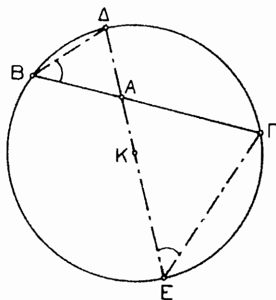
Ἀλλὰ εἶναι :

(4) $$A\Delta \cdot AE = (R-\delta)(R+\delta) = R^2-\delta^2$$

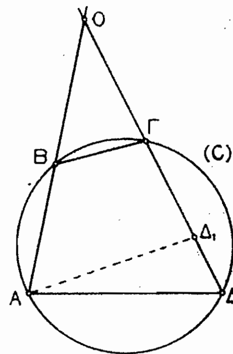
ὅπου ἐτέθη ΑΚ = δ. Ἄρα ἡ σχέσις (2) γράφεται :

$$\mathbf{AB \cdot A\Gamma = R^2-\delta^2}$$

ἤτοι τὸ γινόμενον ΑΒ · ΑΓ εἶναι σταθερόν.



Σχ. 340



Σχ. 341

343. Ὁρισμός. Δύναμις σημείου Α ὡς πρὸς κύκλον (Κ,R) καλεῖται τὸ σταθερὸν γινόμενον ΑΒ·ΑΓ, ὅπου τὰ Β καὶ Γ εἶναι κοινὰ σημεῖα τοῦ κύκλου καὶ τυχούσης εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ Α.

Ἡ δύναμις τοῦ Α, ὡς πρὸς τὸν κύκλον (Κ, R), συμβολίζεται $\mathfrak{D}A/(K, R)$.

Ἐὰν τὸ Α εἶναι ἐκτὸς τοῦ κύκλου, εἶναι $\mathfrak{D}A/(K, R) = \delta^2 - R^2 = A\Delta^2$ (σχ. 339), ὅπου δ = ΚΑ καὶ ΑΔ τὸ ἐφαπτόμενον τμῆμα ἐκ τοῦ Α.

Ἐὰν τὸ Α εἶναι ἐντὸς τοῦ κύκλου εἶναι $\mathfrak{D}A/(K, R) = R^2 - \delta^2$.

Τέλος, ἐὰν τὸ Α εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ κύκλου, εἶναι δ = R καὶ αἱ προηγούμεναι σχέσεις δίδουν $\mathfrak{D}A/(K, R) = R^2 - R^2 = 0$, ἤτοι διὰ σημεῖον τοῦ κύκλου ἡ δύναμις εἶναι μηδενική.

344. Θεώρημα. Ἔστω τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ Ο τὸ σημεῖον τομῆς τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ αὐτοῦ. Μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα τοῦτο εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, εἶναι :

$$\mathbf{OA \cdot OB = O\Gamma \cdot O\Delta}$$

Ἀπόδειξις. i) Εἶναι ἀναγκαία. Πράγματι, ἔστω ὅτι τὸ ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραγραμμένον εἰς κύκλον (C) (σχ. 341). Τότε ἕκαστον τῶν γινομένων

ΟΑ · ΟΒ καὶ ΟΓ · ΟΔ παριστᾷ τὴν δύναμιν τοῦ σημείου Ο πρὸς τὸν κύκλον (C), ἐπομένως εἶναι :

(1) **ΟΑ · ΟΒ = ΟΓ · ΟΔ**

ii) Εἶναι ἱκανή. Ἐνῷ ἰσχύει ἡ σχέσις (1), ἔστω ὅτι τὸ ΑΒΓΔ δὲν εἶναι ἐγγράψιμον. Τότε γράφομεν τὸν κύκλον, ποὺ ὁρίζουν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ καὶ ἔστω ὅτι οὗτος τέμνει τὴν ΟΓ εἰς τὸ $Δ_1$. Ἄρα τὸ $ΑΒΓΔ_1$ εἶναι ἐγγράψιμον. Τότε θὰ εἶναι :

(2) $ΟΑ \cdot ΟΒ = ΟΓ \cdot ΟΔ_1$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι :

(3) $ΟΔ_1 = ΟΔ$

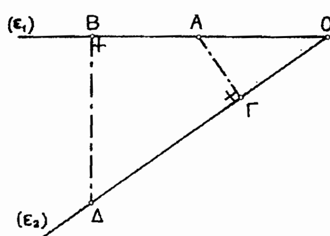
Ἂς σημειωθῇ ὅτι τὸ $Δ_1$ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ΟΓ, διότι, ἐὰν ἦτο ἐπὶ τῆς ἀντιθέτου ἡμιευθείας, τὸ Ο θὰ ἦτο ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου, ὅπερ ἄτοπον, διότι τὸ Ο εὑρίσκεται εἰς τὴν προέκτασιν τῆς χορδῆς ΑΒ καὶ ἐπομένως ἐκτὸς τοῦ κύκλου. Ἄρα, ἐκ τῆς σχέσεως (3) ἕπεται ὅτι τὸ $Δ_1$ συμπίπτει μὲ τὸ Δ. Ἑπομένως τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ τὸ κάτωθι θεώρημα :

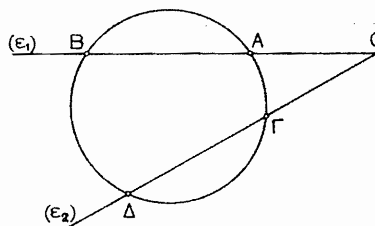
345. Θεώρημα. Ἔστω τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ Θ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων του ΑΓ καὶ ΒΔ. Μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα τοῦτο εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, εἶναι :

ΘΑ · ΘΓ = ΘΒ · ΘΔ

346. Μεταφορὰ γινομένου. Εἰς πολλὰ γεωμετρικὰ θέματα ἀπαιτεῖται ἡ μεταφορὰ ἑνὸς γινομένου ΟΑ · ΟΒ, ὅπου τὰ σημεῖα Ο, Α, Β κεῖνται ἐπ' εὐθείας $(ε_1)$, ἐπὶ ἄλλης εὐθείας $(ε_2)$, διερχομένης διὰ τοῦ Ο. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται κατὰ τοὺς ἑξῆς δύο τρόπους :



Σχ. 342



Σχ. 343

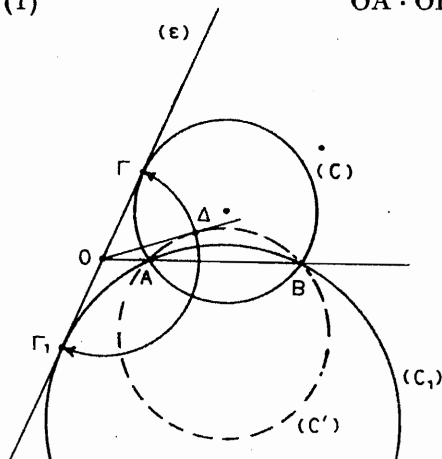
i) Ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὴν $ΑΓ \perp (ε_2)$ καὶ ἐκ τοῦ Β φέρομεν τὴν $ΒΔ \perp (ε_1)$ (σχ. 342). Τότε εἶναι ΟΑ · ΟΒ = ΟΓ · ΟΔ διότι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον.

ii) Γράφομεν τυχόντα κύκλον διερχόμενον διὰ τῶν Α καὶ Β, ὁ ὁποῖος νὰ τέμνῃ τὴν $(ε_2)$ εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ (σχ. 343). Τότε εἶναι ΟΑ · ΟΒ = ΟΓ · ΟΔ.

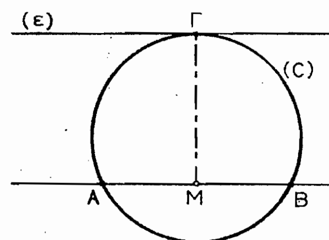
347. Πρόβλημα. Νὰ γραφῇ κύκλος διερχόμενος διὰ δύο δοθέντων σημείων καὶ ἐφαπτόμενος δοθείσης εὐθείας.

Ἀνάλυσις. Ἔστωσαν Α καὶ Β τὰ δοθέντα σημεῖα καὶ (ε) ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα (σχ. 344). Ὑποθέτομεν ὅτι τὸ πρόβλημα ἔχει λυθῇ καὶ ἔστω (C) ὁ ζητούμενος κύκλος, ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τῆς (ε) εἰς τὸ σημεῖον Γ. Ὁ κύκλος (C) προσδιορίζεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β καὶ Γ. Ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ λοιπὸν ἡ θέσις τοῦ Γ ἐπὶ τῆς (ε). Πρὸς τοῦτο, θεωροῦμεν τὸ σημεῖον Ο τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν (ε) καὶ ΑΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι σαφῶς καθωρισμένον. Τότε θὰ εἶναι (§ 342)

(1) $$ΟΑ \cdot ΟΒ = ΟΓ^2$$



Σχ. 344



Σχ. 345

Σύνθεσις - Κατασκευή. Γράφομεν βοηθητικὸν κύκλον (C′) μὲ μόνην ἀπαίτησιν νὰ διέρχεται διὰ τῶν Α καὶ Β. Ἐκ τοῦ Ο φέρομεν ἐφαπτομένην ΟΔ αὐτοῦ. Τότε εἶναι :

(2) $$ΟΑ \cdot ΟΒ = ΟΔ^2$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι :

(3) $$ΟΓ = ΟΔ$$

Μεταφέρομεν τότε τὸ μῆκος ΟΔ εἰς τὸ ΟΓ ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε) καὶ διὰ τῶν Α, Β καὶ Γ γράφομεν τὸν κύκλον (C), ὁ ὁποῖος εἶναι ὁ ζητούμενος.

Ἀπόδειξις. Πράγματι, ἐκ τῶν (2) καὶ (3) ἕπεται ὅτι :

$$ΟΑ . ΟΒ = ΟΓ^2$$

Ἑπομένως ἡ ΟΓ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου (C).

Διερεύνησις. Ἐφ' ὅσον αἱ εὐθεῖαι (ε) καὶ ΑΒ δὲν εἶναι παράλληλοι, ὑπάρχει πάντοτε τὸ σημεῖον Ο καί, ἐὰν τοῦτο εἶναι ἐκτὸς τοῦ τμήματος ΑΒ, ὑπάρχουν πάντοτε δύο λύσεις, οἱ κύκλοι (C) καὶ (C_1), οἱ ὁποῖοι προσδιορίζονται ἀπὸ τὰς τριάδας τῶν σημείων Α, Β, Γ καὶ Α, Β, $Γ_1$, ὅπου τὰ Γ καὶ $Γ_1$ λαμβάνονται ἑκατέρωθεν τοῦ Ο ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε).

Ἐὰν ΑΒ//(ε), ὑπάρχει μία λύσις, ὁ κύκλος (C) (σχ. 345), ὁ ὁποῖος

16

προσδιορίζεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β,Γ ὅπου τὸ Γ εἶναι ἡ τομὴ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ ΑΒ μετὰ τῆς (ε).

Ἐὰν τέλος τὸ σημεῖον Ο τομῆς τῶν ΑΒ καὶ (ε) ἦτο ἐσωτερικὸν τοῦ τμήματος ΑΒ, δὲν θὰ ὑπῆρχε λύσις, διότι τότε τό Ο θὰ ἦτο ἐσωτερικὸν καὶ τοῦ βοηθητικοῦ κύκλου (C′), ἑπομένως δὲν θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ φέρωμεν δι' αὐτοῦ τὸ ἐφαπτόμενον τμῆμα ΟΔ, ὥστε ἐν συνεχείᾳ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ Γ ἐπὶ τῆς (ε).

Ἐξετάσατε τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ Ο συμπίπτει μετὰ τοῦ Α ἢ τοῦ Β.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΕΙΣ ΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ

348. Ὡρισμένοι τύποι ἐξισώσεων δευτέρου βαθμοῦ ἐπιδέχονται καὶ γεωμετρικὴν λύσιν, ὅταν δεχθῶμεν ὅτι οἱ συντελεσταὶ καὶ ἡ ἄγνωστος μεταβλητὴ παριστοῦν τὰ μέτρα εὐθυγράμμων τμημάτων.

Δίδομεν τὴν γεωμετρικὴν λύσιν τριῶν τύπων ἐξισώσεων δευτέρου βαθμοῦ.

i) $x^2 + 2\alpha x - \beta^2 = 0$

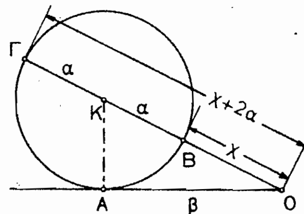
ii) $x^2 - 2\alpha x - \beta^2 = 0$

iii) $x^2 - 2\alpha x + \beta^2 = 0$

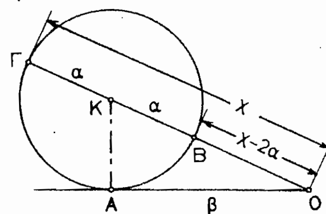
ὅπου τὰ α καὶ β εἶναι τὰ μέτρα δοθέντων εὐθυγράμμων τμημάτων.

i) Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται :

$$x(x + 2\alpha) = \beta^2.$$



Σχ. 346



Σχ. 347

Γράφομεν κύκλον ἀκτῖνος α καὶ φέρομεν εἰς τυχὸν σημεῖον Α αὐτοῦ ἐφαπτομένην, ἐπὶ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν τμῆμα ΑΟ = β (σχ. 346). Ἐὰν Κ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, φέρομεν τὴν ΟΚ, ἡ ὁποία τέμνει τὸν κύκλον εἰς τὰ Β καὶ Γ.

Τὸ τμῆμα ΟΒ εἶναι τὸ ζητούμενον x, διότι εἶναι :

$$OB \cdot O\Gamma = OA^2 \quad \text{ἢ}$$
$$x(x + 2\alpha) = \beta^2$$

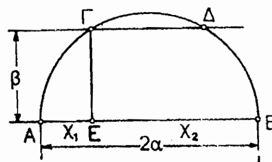
ii) Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται :

$$x(x - 2\alpha) = \beta^2$$

Ἡ ἰδία κατασκευὴ μὲ τὴν προηγουμένην, (σχ. 347), ἀλλ' ἐδῶ τὸ τμῆμα x εἶναι τὸ ΟΓ. Πράγματι εἶναι :

$$ΟΓ \cdot ΟΒ = ΟΑ^2 \text{ ἢ}$$
$$x(x - 2\alpha) = \beta^2$$

iii) $x^2 - 2\alpha x + \beta^2 = 0$. Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν x_1 καὶ x_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως, θὰ ἔχωμεν $x_1 + x_2 = 2\alpha$ καὶ $x_1 x_2 = \beta^2$. Τότε κατασκευάζομεν ἡμικύκλιον διαμέτρου ΑΒ $= 2\alpha$ καὶ φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον τῆς διαμέτρου εἰς ἀπόστασιν β (σχ. 348). Αὕτη ἔστω ὅτι τέμνει τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὰ Γ καὶ Δ. Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν τὴν ΓΕ ⊥ ΑΒ καὶ τότε ἐπὶ τῆς ΑΒ ὁρίζονται δύο τμήματα ΑΕ $= x_1$ καὶ ΕΒ $= x_2$ τὰ ὁποῖα εἶναι αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. Πράγματι εἶναι :



Σχ. 348

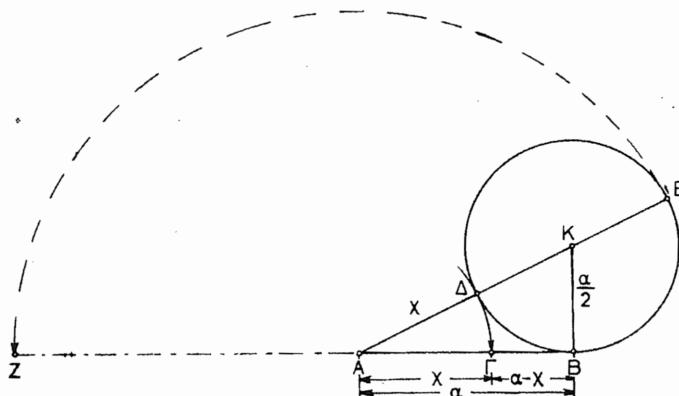
$$x_1 + x_2 = ΑΒ = 2\alpha \quad \text{καὶ} \quad x_1 x_2 = ΓΕ^2 = \beta^2 \ (\S\ 298)$$

Διὰ νὰ ὑπάρχῃ λύσις, πρέπει προφανῶς νὰ εἶναι $\beta \leqq \alpha$, ὅπου εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ $\beta = \alpha$ ἔχομεν $x_1 = x_2 = \alpha$.

Καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις οἱ συντελεσταὶ α, β, καθὼς καὶ ἡ ἄγνωστος μεταβλητὴ x, ὑποτίθενται ἀριθμοὶ θετικοί, ὡς παριστῶντες τὰ μέτρα εὐθυγράμμων τμημάτων.

349. Διαίρεσις εὐθυγράμμου τμήματος εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον. (Χρυσῆ τομή).

Πρόβλημα. Δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο μέρη, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ μεγαλύτερον νὰ εἶναι μέσον ἀνάλογον τοῦ μικροτέρου μέρους καὶ ὁλοκλήρου τοῦ τμήματος.



Σχ. 349

Λύσις. Ἔστω ΑΒ $= \alpha$ τὸ μῆκος τοῦ δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος καὶ Γ τὸ ζητούμενον σημεῖον διαιρέσεως (σχ. 349). Ἐὰν καλέσωμεν τὸ

μῆκος τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος ΑΓ $= x$, τότε θὰ εἶναι ΓΒ $= \alpha - x$ καὶ θὰ πρέπει νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις : $ΑΓ^2 = ΑΒ \cdot ΓΒ$ ἤ

$$(1) \qquad x^2 = \alpha(\alpha - x)$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται $x^2 + \alpha x - \alpha^2 = 0$ καὶ ἀνάγεται εἰς τὴν μορφὴν (i) τῆς προηγουμένης παραγράφου. Ἡ κατασκευὴ εἶναι ἡ ἰδία, ἤτοι γράφομεν κύκλον $\left(Κ, \frac{\alpha}{2}\right)$, ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τοῦ τμήματος ΑΒ $= \alpha$ εἰς τὸ ἄκρον αὐτοῦ Β. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὴν διάμετρον ΑΔΚΕ. Τότε τὸ μῆκος ΑΔ εἶναι τὸ ζητούμενον μῆκος x, διότι εἶναι : $ΑΔ \cdot ΑΕ = ΑΒ^2$ ἢ $x(x + \alpha) = \alpha^2$, ἡ ὁποία γράφεται $x^2 + \alpha x - \alpha^2 = 0$ ἢ $x^2 = \alpha(\alpha - x)$. Ἡ τελευταία εἶναι ἡ ἰδία μὲ τὴν ἐξίσωσιν (1). Μεταφέρομεν τότε τὸ μῆκος ΑΔ εἰς τὸ ΑΓ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΑΒ $= \alpha$ καὶ οὕτως ἐπιτυγχάνομεν τὴν διαίρεσιν τοῦ ΑΒ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, ἤτοι $ΑΓ^2 = ΑΒ \cdot ΓΒ$.

Παρατηρήσεις i) Τὴν σχέσιν $ΑΔ \cdot ΑΕ = ΑΒ^2$ δυνάμεθα νὰ τὴν γράψωμεν καὶ ὡς ἑξῆς: $(ΑΕ - ΔΕ) \cdot ΑΕ = ΑΒ^2$ ἢ $ΑΕ^2 = ΑΕ \cdot ΔΕ + ΑΒ^2$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΔΕ = ΑΒ$, ἔχομεν $ΑΕ^2 = ΑΕ \cdot ΑΒ + ΑΒ^2 = ΑΒ \cdot (ΑΕ + ΑΒ)$. Καὶ ἂν λάβωμεν ἐπὶ τῆς ΒΑ (πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α) τμῆμα $ΑΖ = ΑΕ$, εὑρίσκομεν $ΑΖ^2 = ΒΑ \cdot ΒΖ$. Ὥστε καὶ τὸ σημεῖον Ζ διαιρεῖ τὴν ΑΒ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, μὲ τὴν ἔννοιαν τῆς ἐξωτερικῆς διαιρέσεως.

ii) Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2 = \alpha(\alpha - x)$ ἢ $x^2 + \alpha x - \alpha^2 = 0$ εἶναι : $x_1 = \frac{-\alpha + \alpha\sqrt{5}}{2}$ καὶ $x_2 = \frac{-\alpha - \alpha\sqrt{5}}{2}$. Ἐκ τῶν δύο αὐτῶν ριζῶν ἡ x_1 εἶναι ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ ΑΓ καὶ ἡ x_2 εἶναι ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ ΑΖ, ἤτοι $(ΑΓ) = \frac{\alpha(\sqrt{5} - 1)}{2}$ καὶ $(ΑΖ) = \frac{-\alpha(\sqrt{5} + 1)}{2}$.

Σημείωσις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐτέθη ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου ὡς **διαίρεσις εὐθυγράμμου τμήματος εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.** Μεταγενεστέρως ἡ διαίρεσις αὕτη ἀπεκλήθη **χρυσῆ τομή,** ὅπως ἀναφέρει ὁ Ohm, διότι ἐθεωρήθη ὡς ἡ πλέον ἁρμονικὴ διαίρεσις ἑνὸς τμήματος εἰς δύο ἄνισα μέρη οὕτως, ὥστε τὸ ἓν νὰ μὴ εἶναι ἀντιαισθητικῶς μεγαλύτερον ὡς πρὸς τὸ ἄλλο. Ἡ διαίρεσις αὕτη χρησιμοποιεῖται καὶ εἰς τὴν ἀρχιτεκτονικήν, πιστεύεται δὲ ὅτι ὑφίσταται καὶ εἰς τὴν φύσιν, ὅπως π.χ. τὸ ὕψος τοῦ ἀνθρωπίνου σώματος εἶναι διῃρημένον εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον ἀπὸ τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἡ μέση τοῦ ἀνθρώπου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

605. Σημεῖον Δ ἀπέχει κατὰ 10 cm. ἀπὸ τὸ κέντρον κύκλου ἀκτῖνος 8 cm. Διὰ τοῦ Δ φέρομεν τὴν τέμνουσαν ΔΑΒ, ὁρίζουσαν τὴν χορδὴν ΑΒ = 6 cm. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος ΔΒ.

606. Δίδεται κύκλος ἀκτῖνος 8 m. καὶ σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον 12 m. Ἄγομεν διὰ τοῦ Α εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὸν κύκλον κατὰ χορδὴν ΒΓ = 2m. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ΑΓ.

607. Δίδεται κύκλος ἀκτῖνος R = 12 cm καὶ σημεῖον Ε, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὸ

κέντρον κατὰ 6 cm. Φέρομεν τὴν χορδὴν ΑΕΒ, ἔχουσαν μῆκος 21 cm. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν τμημάτων ΑΕ καὶ ΕΒ.

608. Ἐντὸς κύκλου ἀκτῖνος 13 m λαμβάνομεν σημεῖον Δ, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον 11 m καὶ ἄγομεν τὴν ΑΔΒ. Ἂν τὸ τμῆμα ΔΒ αὐτῆς εἶναι τριπλάσιον τοῦ ΑΔ, νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ΑΒ.

609. Δύο κύκλοι τέμνονται εἰς τὰ Α καὶ Β. Ἀπὸ σημεῖον Σ τῆς εὐθείας ΑΒ φέρομεν δύο εὐθείας, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία τέμνει τὸν ἕνα κύκλον εἰς τὰ Γ καὶ Δ καὶ ἡ ἄλλη τὸν δεύτερον κύκλον εἰς τὰ Ε καὶ Ζ. Δείξατε ὅτι τὸ τετράπλευρον μὲ κορυφὰς τὰ σημεῖα Γ, Δ, Ε, Ζ εἶναι ἐγγράψιμον.

610. Ἐκ σημείου Μ, κειμένου ἐκτὸς κύκλου (C), φέρομεν τὸ ἐφαπτόμενον τμῆμα ΜΑ καὶ τυχοῦσαν τέμνουσαν ΜΒΓ. Δείξατε ὅτι εἶναι $\frac{AB^2}{A\Gamma^2} = \frac{MB}{M\Gamma}$.

Β΄.

611. Δίδεται γωνία $x\widehat{O}y$ καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐπὶ τῆς Ox. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς Oy οὕτως, ὥστε ἡ γωνία $A\widehat{M}B$ νὰ εἶναι μεγίστη.

612. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) καὶ σημεῖον Σ ἐκτὸς τῆς ζώνης των. Νὰ ἀχθῇ κάθετος ΑΒ ἐπὶ τῶν παραλλήλων οὕτως, ὥστε ἡ γωνία $A\widehat{\Sigma}B$ νὰ εἶναι μεγίστη.

613. Δίδονται δύο εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) καὶ σημεῖον Α. Ζητεῖται νὰ γραφῇ κύκλος διερχόμενος διὰ τοῦ Α καὶ ἐφαπτόμενος τῶν (ε_1) καὶ (ε_2).

614. Δίδεται κύκλος (O, R) καὶ σταθερὸν σημεῖον Α αὐτοῦ. Ἐπὶ τυχούσης εὐθείας (ε) διερχομένης διὰ τοῦ Α λαμβάνομεν σημεῖον Ι τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $IA \cdot IB = k^2$, ὅπου Β εἶναι τὸ δεύτερον σημεῖον τομῆς τῆς (ε) μετὰ τοῦ (O, R) καὶ k δοθὲν τμῆμα. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Ι.

615. Ἐκ σημείου Μ κειμένου ἐκτὸς κύκλου (C) φέρομεν τὴν διάμετρον ΜΒΑ καὶ τὸ ἐφαπτόμενον τμῆμα ΜΓ. Ἡ ἐκ τοῦ Μ κάθετος ἐπὶ τὴν ΜΑ τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Δ. Δείξατε ὅτι εἶναι $A\Gamma \cdot A\Delta = MA^2 - M\Gamma^2$.

616. Νὰ κατασκευασθοῦν γεωμετρικῶς αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $3x^2 - 2\lambda x = 12\mu^2$, ἔνθα λ καὶ μ εἶναι δοθέντα τμήματα.

617. Νὰ κατασκευασθοῦν γεωμετρικῶς αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2 - 8x + 15 = 0$.

618. Δίδεται ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ σημεῖον Δ, ἐκ τοῦ ὁποίου, ἐὰν φέρωμεν τὰς καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, νὰ σχηματισθῇ ὀρθογώνιον γνωστοῦ ἐμβαδοῦ λ^2.

619. Νὰ γραφῇ κύκλος διερχόμενος διὰ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β καὶ ἐφαπτόμενος δοθέντος κύκλου (K, R).

620. Δίδεται εὐθεῖα (ε), σημεῖον Α αὐτῆς καὶ σημεῖον Β ἐκτὸς αὐτῆς. Μὲ κέντρον τὸ Β νὰ γραφῇ κύκλος, ὁ ὁποῖος νὰ τέμνῃ τὴν (ε) εἰς τὰ Γ καὶ Δ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $A\Gamma \cdot A\Delta = k^2$, ὅπου k δεδομένον τμῆμα.

621. Ἀπὸ σημεῖον Σ ἐσωτερικὸν γωνίας $x\widehat{O}y$ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς τὰ Α καὶ Β, οὕτως, ὥστε τὸ τμῆμα ΑΒ νὰ διαιρῆται ὑπὸ τοῦ Σ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

622. Δοθέντος τοῦ μεγαλυτέρου (ἢ τοῦ μικροτέρου) μέρους ἑνὸς τμήματος, διαιρεθέντος εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, νὰ κατασκευασθῇ τὸ τμῆμα.

ΡΙΖΙΚΟΣ ΑΞΩΝ

350. Πρόβλημα. Δοθέντων δύο κύκλων (O_1, R_1) καὶ (O_2, R_2), νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας δυνάμεις, ὡς πρὸς τοὺς δύο κύκλους.

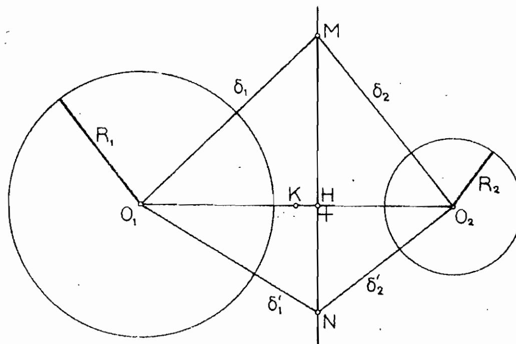
Λύσις. Ἔστω Μ ἓν τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου ἐκτὸς τῶν δύο κύκλων καὶ ἂς καλέσωμεν δ_1 καὶ δ_2 τὰς ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τὰ κέντρα O_1 καὶ O_2 ἀντιστοίχως (σχ. 350). Γνωρίζομεν (§ 343) ὅτι εἶναι : $\mathfrak{D}M/(O_1, R_1) = \delta_1^2 - R_1^2$ καὶ $\mathfrak{D}M/(O_2, R_2) = \delta_2^2 - R_2^2$. Ἐπειδὴ αἱ δυνάμεις τοῦ Μ, ὡς πρὸς τοὺς δύο κύκλους εἶναι ἴσαι, ἕπεται ὅτι :

(1) $$\delta_1^2 - R_1^2 = \delta_2^2 - R_2^2.$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι $R_1 \geqq R_2$, ἡ (1) γράφεται :

(2) $$\delta_1^2 - \delta_2^2 = R_1^2 - R_2^2.$$

Ἐκ τῆς (2) ἕπεται ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων δ_1 καὶ δ_2 τοῦ σημείου Μ ἀπὸ τὰ O_1 καὶ O_2 εἶναι σταθερά. Ἐνθυμούμεθα τότε τὸ δεύτε-



Σχ. 350

ρον θεώρημα τῆς διαμέσου (§ 309) διὰ τὸ τρίγωνον MO_1O_2. Φέρομεν τὴν ἐκ τοῦ Μ κάθετον ἐπὶ τὴν O_1O_2, ἡ ὁποία τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ Η καὶ ἔχομεν :

(3) $$\delta_1^2 - \delta_2^2 = 2\delta \cdot KH,$$

ὅπου $\delta = O_1O_2$ ἡ διάκεντρος τῶν δύο κύκλων καὶ Κ τὸ μέσον αὐτῆς. Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) ἕπεται ὅτι :

$$2\delta \cdot KH = R_1^2 - R_2^2 \text{ ἢ}$$

(4) $$\mathbf{KH = \frac{R_1^2 - R_2^2}{2\delta}}$$

Ἐκ τῆς (4) ἕπεται ὅτι τὸ μῆκος ΚΗ εἶναι σταθερόν. Ἄρα τὸ σημεῖον Η εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένον ἐπὶ τῆς διακέντρου, καὶ μάλιστα, ἐπειδὴ ὑπετέθη ὅτι $R_1 \geqq R_2$, ἐκ τῆς (2) ἕπεται ὅτι $\delta_1 \geqq \delta_2$, ἄρα τὸ Η, ὡς πρὸς τὸ Κ, θὰ κεῖται πρὸς τὸ μέρος τοῦ μικροτέρου κύκλου.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι, ἐφ' ὅσον ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Μ τοῦ

τόπου ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον διέρχεται διὰ τοῦ σταθεροῦ σημείου Η, ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ τόπου κεῖνται ἐπὶ τῆς καθέτου ταύτης.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω Ν τυχὸν σημεῖον τῆς ΜΗ, καθέτου εἰς τὸ Η ἐπὶ τὴν διάκεντρον O_1O_2. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ Ν ἔχει ἴσας δυνάμεις, ὡς πρὸς τοὺς δύο κύκλους. Ἃς καλέσωμεν δ_1', καὶ δ_2' τὰς ἀποστάσεις τοῦ Ν ἀπὸ τὰ κέντρα O_1 καὶ O_2 ἀντιστοίχως. Ἐφαρμόζομεν τὸ δεύτερον θεώρημα τῆς διαμέσου διὰ τὸ τρίγωνον NO_1O_2 καὶ ἔχομεν :

$$\delta_1'^2 - \delta_2'^2 = 2\delta \cdot KH$$

Ἀλλά, λόγῳ τῆς (4), ἡ προηγουμένη σχέσις γράφεται :

$$\delta_1'^2 - \delta_2'^2 = 2\delta \cdot \frac{R_1^2 - R_2^2}{2\delta}$$

ἢ

$$\delta_1'^2 - \delta_2'^2 = R_1^2 - R_2^2,$$

ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν :

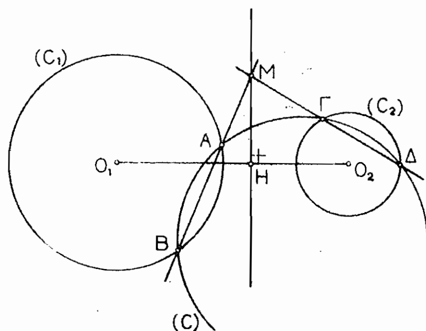
$$\delta_1'^2 - R_1^2 = \delta_2'^2 - R_2^2$$

Ἐκ τῆς τελευταίας φαίνεται ὅτι αἱ δυνάμεις τοῦ Ν, ὡς πρὸς τοὺς δύο κύκλους, εἶναι ἴσαι. Ἄρα ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος εἶναι ἡ εἰς τὸ σημεῖον Η κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον O_1O_2.

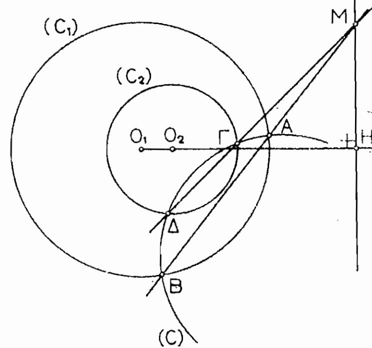
351. Ὁρισμός. Ριζικὸς ἄξων δύο κύκλων καλεῖται ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας δυνάμεις, ὡς πρὸς τοὺς δύο κύκλους.

Πόρισμα. Ὁ ριζικὸς ἄξων δύο κύκλων εἶναι εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον αὐτῶν.

Κατασκευὴ ριζικοῦ ἄξονος. Γενικὴ μέθοδος. Δοθέντων δύο κύκλων (C_1) καὶ (C_2), ἡ διεύθυνσις τοῦ ριζικοῦ ἄξονος αὐτῶν εἶναι γνωστή,



Σχ. 351



Σχ. 352

κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον αὐτῶν. Συνεπῶς ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν ἓν σημεῖον τοῦ ἄξονος καὶ ἐξ αὐτοῦ νὰ φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν διάκεντρον.

Πρὸς τοῦτο γράφομεν ἕνα βοηθητικὸν κύκλον (C), ὁ ὁποῖος νὰ τέμνῃ τοὺς (C_1) καὶ (C_2) εἰς τὰ σημεῖα Α, Β καὶ Γ, Δ ἀντιστοίχως (σχ. 351 ἢ 352).

Αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ, τεμνόμεναι ἐν γένει, ὁρίζουν σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον εἶναι σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν (C_1) καὶ (C_2). Πράγματι, εἶναι :

(1) $$ΜΑ \cdot ΜΒ = ΜΓ \cdot ΜΔ = \mathfrak{D}Μ/(C)$$

Ἀλλά :

(2) $$ΜΑ \cdot ΜΒ = \mathfrak{D}Μ/(C_1) \text{ καὶ}$$

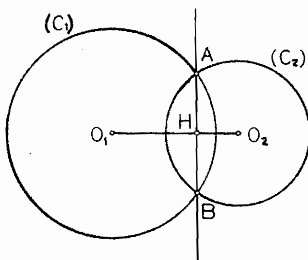
(3) $$ΜΓ \cdot ΜΔ = \mathfrak{D}Μ/(C_2)$$

Ἐκ τῶν (1), (2) καὶ (3) ἕπεται ὅτι :

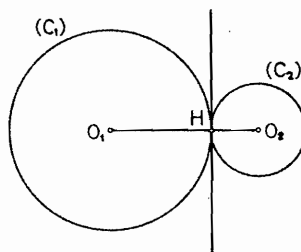
$$\mathfrak{D}Μ/(C_1) = \mathfrak{D}Μ/(C_2)$$

Ἑπομένως τὸ Μ εἶναι τὸ σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν (C_1) καὶ (C_2). Τότε ἐκ τοῦ Μ φέρομεν κάθετον ΜΗ ἐπὶ τὴν διάκεντρον αὐτῶν, ἡ ὁποία εἶναι ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν δύο κύκλων.

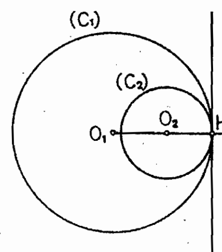
Εἰδικαὶ περιπτώσεις. i) Οἱ δύο κύκλοι τέμνονται (σχ. 353). Τότε ὁ ριζικὸς ἄξων αὐτῶν εἶναι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῶν Α καὶ Β. Τοῦτο εἶναι προφανές, ἀφοῦ τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῶν ἔχουν μηδενικὴν δύναμιν, ὡς πρὸς τοὺς δύο κύκλους. Ἄρα εἶναι σημεῖα τοῦ ριζικοῦ ἄξονος.



Σχ. 353



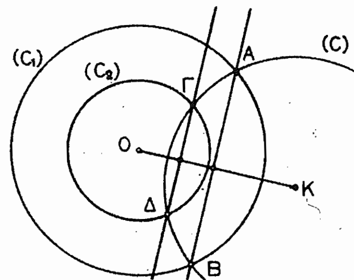
Σχ. 354



Σχ. 355

ii) Οἱ δύο κύκλοι ἐφάπτονται. Ἂν εἶναι Η τὸ σημεῖον ἐπαφῆς των, ἡ ἐκ τοῦ Η κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον εἶναι ὁ ριζικὸς ἄξων αὐτῶν (σχ. 354, 355), διότι τὸ Η, ὡς κοινὸν σημεῖον τῶν κύκλων (C_1) καὶ (C_2), ἔχει μηδενικὴν δύναμιν ὡς πρὸς αὐτούς. Ἄρα εἶναι σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος.

iii) Οἱ κύκλοι εἶναι ὁμόκεντροι. Τότε ριζικὸς ἄξων δὲν ὑπάρχει, διότι ὄχι μόνον δὲν γνωρίζομεν τὴν διεύθυνσίν του, δεδομένου ὅτι ἡ διεύθυνσις τῆς διακέντρου τῶν (C_1) καὶ (C_2) εἶναι ἀπροσδιόριστος, ἀλλὰ δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν οὔτε ἓν σημεῖον του. Πράγματι, ἐὰν Ο εἶναι τὸ κέντρον τῶν (C_1) καὶ (C_2) καὶ Κ τὸ κέντρον ἑνὸς βοηθητικοῦ κύκλου (C), ὁ ὁ-



Σχ. 356

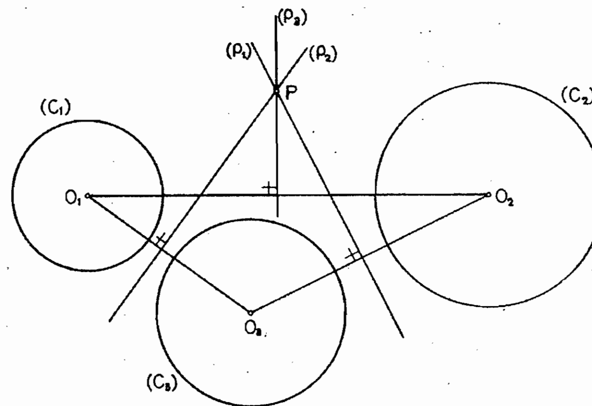
ποῖος τέμνει τοὺς (C_1) καὶ (C_2) εἰς τὰ Α, Β καὶ Γ, Δ (σχ. 356) ἀντιστοίχως, εἶναι ΑΒ//ΓΔ, ὡς κάθετοι ἀμφότεραι ἐπὶ τὴν ΟΚ. Ἑπομένως δὲν τέμνονται. Ἄρα δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος.

★ **352. Ριζικὸν κέντρον τριῶν κύκλων.** Ἄς θεωρήσωμεν τρεῖς κύκλους (C_1), (C_2) καὶ (C_3) καὶ ἔστωσαν (ρ_1) ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν (C_2) καὶ (C_3) καὶ (ρ_2) ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν (C_1) καὶ (C_3). Οἱ δύο οὗτοι ριζικοὶ ἄξονες ἐν γένει τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον Ρ καὶ τότε θὰ εἶναι ἀφ' ἑνὸς μὲν

(1) $$\mathfrak{D}P/(C_2) = \mathfrak{D}P/(C_3),$$

διότι τὸ Ρ ἀνήκει εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα (ρ_1), ἀφ' ἑτέρου δὲ

(2) $$\mathfrak{D}P/(C_1) = \mathfrak{D}P/(C_3),$$



Σχ. 357

διότι τὸ Ρ ἀνήκει εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα (ρ_2).
Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται :

$$\mathfrak{D}\Delta P/(C_1) = \mathfrak{D}P/(C_2)$$

τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι τὸ Ρ εἶναι σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος (ρ_3) τῶν κύκλων (C_1) καὶ (C_2). Ἄρα οἱ τρεῖς ριζικοὶ ἄξονες τῶν κύκλων (C_1), (C_2) (C_3), λαμβανομένων ἀνὰ δύο, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ρ, τὸ ὁποῖον καλεῖται **ριζικὸν κέντρον** τῶν τριῶν κύκλων, καὶ τὸ ὁποῖον ἔχει ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς αὐτούς.

Ἐὰν τὰ κέντρα τῶν τριῶν κύκλων κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, τότε ριζικὸν κέντρον δὲν ὑπάρχει, διότι οἱ τρεῖς ριζικοὶ ἄξονες θὰ εἶναι παράλληλοι ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν. Συμβατικῶς δεχόμεθα τότε ὅτι τὸ ριζικὸν κέντρον ἔχει ἀπομακρυνθῆ εἰς τὸ ἄπειρον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Β΄.

623. Ἐὰν ὁ ριζικὸς ἄξων δύο κύκλων δὲν τέμνῃ τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν, δείξατε ὅτι δὲν τέμνει καὶ τὸν ἄλλον.

624. Δίδεται κύκλος (Ο, R) καὶ σημεῖον Α. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ, διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι ΜΑ = ΜΒ, ὅπου ΜΒ εἶναι τὸ ἐφαπτόμενον τμῆμα ἐκ τοῦ Μ πρὸς τὸν κύκλον (Ο, R).

625. Δίδονται δύο κύκλοι (Κ, R) καὶ (Λ, ρ) καὶ ἔστω (δ) ὁ ριζικὸς ἄξων αὐτῶν. 'Εὰν ΜΑ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ τυχόντος σημείου Μ τοῦ κύκλου (Κ, R) ἀπὸ τὸν ριζικὸν ἄξονα, δείξατε ὅτι εἶναι $\mathfrak{D}M/(\Lambda, \rho) = 2K\Lambda \cdot MA$.

626. Δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ. Νὰ γραφῇ κύκλος, τοῦ ὁποίου τὰ ἐφαπτόμενα τμήματα ἀπὸ τὰ Α, Β, Γ νὰ ἔχουν δεδομένα μήκη α, β, γ ἀντιστοίχως.

627. 'Εὰν τρεῖς κύκλοι τέμνωνται ἀνὰ δύο, δείξατε ὅτι αἱ κοιναὶ χορδαὶ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ε΄ γυμνασίου.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

353. Ὁρισμός. Ἓν πολύγωνον καλεῖται **κανονικόν,** ὅταν ἔχῃ ὅλας τὰς πλευράς του ἴσας καὶ ὅλας τὰς γωνίας του ἴσας.

Ἓν κανονικὸν πολύγωνον δύναται νὰ εἶναι κυρτὸν (σχ. 358), ἢ ὑπὸ ὡρισμένας συνθήκας καὶ μὴ κυρτόν, ὁπότε θὰ καλῆται ἀστεροειδές, λόγῳ τοῦ σχήματός του. Μὲ τὰ μὴ κυρτὰ δὲν θὰ ἀσχοληθῶμεν.

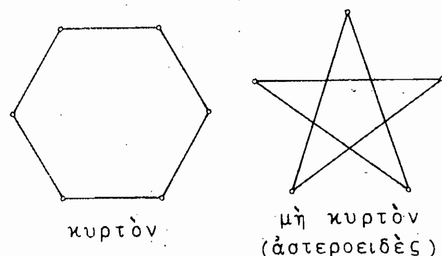
354. Κανονικὴ πολυγωνικὴ γραμμὴ καλεῖται ἡ τεθλασμένη γραμμὴ τῆς ὁποίας τὰ εὐθύγραμμα τμήματα εἶναι ὅλα ἴσα μεταξύ των καὶ ἐπὶ πλέον αἱ γωνίαι αἱ σχηματιζόμεναι ὑπ' αὐτῶν εἶναι ἴσαι.

355. Ὑπολογισμὸς τῆς γωνίας κανονικοῦ πολυγώνου. Ἐὰν ἓν κανονικὸν πολύγωνον ἔχῃ ν τὸ πλῆθος πλευράς, τότε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του εἶναι $2\nu - 4$ ὀρθαὶ (§ 106) καί, ἐπειδὴ ὅλαι αἱ γωνίαι του εἶναι ἴσαι μεταξύ των, ἕπεται ὅτι ἑκάστη εἶναι ἴση πρὸς $\frac{2\nu - 4}{\nu}$ ὀρθάς.

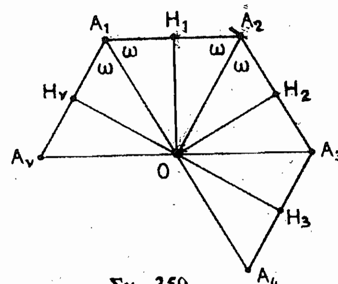
Παράδειγμα. Τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου ἑκάστη τῶν ἴσων γωνιῶν, εἶναι $\frac{2 \cdot 5 - 4}{5} = \frac{6}{5}$ ὀρθαὶ ἢ $\frac{6}{5} \cdot 90^0 = 108^0$.

356. Θεώρημα. Κάθε κανονικὸν πολύγωνον εἶναι ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον εἰς κύκλον.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τὸ κανονικὸν πολύγωνον $A_1A_2...A_\nu$, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι λ καὶ τὸ μέτρον ἑκάστης τῶν ἴσων γωνιῶν εἶναι $2\omega < 2^L$ (σχ. 359). Διχοτομοῦμεν τὰς γωνίας $\widehat{A_1}$ καὶ $\widehat{A_2}$. Αἱ διχοτόμοι τέμνονται εἰς σημεῖον Ο, διότι αὗται σχηματίζουν γωνίας ω μετὰ τῆς A_1A_2, μὲ ἄθροισμα



Σχ. 358



Σχ. 359

$\omega + \omega = 2\omega < 2^L$. Τὸ τρίγωνον OA_1A_2 εἶναι ἰσοσκελές, ὡς ἔχον τὰς παρὰ τὴν πλευρὰν A_1A_2 γωνίας ἴσας. Φέρομεν τὴν OA_3 καὶ παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι :

$$\overset{\Delta}{OA_1A_2} = \overset{\Delta}{OA_2A_3}$$

ὡς ἔχοντα $A_1A_2 = A_2A_3 = \lambda$, τὴν OA κοινὴν καὶ τὴν περιεχομένην τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίαν ἴσην πρὸς ω. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ τὸ OA_2A_3 ἰσοσκελές, συνεπῶς ἔχομεν :

$$OA_1 = OA_2 = OA_3.$$

Ὁμοίως λαμβάνομεν

$$OA_1 = OA_2 = \ldots = OA_\nu.$$

Ἄρα τὸ πολύγωνον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον κέντρου O καὶ ἀκτῖνος OA_1.

Τὸ πολύγωνον πλέον δύναται νὰ χωρισθῇ εἰς ν τὸ πλῆθος ἴσα καὶ ἰσοσκελῆ τρίγωνα

$$\overset{\Delta}{OA_1A_2} = \overset{\Delta}{OA_2A_3} = \ldots = \overset{\Delta}{OA_\nu A_1}.$$

Τότε καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσα, ἤτοι $OH_1 = OH_2 = \ldots = OH_\nu$. Ἄρα ὁ κύκλος μὲ κέντρον τὸ O καὶ ἀκτῖνα OH_1, ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου καί, κατὰ συνέπειαν, τὸ πολύγωνον εἶναι περιγράψιμον περὶ αὐτόν.

Παρατήρησις. Τὸ σημεῖον O, ὡς κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κύκλου διὰ τὸ πολύγωνον $A_1A_2 \ldots A_\nu$, καλεῖται ἁπλῶς **κέντρον τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.** Ἡ ἀκτὶς OA_1 τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸ πολύγωνον κύκλου καλεῖται **ἀκτὶς τοῦ πολυγώνου** καὶ ἡ ἀκτὶς OH τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου καλεῖται **ἀπόστημα** αὐτοῦ. Ἡ γωνία $A_1\widehat{O}A_2$ καλεῖται **κεντρικὴ γωνία τοῦ πολυγώνου.** Αὐτὴ ἰσοῦται προφανῶς μὲ $\frac{360^\circ}{\nu}$ ἢ $\frac{4^L}{\nu}$, ὅπου ν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.

357. Γενικοὶ συμβολισμοί. Εἰς τὸ ἑξῆς θὰ συμβολίζωμεν μὲ :

λ_ν τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O, R) κανονικοῦ ν - γώνου.

α_ν τὸ ἀπόστημα ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O, R) κανονικοῦ ν - γώνου.

λ'_ν τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς περιγεγραμμένου περὶ κύκλον (O, R) κανονικοῦ ν - γώνου.

P_ν τὴν περίμετρον ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O R) κανονικοῦ ν - γώνου.

P'_ν τὴν περίμετρον περιγεγραμμένου περὶ κύκλον (O, R) κανονικοῦ ν - γώνου.

E_ν τὸ ἐμβαδὸν ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O, R) κανονικοῦ ν - γώνου.

E'_ν τὸ ἐμβαδὸν περιγεγραμμένου περὶ κύλον (O, R) κανονικοῦ ν - γώνου.

358. Θεώρημα. Ἐὰν κύκλος διαιρεθῇ εἰς ν ἴσα τόξα, τὰ διαιρετικὰ

σημεῖα εἶναι κορυφαὶ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ν-γώνου, αἱ δὲ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ σημεῖα ταῦτα ὁρίζουν ἐπίσης περιγεγραμμένον κανονικὸν ν-γωνον.

'Απόδειξις. Ἔστω κύκλος κέντρου Ο, ὁ ὁποῖος ἔχει διαιρεθῆ εἰς ν ἴσα τόξα διὰ τῶν σημείων $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ (σχ. 360). Τότε θὰ εἶναι :

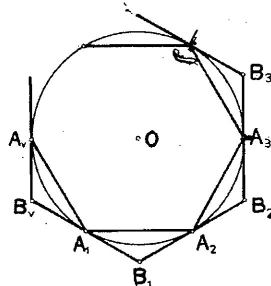
(1) $$A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_\nu A_1$$

ὡς χορδαὶ ἴσων τόξων τοῦ αὐτοῦ κύκλου. 'Επὶ πλέον δὲ ἔχομεν :

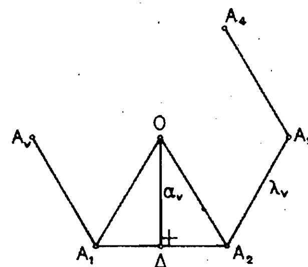
(2) $$\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \ldots = \widehat{A_\nu},$$

διότι εἶναι γωνίαι ἐγγεγραμμέναι εἰς ἴσα τόξα τοῦ αὐτοῦ κύκλου. 'Εκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι τὸ πολύγωνον $A_1A_2\ldots A_\nu$ εἶναι κανονικόν.

'Εὰν εἰς τὰ σημεῖα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ φέρωμεν ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου, αὗται τεμνόμεναι ὁρίζουν τὰ σημεῖα $B_1, B_2, \ldots, B_\nu$, τὰ ὁποῖα εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ ν - γώνου. Πράγματι τὰ τρίγωνα $B_1A_1A_2$, $B_2A_2A_3, \ldots$, $B_\nu A_\nu A_1$ εἶναι ἰσοσκελῆ, διότι ἐκ τοῦ οἱουδήποτε σημείου B_k, $k = 1,2,\ldots,\nu$ ἄγονται ἴσα ἐφαπτόμενα τμήματα πρὸς τὸν κύκλον. Τὰ τρίγωνα εἶναι καὶ ἴσα διότι ἔχουν ἴσας βάσεις



Σχ. 360



Σχ. 361

αἱ δὲ παρὰ τὴν βάσιν αὐτῶν γωνίαι, ὡς σχηματιζόμεναι ὑπὸ ἴσων χορδῶν τοῦ αὐτοῦ κύκλου καὶ τῶν ἐφαπτομένων, εἶναι ἴσαι. Ἄρα :

$$B_1\overset{\Delta}{A_1}A_2 = B_2\overset{\Delta}{A_2}A_3 = \ldots = B_\nu\overset{\Delta}{A_\nu}A_1.$$

Τότε θὰ εἶναι καὶ

(3) $$\widehat{B_1} = \widehat{B_2} = \ldots = \widehat{B_\nu} \text{ καὶ}$$

(4) $$B_1B_2 = B_2B_3 = \ldots = B_\nu B_1$$

'Εκ τῶν (3) καὶ (4) ἕπεται ὅτι τὸ πολύγωνον $B_1B_2\ldots B_\nu$ εἶναι κανονικὸν καὶ ἔχει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν μὲ τὸ $A_1A_2\ldots A_\nu$. Τὸ περιγεγραμμένον κανονικὸν πολύγωνον $B_1B_2B_3\ldots B_\nu$, καλεῖται ἀντίστοιχον τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου $A_1A_2A_3\ldots A_\nu$ καὶ ἀντιστρόφως.

359. 'Εμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου. Θεώρημα. Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κανονικοῦ πολυγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἡμιπεριμέτρου του ἐπὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ.

'Απόδειξις. Ἔστω $A_1A_2\ldots A_\nu$ κανονικὸν πολύγωνον πλευρᾶς λ_ν, α_ν τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ καὶ Ο τὸ κέντρον του. (σχ. 361). Τοῦτο δύναται νὰ διαιρεθῆ

εἰς ν τὸ πλῆθος τρίγωνα ἴσα πρὸς τὸ OA_1A_2. Ἑπομένως, ἂν E_ν εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ, θὰ ἔχωμεν :

(1) $$E_\nu = \nu \cdot (OA_1A_2)$$

Ἀλλὰ $(OA_1A_2) = \frac{1}{2}\lambda_\nu\alpha_\nu$ καὶ ἡ σχέσις (1) γράφεται :

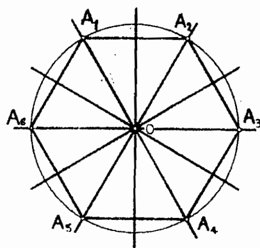
$$E_\nu = \nu \cdot \frac{1}{2}\lambda_\nu\,\alpha_\nu = \frac{\nu\lambda_\nu}{2}\,\alpha_\nu = \frac{P_\nu\alpha_\nu}{2}.$$

Ἄρα $$E_\nu = \frac{P_\nu\alpha_\nu}{2}$$

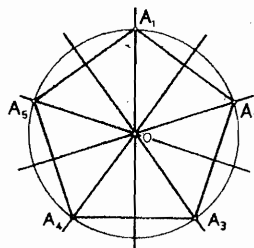
ὅπου P_ν ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου.

360. Συμμετρία εἰς κανονικὰ πολύγωνα. Θεώρημα. Κάθε κανονικὸν ν-γωνον ἔχει ν τὸ πλῆθος ἄξονας συμμετρίας.

Ἀπόδειξις. i) Ἔστω $\nu = 2k$ ἄρτιος. Αἱ κορυφαὶ τοῦ πολυγώνου τότε, ὡς σημεῖα τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὸ κύκλου, εἶναι ἀνὰ δύο ἀντιδιαμετρικὰ σημεῖα καὶ συνεπῶς ὁρίζουν k τὸ πλῆθος διαμέτρους, ἑκάστη ἐκ τῶν ὁποίων εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ πολυγώνου (σχ. 362). Ἐπὶ πλέον, ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου εἶναι ἀνὰ δύο παράλληλοι, ἡ μεσοκάθετος μιᾶς πλευρᾶς, διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου τοῦ πολυγώνου, εἶναι μεσοκάθετος καὶ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς, καὶ ἑπομένως ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος. Ἐπειδὴ ἔχομεν k τὸ πλῆθος ζεύγη παραλλήλων πλευρῶν, ἔχομεν k τοιούτους ἄξονας συμμετρίας. Ἄρα οἱ ἄξονες συμμετρίας τελικῶς εἶναι $k + k = 2k = \nu$ τὸ πλῆθος.



Σχ. 362



Σχ. 363

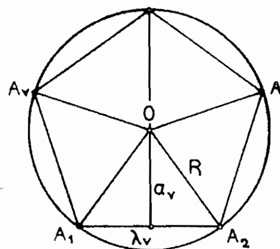
ii) Ἔστω ν περιττὸς (σχ. 363). Ἑκάστη διάμετρος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ πολύγωνον κύκλου, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ μιᾶς κορυφῆς, εἶναι μεσοκάθετος διὰ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν (διατί ;) καὶ συνεπῶς ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος. Οἱ ἄξονες οὗτοι εἶναι ν τὸ πλῆθος ὅσαι καὶ αἱ κορυφαὶ τοῦ πολυγώνου.

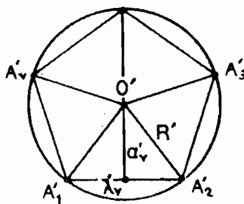
361. Ὁμοιότης εἰς τὰ κανονικὰ πολύγωνα. Θεώρημα. Δύο κανονικὰ πολύγωνα τοῦ αὐτοῦ πλήθους πλευρῶν εἶναι ὅμοια. Ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων καὶ ὁ λόγος τῶν ἀποστημάτων των ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον ὁμοιότητος αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἂς θεωρήσωμεν δύο κανονικὰ πολύγωνα $A_1A_2 \ldots A_\nu$, $A'_1A'_2 \ldots A'_\nu$ τοῦ αὐτοῦ πλήθους πλευρῶν ν (σχ. 364). Ἀπὸ τὰ κέντρα O καὶ O′ φέρομεν τὰς ἀκτῖνας $OA_1, OA_2, \ldots, OA_\nu$ καὶ $O'A'_1, O'A'_2, \ldots, O'A'_\nu$ καὶ διαιροῦμεν ἕκαστον πολύγωνον εἰς ν ἴσα καὶ ἰσοσκελῆ τρίγωνα. Ἐπειδὴ $A_1\widehat{O}A_2 = A'_1\widehat{O'}A'_2 = \frac{360^0}{\nu}$, ἕπεται ὅτι $A_1\overset{\Delta}{O}A_2 \approx A'_1\overset{\Delta}{O'}A'_2$. Ἄρα τὰ δύο κανονικὰ πολύγωνα εἶναι ὅμοια, διότι εἶναι διῃρημένα εἰς ἰσάριθμα ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα τρίγωνα. Ἐὰν λ_ν καὶ λ'_ν εἶναι αἱ πλευραὶ τῶν δύο πολυγώνων, ὁ λόγος ὁμοιότητος αὐτῶν μεταφέρεται προφανῶς καὶ εἰς τὰς ἀκτῖνας των καὶ εἰς τὰ ἀποστήματα, διότι ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα A_1OA_2 καὶ $A'_1OA'_2$ λαμβάνομεν $\frac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu} = \frac{OA_1}{O'A'_1} = \frac{R}{R'}$ καὶ $\frac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu} = \frac{\alpha_\nu}{\alpha'_\nu}$, ὡς ὁμόλογα ὕψη ὁμοίων τριγώνων.

Πόρισμα I. Ὁ λόγος τῶν περιμέτρων δύο ὁμοίων κανονικῶν πολυγώνων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν.

Πράγματι, ἂν P_ν καὶ P'_ν εἶναι αἱ περίμετροι αὐτῶν, ἔχομεν :





Σχ. 364

Σχ. 365

$$\frac{P_\nu}{P'_\nu} = \frac{\nu \cdot \lambda_\nu}{\nu \cdot \lambda'_\nu} = \frac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu} \qquad (3)$$

Πόρισμα II. Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων κανονικῶν πολυγώνων ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν.

Πράγματι, ἂν E_ν καὶ E'_ν εἶναι τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν, ἔχομεν (§ 359) :

$$\frac{E_\nu}{E'_\nu} = \frac{\frac{P_\nu \cdot \alpha_\nu}{2}}{\frac{P'_\nu \alpha'_\nu}{2}} = \frac{P_\nu}{P'_\nu} \cdot \frac{\alpha_\nu}{\alpha'_\nu} = \frac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu} \cdot \frac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu} = \left(\frac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu}\right)^2$$

★ **362. Πρόβλημα I. Δοθέντος κανονικοῦ ν-γώνου πλευρᾶς λ_ν καὶ ἀκτῖνος R νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἀπόστημα α_ν αὐτοῦ.**

Λύσις. Ἔστω $AB = \lambda_\nu$ ἡ πλευρὰ κανονικοῦ ν - γώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O, R) (σχ. 365). Φέρομεν τὴν $O\Delta \perp AB$. Ἐπομένως τὸ $O\Delta$ εἶναι τὸ ἀπόστημα α_ν τοῦ πολυγώνου. Ἐπὶ πλέον δὲ τὸ Δ εἶναι μέσον τῆς πλευρᾶς AB, διότι τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώ-

νου ΟΑΒ τὸ ὕψος ΟΔ εἶναι καὶ διάμεσος. Τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΔ ($\widehat{\Delta} = 1^{L}$) ἡ ὑποτείνουσα εἶναι ΟΑ = R καὶ ἡ κάθετος ΑΔ $= \frac{\lambda_\nu}{2}$. Ἄρα ἔχομεν $ΟΔ^2 = ΟΑ^2 - ΑΔ^2$ ἢ

$$\alpha_\nu^2 = R^2 - \left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2 = \frac{4R^2 - \lambda_\nu^2}{4},$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται ὅτι :

$$\alpha_\nu = \frac{\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}}{2}$$

★ **363. Πρόβλημα ΙΙ. Δοθέντος κανονικοῦ πολυγώνου πλευρᾶς λ_ν καὶ ἀκτῖνος R, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου μὲ διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.**

Λύσις. Ἔστω ΑΒ = λ_ν ἡ πλευρὰ κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (Ο, R). Ἐκ τοῦ κέντρου Ο φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ (σχ. 365), ἡ ὁποία συναντᾷ αὐτὴν εἰς τὸ Δ, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ μέσον τῆς ΑΒ καὶ τὸν κύκλον εἰς τὸ Γ. Ἡ ΑΓ εἶναι προφανῶς ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου πολυγώνου καὶ ἔστω $\lambda_{2\nu}$ τὸ μῆκος της. Αὐτη εἶναι ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΔΑΓ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι :

$$ΑΔ = \frac{\lambda_\nu}{2} \quad \text{καὶ}$$

ΔΓ = ΟΓ — ΟΔ = R — α_ν, ὅπου α_ν τὸ ἀπόστημα τοῦ δοθέντος πολυγώνου. Τοῦτο εἶναι :

$$\alpha_\nu = \frac{\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}}{2}$$

Τότε : $$ΔΓ = R - \alpha_\nu = \frac{2R - \sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}}{2}. \quad \text{Ἄρα :} \quad ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΔΓ^2 \quad \text{ἢ}$$

$$\lambda_{2\nu}^2 = \left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2 + \left(\frac{2R - \sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}}{2}\right)^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2} \quad \text{ἢ}$$

$$(1) \quad \lambda_{2\nu} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}} \quad \text{(Τύπος Ἀρχιμήδους)}$$

★ **364. Πρόβλημα ΙΙΙ. Δοθέντος κανονικοῦ ν-γώνου πλευρᾶς λ_ν καὶ ἀκτῖνος R, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου μὲ τὸ αὐτὸ πλῆθος πλευρῶν.**

Λύσις. Ἔστω ΑΒ = λ_ν ἡ πλευρὰ κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (Ο, R) (σχ. 366). Ἐκ τοῦ Ο φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ Δ καὶ τὸν κύκλον εἰς τὸ Γ. Εἰς τὸ Γ φέρομεν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου, ἡ ὁποία τέμνει τὰς προεκτάσεις τῶν ΟΑ καὶ ΟΒ εἰς τὰ Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως. Τότε ἡ ΕΖ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου μὲ τὸ αὐτὸ πλῆθος πλευρῶν. Διότι τὸ τρίγωνον ΟΕΖ, ὡς ἔχον τὸ ὕψος του ΟΓ καὶ διχοτόμον τῆς γωνίας $\widehat{O}$ αὐτοῦ, εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ ΟΑΒ μὲ σταθερὸν λόγον ὁμοιότητος $\frac{ΟΓ}{ΟΔ} = \frac{R}{\alpha_\nu}$. Ἑπομένως τὸ διὰ τοῦ τρόπου αὐτοῦ κατασκευαζόμενον πολύγωνον μὲ πλευρὰν τὴν ΕΖ διαιρεῖται εἰς τρίγωνα ὅμοια πρὸς τὰ ἀντίστοιχα τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου πλευρᾶς ΑΒ. Ἄρα εἶναι ὅμοιον πρὸς αὐτὸ καὶ ἑπομένως κανονικόν. Ἂς σημειωθῇ ἐπὶ πλέον ὅτι ὅλα τὰ περιγεγραμμένα (ἀντιστοίχως τὰ ἐγγεγραμμένα) κανονικὰ πολύγωνα περὶ τὸν

αὐτὸν κύκλον μὲ τὸ αὐτὸ πλῆθος πλευρῶν εἶναι ἴσα, διότι εἶναι ὅμοια μὲ λόγον ὁμοιότητος, ὁ ὁποῖος μεταφέρεται εἰς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου $\frac{R}{R} = 1$.

'Εκ τῶν $\overset{\Delta}{OEZ} \approx \overset{\Delta}{OAB}$ λαμβάνομεν :

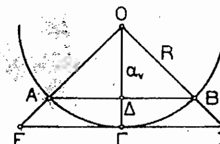
(1) $$\frac{EZ}{AB} = \frac{O\Gamma}{O\Delta}$$

Τὸ ΟΔ εἶναι τὸ ἀπόστημα τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου καὶ εἶναι ἴσον πρὸς $\alpha_\nu = \frac{\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}}{2}$

Τότε ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$\frac{\lambda_\nu'}{\lambda_\nu} = \frac{2R}{\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}}$$ ἢ

(2) $$\lambda_\nu' = \frac{2R\lambda_\nu}{\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}}$$



Σχ. 366

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

628. Νὰ εὑρεθῇ εἰς μοίρας ἡ γωνία τοῦ κανονικοῦ α) πενταγώνου, β) ὀκταγώνου, γ) δωδεκαγώνου.

629. Νὰ εὑρεθῇ εἰς μοίρας ἡ κεντρικὴ γωνία τοῦ κανονικοῦ : α) πενταγώνου, β) δεκαγώνου, γ) δεκαπενταγώνου.

630. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ μὲν γωνία κανονικοῦ ν - γώνου, διὰ $\nu > 4$, εἶναι ἀμβλεῖα, ἡ δὲ κεντρικὴ γωνία του εἶναι ὀξεῖα.

631. Ποίου κανονικοῦ πολυγώνου ἡ κεντρικὴ γωνία εἶναι 36° ;

632. Ὑπάρχει κανονικὸν πολύγωνον μὲ κεντρικὴν γωνίαν α) 15°, β) 25°, γ) 24° καὶ ποῖον ;

633. Ὑπάρχει κανονικὸν πολύγωνον μὲ γωνίαν α) 140°, β) 157° 30', γ) 160° καὶ ποῖον ;

634. Κανονικοῦ πολυγώνου ἡ ἀκτὶς εἶναι 8 cm καὶ τὸ ἀπόστημα εἶναι $4\sqrt{3}$ cm. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ.

635. Ὁ λόγος τῶν ἀποστημάτων δύο κανονικῶν ὀκταγώνων εἶναι $\frac{3}{4}$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν περιμέτρων αὐτῶν, ὡς καὶ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των.

636. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι μεταξὺ τῆς πλευρᾶς λ, τοῦ ἀποστήματος α καὶ τῆς ἀκτῖνος R ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου ὑφίσταται ἡ σχέσις $\lambda^2 = 4(R^2 - \alpha^2)$.

637. Ἐὰν Α, Β, Γ, Δ εἶναι διαδοχικαὶ κορυφαὶ ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου, δείξατε ὅτι $A\Gamma^2 - AB^2 = AB \cdot A\Delta$.

17

ΕΓΓΡΑΦΗ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΤΙΝΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ ΕΙΣ ΔΟΘΕΝΤΑ ΚΥΚΛΟΝ

365. Πρόβλημα I. Εἰς δοθέντα κύκλον (O, R) νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ ἐκ τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου.

Λύσις. Ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραγώνου τέμνονται καθέτως καὶ διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου του, γράφομεν δύο καθέτως τεμνομένας διαμέτρους ΑΓ καὶ ΒΔ εἰς τὸν δοθέντα κύκλον (O, R). Αὗται ὁρίζουν ἐπὶ τοῦ κύκλου τὰς κορυφὰς τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ (σχ. 367).

Τότε ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΔ λαμβάνομεν :

$$ΑΔ^2 = ΟΑ^2 + ΟΔ^2 \quad ἢ \quad λ_4^2 = R^2 + R^2,$$

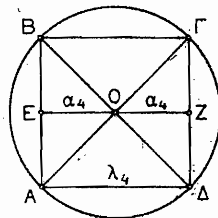
ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται : $\boxed{λ_4 = R\sqrt{2}}$

Ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου Ο φέρωμεν παράλληλον τῆς ΑΔ, σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον ΑΕΖΔ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι προφανῶς ΕΖ $= 2α_4$. Ἀλλὰ ΕΖ $=$ ΑΔ $= λ_4$. Ἄρα $2α_4 = R\sqrt{2}$, ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν

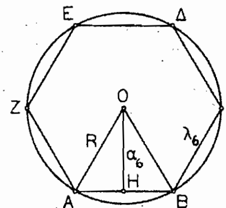
$$\boxed{α_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}}$$

366. Πρόβλημα II. Εἰς δοθέντα κύκλον (O,R) νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν ἑξάγωνον, νὰ ὑπολογισθῇ δὲ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ ἐκ τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου.

Λύσις. Ἔστω ΑΒΓΔΕΖ τὸ ζητούμενον ἑξάγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (O, R) (σχ. 368). Ἡ κεντρικὴ γωνία αὐτοῦ $\widehat{ΑΟΒ}$ εἶναι ἴση πρὸς



Σχ. 367



Σχ. 368

$\frac{360^ο}{6} = 60^ο$. Ἄρα τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΟΑΒ εἶναι ἰσόπλευρον, συνεπῶς ΑΒ $=$ ΟΑ $= R$. Ἄρα $\boxed{λ_6 = R}$

Ἡ κατασκευὴ γίνεται εὐκόλως ἐὰν λάβωμεν αὐθαιρέτως ἓν σημεῖον Α τοῦ κύκλου (O, R) καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα R ὁρίσωμεν διαδοχικῶς διὰ τοῦ διαβήτου τὰς ὑπολοίπους κορυφὰς οὕτως, ὥστε

$$ΑΒ = R, \quad ΒΓ = R, \ldots, \quad ΕΖ = R.$$

Τὸ ἀπόστημα $\alpha_6 = OH$ εἶναι ὕψος ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς R καὶ κατὰ συνέπειαν εἶναι :

$$\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Τοῦτο, ἄλλωστε, εὐκόλως συνάγεται καὶ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ΟΑΗ, τὸ ὁποῖον ἔχει $OA = R$ καὶ $AH = \frac{R}{2}$.

367. Πρόβλημα III. Εἰς δοθέντα κύκλον (Ο, R) νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν τρίγωνον (ἰσόπλευρον), νὰ ὑπολογισθῇ δὲ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ ἐκ τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου.

Λύσις. Ὁρίζομεν ἐπὶ τοῦ κύκλου διαδοχικῶς τὰς κορυφὰς Α, Ζ, Β, Δ, Γ, Ε κανονικοῦ ἑξαγώνου (σχ. 369). Τότε τὰ σημεῖα Α, Β καὶ Γ εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ τριγώνου. Πράγματι ἔχομεν :

$$\widehat{AZB} = \widehat{B\Delta\Gamma} = \widehat{\Gamma EA}. \text{ Ἄρα } AB = B\Gamma = \Gamma A,$$

ἤτοι τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον.

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ, προεκτείνομεν τὴν ΓΟ, ἡ ὁποία, ὡς διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{\Gamma}$, θὰ διέλθῃ ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ τόξου $\widehat{AB}$, ἤτοι ἀπὸ τὴν κορυφὴν Ζ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον κανονικοῦ ἑξαγώνου. Ἄρα $ZB = R$. Τὸ τρίγωνον ΒΓΖ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Β, διότι ἡ ΓΖ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου. Εἰς αὐτὸ εἶναι $\Gamma Z = 2R$ καὶ $ZB = R$.

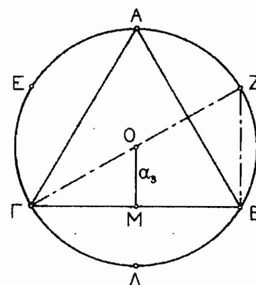
Ἄρα $\Gamma B^2 = \Gamma Z^2 - ZB^2$ ἢ

$$\lambda_3^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2 \quad \text{ἢ} \quad \lambda_3 = R\sqrt{3}.$$

Διὰ τὸ ἀπόστημα ἔχομεν $OM = \alpha_3 = \frac{ZB}{2}$.

Ἄρα : $$\alpha_3 = \frac{R}{2},$$

διότι τὰ ἄκρα του εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΓΖ καὶ ΓΒ τοῦ τριγώνου ΓΖΒ, τὸ ὁποῖον ἔχει $ZB = R$.



Σχ. 369

368. Πρόβλημα IV. Εἰς δοθέντα κύκλον (Ο, R) νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν δεκάγωνον, νὰ ὑπολογισθῇ δὲ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ ἐκ τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου.

Λύσις. Ἔστω ΑΒ ἡ πλευρὰ κανονικοῦ δεκαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (Ο, R) καὶ ἂς καλέσωμεν x τὸ μῆκος της (σχ. 370). Ἡ κεντρικὴ γωνία $\widehat{AOB}$ εἶναι $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$. Ἄρα τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΟΑΒ ἑκάστη

τῶν ἴσων γωνιῶν εἶναι $\frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$. Ἐὰν φέρωμεν τὴν διχοτόμον ΑΓ τῆς γωνίας $\widehat{A}$, τὸ τρίγωνον ΟΑΒ χωρίζεται εἰς δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα, διότι τὸ ΓΑΟ ἔχει $\widehat{O} = 36^\circ$ καὶ $\widehat{A} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$. Ἄρα

(1) $$\Gamma A = \Gamma O$$

Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $\widehat{A} = 36^\circ$ καὶ $\widehat{B} = 72^\circ$.

Ἄρα $\widehat{\Gamma} = 180^\circ - (36^\circ + 72^\circ) = 72^\circ$. Ἑπομένως

(2) $$A\Gamma = AB$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι $AB = A\Gamma = \Gamma O = x$.

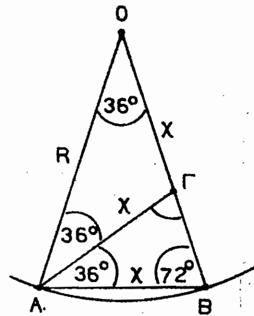
Ἐὰν τώρα ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα τῆς διχοτόμου διὰ τὸ τρίγωνον ΟΑΒ, εὑρίσκομεν :

$$\frac{AB}{AO} = \frac{\Gamma B}{\Gamma O} \quad \text{ἢ}$$

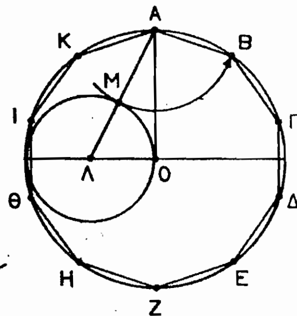
$$\frac{x}{R} = \frac{R - x}{x} \quad \text{ἢ}$$

(3) $$x^2 = R(R - x)$$

Ἡ σχέσις (3) εἶναι ἡ ἴδια μὲ τὴν σχέσιν τῆς § 349, ἄρα τὸ τμῆμα x εἶναι τὸ μεγαλύτερον τμῆμα τῆς διαιρέσεως τῆς ἀκτῖνος R εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.



Σχ. 370



Σχ. 371

Κατασκευή. Εἶναι ἡ ἰδία μὲ τὴν τῆς παραγράφου 349. Ἄρα εἰς τυχοῦσαν ἀκτῖνα ΟΑ = R γράφομεν κύκλον διαμέτρου R ἐφαπτόμενον αὐτῆς εἰς τὸ Ο (σχ. 371). Ἐὰν Λ εἶναι τὸ κέντρον αὐτοῦ, φέρομεν τὸ τμῆμα ΑΛ, τὸ ὁποῖον ὁρίζει ἐπὶ τοῦ κύκλου $\left(\Lambda, \frac{R}{2}\right)$ σημεῖον Μ. Τὸ τμῆμα ΑΜ εἶναι τότε ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου.

Ὑπολογισμὸς τοῦ μήκους. Ἡ ἐξίσωσις (3) γράφεται :

$$x^2 + Rx - R^2 = 0$$

καὶ ἡ θετικὴ ρίζα αὐτῆς εἶναι τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου, ἤτοι :

$$\lambda_{10} = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 4R^2}}{2} = \frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2} \quad \text{ἢ}$$

$$\boldsymbol{\lambda_{10} = \frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2}}$$

Τὸ ἀπόστημα ὑπολογίζεται ἀπὸ ἓν κεντρικὸν τρίγωνον ΟΑΒ (σχ. 372).

Φέρομεν $OM \perp AB \Rightarrow OM = \alpha_{10} \Rightarrow AM = \frac{\lambda_{10}}{2} \Rightarrow$

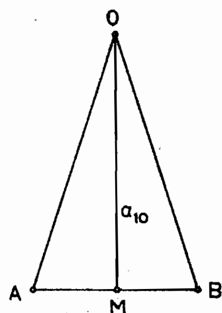
$$\alpha^2_{10} = OA^2 - AM^2 = R^2 - \left[\frac{R(\sqrt{5}-1)}{4}\right]^2$$

$$= R^2 - \frac{R^2(5-2\sqrt{5}+1)}{16} = \frac{R^2(10+2\sqrt{5})}{16} \Rightarrow$$

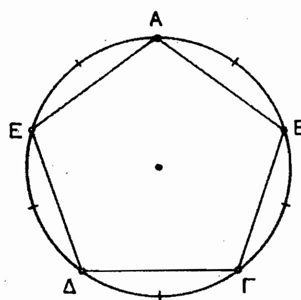
$$\alpha_{10} = \frac{R\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

369. Πρόβλημα V. Εἰς δοθέντα κύκλον (O, R) νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν πεντάγωνον, νὰ ὑπολογισθῇ δὲ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ ἐκ τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου.

Λύσις. Κατασκευασθέντος τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου, αἱ κορυφαὶ περιτ-



Σχ. 372



Σχ. 373

τῆς τάξεως αὐτοῦ ἀποτελοῦν τὰς κορυφὰς τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου, ἤτοι τὸ ΑΒΓΔΕ (σχ. 373) εἶναι κανονικὸν πεντάγωνον.

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς πλευρᾶς λ_5 αὐτοῦ, ἀρκεῖ εἰς τὸν τύπον (1) τῆς § 363 νὰ θέσωμεν $\nu = 5$, γνωστοῦ ὄντος ὅτι $\lambda_{10} = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$ καὶ νὰ ἐπιλύσωμεν ὡς πρὸς λ_5. Τότε λαμβάνομεν :

$$\lambda_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Τὸ ἀπόστημα ὑπολογίζεται ἀπὸ ἓν κεντρικὸν τρίγωνον :

$$\alpha_5^2 = R^2 - \left(\frac{\lambda_5}{2}\right)^2 = R^2 - \left[\frac{R}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right]^2 =$$

$$= R^2 - \frac{R^2(10-2\sqrt{5})}{16} = \frac{R^2(6+2\sqrt{5})}{16} \Rightarrow$$

$$\alpha_5 = \frac{R}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \frac{R(\sqrt{5}+1)}{4}.$$

370. Πρόβλημα VI. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν δεκαπεντάγωνον.

Λύσις. Ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς ἰσότητος $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ παρατηροῦμεν ὅτι, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ δέκατον πέμπτον τοῦ κύκλου, ἀρκεῖ ἀπὸ τὸ ἕκτον αὐτοῦ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ δέκατον. Ἂν λοιπὸν ἀπὸ τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον ὑποτείνει τὴν πλευρὰν κανονικοῦ ἑξαγώνου, ἀφαιρέσωμεν τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον ὑποτείνει τὴν πλευρὰν κανονικοῦ δεκαγώνου, θὰ εὕρωμεν τόξον, τὸ ὁποῖον θὰ ὑποτείνῃ τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ δεκαπενταγώνου. Κατόπιν τῆς παρατηρήσεως ταύτης, ἡ κατασκευὴ θεωρεῖται γνωστή.

Παρατήρησις. Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι, δοθέντος κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O, R), δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν εἰς τὸν ἴδιον κύκλον κανονικὸν πολύγωνον διπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν. Ἐμελετήσαμεν δὲ τὰ κανονικὰ πολύγωνα ἀριθμοῦ πλευρῶν $4 = 2^2$, $5 = 5 \cdot 2^0$, $6 = 3 \cdot 2^1$, $10 = 5 \cdot 2^1$ καὶ ὑπεδείξαμεν τὸν τρόπον ἐγγραφῆς εἰς κύκλον κανονικοῦ δεκαπενταγώνου (πλήθους πλευρῶν $15 = 3 \cdot 5 \cdot 2^0$). Γενικεύοντες τὰ ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι εἰς κύκλον (O, R) δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν κανονικὰ πολύγωνα πλήθους πλευρῶν 2^ν ($\nu \in N \wedge \nu > 1$), $5 \cdot 2^\nu$ ($\nu \in N_0$), $3 \cdot 2^\nu$ ($\nu \in N_0$) καὶ $3 \cdot 5 \cdot 2^\nu$ ($\nu \in N_0$).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

638. Δείξατε ὅτι ἑκάστη διαγώνιος κανονικοῦ πενταγώνου εἶναι παράλληλος μιᾶς πλευρᾶς του.

639. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς κύκλου ἐκ τῆς πλευρᾶς λ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸν κανονικοῦ α) τριγώνου, β) ἑξαγώνου, γ) τετραγώνου.

640. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ α) τριγώνου, β) τετραγώνου, γ) ἑξαγώνου ἐκ τῆς ἀκτῖνος R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

641. Εἰς δοθέντα κύκλον ἀκτῖνος R νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν ὀκτάγωνον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ.

642. Εἰς δοθέντα κύκλον ἀκτῖνος R νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν δωδεκάγωνον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ.

643. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ α) τριγώνου, β) τετραγώνου, γ) ἑξαγώνου, περιγεγραμμένων περὶ κύκλον (O, R) ἐκ τῆς ἀκτῖνος R.

644. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ λόγος τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι $\frac{1}{4}$.

645. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ λόγος τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι $\frac{3}{4}$.

646. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ ἐκτὸς αὐτοῦ κατασκευάζομεν τετράγωνα. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ κορυφαὶ τῶν τετραγώνων αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι καὶ κορυφαὶ τοῦ ἑξαγώνου, εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ δωδεκαγώνου, τοῦ ὁποίου νὰ εὑρεθῇ καὶ τὸ ἐμβαδόν.

Β΄.

647. Εἰς κανονικὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ πλευρᾶς α συνδέομεν τὴν κορυφὴν Α μὲ τὸ μέσον Η τῆς πλευρᾶς ΓΔ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν δύο μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται τὸ ἑξάγωνον.

648. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ πλευρὰ κανονικοῦ πενταγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος R εἶναι ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου, ἔχοντος καθέτους πλευρὰς τὰς πλευρὰς τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένων κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ κανονικοῦ δεκαγώνου.

649. Νὰ κατασκευασθῇ κανονικὸν πολύγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν λ καὶ τὴν κεντρικὴν γωνίαν ω αὐτοῦ.

650. Εἰς κύκλον ἀκτῖνος R ἐγγράφομεν τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ. Μὲ πλευρὰς τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ κατασκευάζομεν τὰ τετράγωνα ΑΒΔΕ καὶ ΑΓΖΗ, τὰ ὁποῖα περιέχουν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ πλευραὶ ΒΔ καὶ ΓΖ τέμνονται εἰς σημεῖον Ν, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ κύκλου, αἱ δὲ πλευραὶ ΕΔ καὶ ΗΖ τέμνονται εἰς σημεῖον Μ, κείμενον ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς διαμέτρου, ποὺ ἄγεται ἐκ τοῦ Α. Νὰ εὑρεθῇ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχήματος ΑΕΜΗ.

651. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυρτοῦ κανονικοῦ δεδωκαγώνου ἐκ τῆς ἀκτῖνος του, χωρὶς νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρά του.

652. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τοῦ ἐγγεγραμμενου καὶ περιγεγραμμένου κανονικοῦ ὀκταγώνου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον (Ο, R).

653. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κανονικοῦ δωδεκαγώνου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον (Ο, R).

654. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ α) ὀκταγώνου, β) δωδεκαγώνου, γ) εἰκοσαγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (Ο, R).

655. Δίδεται τετράγωνον ΑΒΓΔ κέντρου Ο. Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς τοῦ τετραγώνου καὶ ἀκτῖνα ΑΟ γράφομεν κυκλικὰ τόξα, τὰ ὁποῖα τέμνουν τὰς πλευρὰς τοῦ τετραγώνου εἰς ὀκτὼ σημεῖα. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα ταῦτα εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ ὀκταγώνου καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν του ἐκ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου.

656. Νὰ κατασκευασθῇ κανονικὸν πεντάγωνον, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ πλευρὰ λ.

657. Νὰ κατασκευασθῇ κανονικὸν ὀκτάγωνον, τοῦ ὁποίου δίδεται τὸ ἀπόστημα α.

658. Δείξατε ὅτι ἑκάστη διαγώνιος κανονικοῦ πενταγώνου διαιρεῖται ὑπὸ μιᾶς ἄλλης διαγωνίου του εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

659. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (Ο, R), τὸ ὁποῖον ἔχει 35 διαγωνίους.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

371. Θεώρημα. Κάθε κανονικὸν πολύγωνον, ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (O,R) ἔχει περίμετρον μικροτέραν τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, μὲ διπλάσιον ἀριθμῶν πλευρῶν.

Ἀπόδειξις. Ἔστω $AB = \lambda_\kappa$ ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον (Ο, R) κανονικοῦ πολυγώνου μὲ κ πλευρὰς καὶ $A\Delta = \Delta B = \lambda_{2\kappa}$ ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου μὲ διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν (σχ. 374). Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΔΒ λαμβάνομεν :

$$AB < A\Delta + \Delta B \quad \text{ἢ}$$

(1) $$\lambda_\kappa < 2\lambda_{2\kappa}$$

Ἐὰν τὴν σχέσιν (1) πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $\varkappa$ λαμβάνομεν :

$$\varkappa \cdot \lambda_{\varkappa} < 2\varkappa \cdot \lambda_{2\varkappa} \quad ἤ$$

(2) $$P_{\varkappa} < P_{2\varkappa}\,,$$

ὅπου $P_{\varkappa}$ καὶ $P_{2\varkappa}$ αἱ περίμετροι τῶν ὡς ἄνω πολυγώνων μὲ πλευρὰς $\varkappa$ καὶ $2\varkappa$ ἀντιστοίχως.

Πόρισμα. Ἡ ἀκολουθία

(3) $$P_{\varkappa}\,, P_{2\varkappa}\,, P_{4\varkappa}\,, \ldots, P_{2^{\nu}\varkappa}\,, \ldots \mid \nu = 0,1,2,\ldots$$

τῶν περιμέτρων τῶν κανονικῶν πολυγώνων, ἕκαστον ἐκ τῶν ὁποίων εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον (O,R) καὶ ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν τοῦ προηγουμένου του, εἶναι αὔξουσα ἤτοι :

$$P_{\varkappa} < P_{2\varkappa} < P_{4\varkappa} < \ldots < P_{2^{\nu}\varkappa} < \ldots \mid \nu = 0,1,2\ldots$$

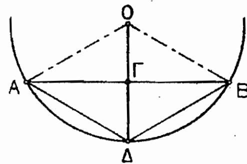
372. Θεώρημα. Ἐὰν μεταβλητοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς σταθερὸν κύκλον (O,R), τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν του αὐξάνῃ τεῖνον πρὸς τὸ ἄπειρον, τότε :

i) Τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς του λ_{ν} ἐλαττοῦται τεῖνον πρὸς τὸ μηδέν.

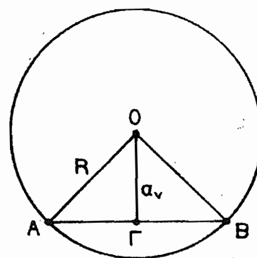
ii) Τὸ μῆκος τοῦ ἀποστήματός του α_{ν} αὐξάνει τεῖνον πρὸς τὴν ἀκτῖνα R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

iii) Τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου του P_{ν} αὐξάνει τεῖνον πρὸς τὸ μῆκος L τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

Ἀπόδειξις. Ἔστω σταθερὸς κύκλος (O, R) μὲ μῆκος L (περίμετρον) καὶ $AB = \lambda_{\nu}$ ἡ πλευρὰ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸν κανονικοῦ πολυγώνου μὲ ν πλευρὰς (σχ. 375).



Σχ. 374



Σχ. 375

i) Τὸ μῆκος τοῦ τόξου AB (ἐλάσσονος) ἰσοῦται πρὸς τὸ 1/ν τοῦ μήκους L τοῦ κύκλου, ἤτοι εἶναι

(1) $$\widehat{AB} = \frac{1}{\nu} \cdot L$$

Τότε $$\lim_{\nu \to \infty} \widehat{AB} = \lim_{\nu \to \infty} \frac{L}{\nu} = 0\,(*)$$

* Τὸ Σύμβολον lim τῆς διεθνοῦς βιβλιογραφίας, σημαίνει ὅριον.

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι

(2) $$\lambda_\nu = AB < \widehat{AB},$$

ἕπεται ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2)

ὅτι $\lim\limits_{\nu\to\infty} \lambda_\nu = 0$

ii) Ἐὰν $O\Gamma = \alpha_\nu$ εἶναι τὸ ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου καὶ $A\Gamma = \frac{AB}{2} = \frac{\lambda_\nu}{2}$, ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΟ, μὲ ὑποτείνουσαν $AO = R$, λαμβάνομεν :

$$AO^2 = O\Gamma^2 + A\Gamma^2 \Rightarrow R^2 = \alpha_\nu^2 + \left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2 \Longleftrightarrow \alpha_\nu^2 = R^2 - \left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu^2 = \lim_{\nu\to\infty}\left[R^2 - \left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2\right] = R^2 - \lim_{\nu\to\infty}\left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2 =$$

$= R^2 - 0 = R^2 \Rightarrow \lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha_\nu^2 = R^2 \Rightarrow \lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = R$ (ἐφ' ὅσον ἡ σχέσις ἀναφέρεται εἰς μέτρα γεωμετρικῶν μεγεθῶν), ἤτοι τὸ ἀπόστημα α_ν τείνει πρὸς τὴν ἀκτῖνα R, ὅταν τὸ ν τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον.

iii) Τὸ μῆκος κυκλικοῦ τόξου, ἐξ ὁρισμοῦ, ἰσοῦται πρὸς τὸ ὅριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει κανονικὴ πολυγωνικὴ γραμμὴ ἐγγεγραμμένη εἰς αὐτό, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν της τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον. Ἄρα τὸ μῆκος L κύκλου (O, R) ἰσοῦται πρὸς τὸ ὅριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ἡ περίμετρος P_ν μεταβλητοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτόν, ὅταν τὸ πλῆθος ν τῶν πλευρῶν του τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον.

Κατὰ ταῦτα, ἐφ' ὅσον ἡ πλευρὰ $\lambda_\nu = AB$ τυχόντος ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ν - γώνου εἰς τὸν κύκλον (O, R) εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀντιστοίχου αὐτῆς τόξου $\widehat{AB}$, ἤτοι $\lambda_\nu < \widehat{AB} \Rightarrow \nu\cdot\lambda_\nu < \nu\cdot\widehat{AB} \Rightarrow P_\nu < L$ καὶ ἐπειδὴ ἐπὶ πλέον $\lim\limits_{\nu\to\infty} P_\nu = L$, ἕπεται ὅτι τὸ μῆκος τῆς μεταβλητῆς περιμέτρου P_ν αὐξάνει τεῖνον εἰς τὸ μῆκος L τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου.

Κατ' ἄλλην διατύπωσιν, ἡ ἀκολουθία P_ν, $\nu = 3,4,5,\ldots$, τῶν περιμέτρων, τῶν ἐγγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων εἰς τὸν κύκλον (O, R), εἶναι αὔξουσα καὶ φραγμένη ὑπὸ τῆς περιμέτρου L τοῦ κύκλου (O,R), συγκλίνει δὲ εἰς αὐτήν.

373. Θεώρημα. Κάθε κανονικὸν πολύγωνον, περιγεγραμμένον περὶ κύκλον (O,R), ἔχει περίμετρον μεγαλυτέραν τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου μὲ διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.

Ἀπόδειξις. Ἔστω $AB = \lambda'_\kappa$ ἡ πλευρὰ κανονικοῦ πολυγώνου, περιγεγραμμένου περὶ κύκλον (O, R), Γ τὸ μέσον αὐτῆς καὶ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς

μετὰ τοῦ κύκλου (σχ. 376). Φέρομεν τὰς ΟΑ καὶ ΟΒ καὶ ἔστω ὅτι αὗται τέμνουν εἰς τὰ Ι καὶ Κ τὸν κύκλον. Εἰς τὰ Ι καὶ Κ φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου, αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν ἐπὶ τῆς ΑΒ τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Ἡ συμμετρία, ὡς πρὸς τὸν ἄξονα ΟΓ, ὡς καὶ τοὺς ἄξονας ΟΑ καὶ ΟΒ, μᾶς ἐξασφαλίζει τὴν κανονικότητα διὰ τὸ πολύγωνον τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον (Ο, R) μὲ πλευρὰν τὴν ΕΖ. Τὸ πολύγωνον τοῦτο ΔΕΖΗ... ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν ἀπὸ τὸ πολύγωνον μὲ πλευρὰν τὴν ΑΒ (διατί ;) καὶ ἔστω $\lambda'_{2\kappa}$ τὸ μῆκος ἑκάστης πλευρᾶς του.

Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΙΕ καὶ ΒΚΖ ἔχομεν :

$$AE > IE \text{ καὶ } ZB > ZK. \text{ Τότε εἶναι :}$$

$$AE + EZ + ZB > IE + EZ + ZK \text{ ἢ}$$

$$\lambda'_{\kappa} > \frac{\lambda'_{2\kappa}}{2} + \lambda'_{2\kappa} + \frac{\lambda'_{2\kappa}}{2} \text{ ἢ}$$

(1) $$\lambda'_{\kappa} > 2\lambda'_{2\kappa}$$

Ἐὰν τὴν (1) πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ κ, λαμβάνομεν :

$$\kappa\lambda'_{\kappa} > 2\kappa\lambda'_{2\kappa} \text{ ἢ}$$

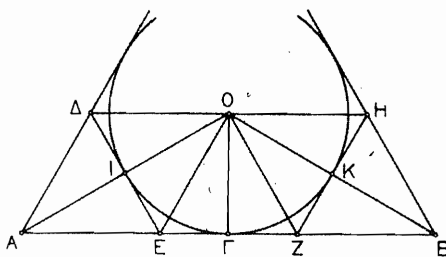
(2) $$P'_{\kappa} > P'_{2\kappa}$$

Πόρισμα. Ἡ ἀκολουθία

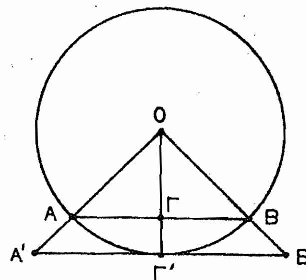
(3) $$P'_{\kappa},\ P'_{2\kappa}\ P'_{4\kappa} \dots P'_{2^{\nu}\kappa} \dots \mid \nu = 0,1,2,\dots$$

τῶν περιμέτρων τῶν κανονικῶν πολυγώνων, ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι περιγεγραμμένον περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον (Ο,R) καὶ ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν τοῦ προηγουμένου του, εἶναι φθίνουσα, ἤτοι :

$$P'_{\kappa} > P'_{2\kappa} > P'_{4\kappa} > \dots > P'_{2^{\nu}\kappa} > \dots \mid \nu = 0,1,2,\dots$$



Σχ. 376



Σχ. 377

374. Θεώρημα. Αἱ περίμετροι δύο μεταβλητῶν κανονικῶν πολυγώνων τοῦ αὐτοῦ πλήθους πλευρῶν, τοῦ ἑνὸς ἐγγεγραμμένου καὶ τοῦ ἄλλου περιγεγραμμένου περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον (Ο,R), τείνουν πρὸς κοινὸν ὅριον, τὸ μῆκος τοῦ κύκλου, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν των τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον.

Ἀπόδειξις. Ἂς θεωρήσωμεν μίαν πλευρὰν $AB = \lambda_{\nu}$ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου καὶ ἀντιστοίχως πρὸς αὐτήν, τὴν $A'B' = \lambda'_{\nu}$ τοῦ περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου (σχ. 377). Τὰ δύο πολύγωνα, ἐφ' ὅσον

ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος πλευρῶν, εἶναι ὅμοια καὶ ἑπομένως $\frac{AB}{A'B'} = \frac{O\Gamma}{O\Gamma'}$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu} = \frac{\alpha_\nu}{R} \Rightarrow \frac{\nu \cdot \lambda_\nu}{\nu \cdot \lambda'_\nu} = \frac{\alpha_\nu}{R} \Rightarrow \frac{P_\nu}{P'_\nu} = \frac{\alpha_\nu}{R} \Rightarrow \lim_{\nu \to \infty} \frac{P_\nu}{P'_\nu} = \lim_{\nu \to \infty} \frac{\alpha_\nu}{R} \Rightarrow$$

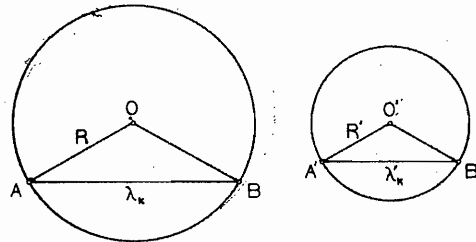
$$\frac{\lim\limits_{\nu \to \infty} P_\nu}{\lim\limits_{\nu \to \infty} P'_\nu} = \frac{\lim\limits_{\nu \to \infty} \alpha_\nu}{R} \Rightarrow \frac{\lim\limits_{\nu \to \infty} P_\nu}{\lim\limits_{\nu \to \infty} P'_\nu} = \frac{R}{R} = 1 \Rightarrow \lim_{\nu \to \infty} P_\nu = \lim_{\nu \to \infty} P'_\nu \cdot$$ Ἀλλὰ

$\lim\limits_{\nu \to \infty} P_\nu = L$ (§ 372). Ἄρα $\lim\limits_{\nu \to \infty} P_\nu = \lim\limits_{\nu \to \infty} P'_\nu = L$, ὅπου L εἶναι τὸ μῆκος τοῦ κύκλου.

375. Θεώρημα. (Ἱπποκράτους τοῦ Χίου). Ὁ λόγος τῶν μηκῶν δύο κύκλων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν δύο κύκλοι (O, R) καὶ (O′, R′). Εἰς αὐτοὺς ἐγγράφομεν ἀνὰ ἓν κανονικὸν πολύγωνον μὲ τὸ αὐτὸ πλῆθος ν πλευρῶν (σχ. 378). Τότε τὰ πολύγωνα εἶναι ὅμοια καὶ ὁ λόγος τῶν περιμέτρων των ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν (§ 361). Ἀλλὰ ὁ λόγος ὁμοιότητος $\frac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu}$ ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων των $\frac{R}{R'}$. Ἄρα :

$$(1) \qquad \frac{P_\nu}{P'_\nu} = \frac{R}{R'}$$



Σχ. 378

Ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῶν πολυγώνων διπλασιαζόμενον συνεχῶς τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον, τότε, ὡς εἴδομεν, αἱ περίμετροι τῶν πολυγώνων συγκλίνουν εἰς τὰ μήκη τῶν κύκλων καὶ ἡ (1) γράφεται :

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{P_\nu}{P'_\nu} = \frac{R}{R'} \quad \text{ἢ}$$

$$\frac{\lim\limits_{\nu \to \infty} P_\nu}{\lim\limits_{\nu \to \infty} P'_\nu} = \frac{R}{R'} \quad \text{ἢ}$$

$$(2) \qquad \frac{L}{L'} = \frac{R}{R'}$$

Πόρισμα I. Ὁ λόγος τοῦ μήκους ἑνὸς κύκλου διὰ τῆς διαμέτρου αὐτοῦ εἶναι σταθερὸς ἀριθμός.

Πράγματι, ἡ σχέσις (2) γράφεται :

$$\frac{L}{R} = \frac{L'}{R'} \quad \text{ἢ ἀκόμη}$$

(3) $$\frac{L}{2R} = \frac{L'}{2R'}$$

Ἐκ τῆς (3) ἕπεται ὅτι, ἐφ' ὅσον διὰ δύο τυχόντας κύκλους ὁ λόγος τοῦ μήκους τοῦ ἑνὸς πρὸς τὴν διάμετρόν του εὑρέθη ἴσος πρὸς τὸν λόγον τοῦ μήκους τοῦ ἄλλου πρὸς τὴν διάμετρόν του ἀντιστοίχως, ὁ λόγος οὗτος δὲν μεταβάλλεται, δηλαδὴ εἶναι σταθερός.

Ὁ σταθερὸς αὐτὸς λόγος συμβολίζεται διεθνῶς μὲ τὸ ἑλληνικὸν γράμμα π, δηλαδὴ

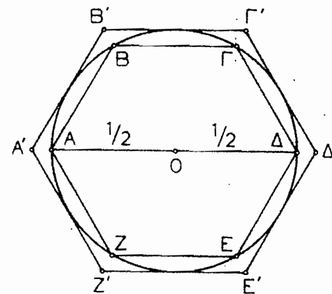
(4) $$\frac{L}{2R} = \pi$$

Πόρισμα ΙΙ. Τὸ μῆκος ἑνὸς κύκλου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς διαμέτρου αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν π.

Πράγματι, ἐκ τῆς σχέσεως (4), λαμβάνομεν :

$$L = 2\pi R$$

376. Ὁρισμός. Ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος ἰσοῦται μὲ τὸ μῆκος ἑνὸς κύκλου, καλεῖται **ἀνάπτυγμα** τοῦ ἐν λόγῳ κύκλου.



Σχ. 379

★ 377. Ὑπολογισμὸς τοῦ ἀριθμοῦ π. Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν ἀριθμὸν π, σκεπτόμεθα, ὡς ἀκολούθως :

Ὁ τύπος (4) τῆς προηγουμένης παραγράφου δίδει τὸν ἀριθμὸν π ὡς πηλίκον τῆς περιμέτρου L ἑνὸς κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον 2R αὐτοῦ. Ἐὰν ἐπομένως ἐγνωρίζαμεν τὴν περίμετρον L κύκλου γνωστῆς διαμέτρου, θὰ ἠδυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν ἀριθμὸν π. Ἐξ αὐτοῦ ἀγόμεθα εἰς τὸ νὰ γράψωμεν κύκλον διαμέτρου $2R = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{2}$, ὁπότε ὁ τύπος (4) τῆς προηγουμένης παραγράφου δίδει $\pi = L$, ἤτοι τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ μήκους L τῆς περιμέτρου κύκλου ἀκτῖνος $R = \frac{1}{2}$.

Ἐὰν εἰς τὸν κύκλον ἐγγράψωμεν καὶ περιγράψωμεν κανονικὰ πολύγωνα τοῦ αὐτοῦ πλήθους πλευρῶν, ἔστω ἑξάγωνα (σχ. 379), εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ περίμετρος L τοῦ κύκλου περιέχεται μεταξὺ τῶν περιμέτρων τῶν δύο πολυγώνων. Πράγματι, τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον ἔχει περίμετρον μικροτέραν τῆς τοῦ κύκλου, ὡς κλειστὴ κυρτὴ γραμμὴ περικλειομένη ὑπὸ ἄλλης (τοῦ κύκλου), ἐπίσης ὁ κύκλος ἔχει περίμετρον μικροτέραν τῆς τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου, ὡς κλειστὴ κυρτὴ γραμμὴ περικλειομένη ὑπὸ ἄλλης (τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου). Ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου εἶναι $\lambda_6 = R = \frac{1}{2}$ καὶ ἐπομένως ἡ περίμετρός του εἶναι $P_6 = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$. Ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου ἑξαγώνου ὑπολογίζεται τῇ βοηθείᾳ τοῦ τύπου (2) τῆς παραγράφου 364 προσεγγιστικῶς εἰς τὸν ἀριθμὸν 0,57735 καὶ ἐπομένως ἡ περίμετρος αὐτοῦ εἶναι $P'_6 = 6 \cdot 0{,}57735$

$= 3{,}4641$. Ἤδη εὑρέθη μία πρώτη προσέγγισις διὰ τὸν ἀριθμὸν π, εἶναι $\pi = 3$, διότι $P_6 < \pi < P'_6 \Rightarrow 3 < \pi < 3{,}4641$.

Διὰ διπλασιασμοῦ τοῦ πλήθους τῶν πλευρῶν τῶν ἑξαγώνων μεταβαίνομεν εἰς δωδεκάγωνα, ἐν συνεχείᾳ εἰς 24 - γωνα κ.ο.κ. δυνάμενοι νὰ ὑπολογίζωμεν πάντοτε τὰς πλευρὰς τῶν ἑκάστοτε κανονικῶν πολυγώνων τῇ βοηθείᾳ τῶν τύπων τῶν παραγράφων 363 καὶ 364. Τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ πλήθους τῶν πλευρῶν τῶν πολυγώνων συνεχιζομένου, τὰ ἐγγεγραμμένα καὶ περιγεγραμμένα κανονικὰ πολύγωνα τείνουν νὰ ταυτισθοῦν μετὰ τοῦ κύκλου, δημιουργουμένων διὰ τοῦ τρόπου αὐτοῦ δύο συγκλινουσῶν πρὸς τὸν ἀριθμὸν π ἀκολουθιῶν περιμέτρων :

$P_6 < P_{12} < P_{24} < \ldots < \pi < \ldots < P'_{24} < P'_{12} < P'_6$ περιοριζομένου τοῦ ἀριθμοῦ π συνεχῶς εἰς στενώτερα ἀριθμητικὰ πλαίσια.

Εὐνόητον εἶναι ὅτι, ὅσον περισσοτέρους ὅρους τῶν προηγουμένων ἀκολουθιῶν ὑπολογίσωμεν, τόσον μεγαλυτέραν προσέγγισιν διὰ τὸν ἀριθμὸν π θὰ λάβωμεν. Ἂς σημειωθῇ ὅτι οἱ τοιούτου εἴδους ὑπολογισμοί, πρὸ τῆς ἀνακαλύψεως τῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν, ἦσαν δυσχερέστατοι καὶ ἀπησχόλησαν ἐπὶ σειρὰν ἐτῶν τοὺς μαθηματικοὺς διαφόρων ἐποχῶν.

Κατωτέρω δίδομεν πίνακα τῶν περιμέτρων ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων εἰς κύκλον διαμέτρου $2R = 1$.

ν	P	P′
6	3	3,46410
12	3,10582	3,21540
24	3,13262	3,15967
48	3,13935	3,14609
96	3,14103	3,14272
192	3,14145	3,14188
384	3,14155	3,14166

Ὁ ἀριθμὸς π περιέχεται πάντοτε μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν τῶν δύο στηλῶν P καὶ P′. Τὰ ἀκριβῆ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ π εἶναι προφανῶς τὰ κοινὰ ψηφία τῶν δύο προσεγγίσεων. Ἀπὸ τὸν ἀνωτέρω πίνακα προκύπτει ὅτι $3{,}14155 < \pi < 3{,}14166$, ἤτοι εἶναι $\pi = 3{,}141\ldots$

Ὁ ἀριθμὸς π εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμὸς καὶ μάλιστα ὑπερβατικὸς ἀριθμός, ὡς ἀπέδειξε τὸ 1882 ὁ Γερμανὸς μαθηματικὸς Lindemann, δηλαδὴ ὄχι μόνον δὲν δύναται νὰ παρασταθῇ ὑπὸ ἀριθμητικοῦ τινος κλάσματος, ἀλλὰ δὲν δύναται νὰ εἶναι ρίζα ἐξισώσεως $\alpha_0 x^\nu + \alpha_1 x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu = 0$ μὲ ἀκεραίους συντελεστάς. Ἐξ αὐτοῦ ἀπεδείχθη ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ κατασκευασθῇ διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου εὐθύγραμμον τμῆμα, ἔχον μῆκος ἴσον μὲ τὸν ἀριθμὸν π, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον δίδει ὁριστικῶς ἀρνητικὴν ἀπάντησιν εἰς τὴν λύσιν τοῦ ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων τεθέντος προβλήματος τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, ἤτοι τῆς κατασκευῆς εὐθυγράμμου τμήματος, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν κύκλου γνωστῆς ἀκτῖνος.

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τοῦ Ἱπποκράτους φαίνεται ὅτι ἦτο γνωστὸς ὁ ἀριθμὸς π ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, εἰκάζετο δὲ ὅτι ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς δὲν δύναται νὰ παρασταθῇ ὑπὸ ἀριθμητικοῦ τινος κλάσματος. Ὁ Ἀρχιμήδης (287 - 212 π.Χ.) ἔδωσε τὴν προσεγγίζουσαν τιμὴν τοῦ ἀριθμοῦ $\pi = \frac{22}{7} \simeq 3{,}1428$ διαφέρουσαν περίπου κατὰ $\frac{1}{1000}$ ἀπὸ τὴν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ ἀριθμοῦ π.

Συνήθως διὰ τὸν ἀριθμὸν π χρησιμοποιοῦνται αἱ προσεγγίσεις αὐτοῦ

3,14, **3,1416,** **3,14159,**

ἀναλόγως τῆς ἀκριβείας τῆς ἀπαιτουμένης διὰ τὸ ἑκάστοτε πρόβλημα. Ἀξίζει νὰ σημειωθῇ ὅτι τὰ ψηφία τῆς τελευταίας τῶν ἀνωτέρω προσεγγίσεων, ἡ ὁποία εἶναι γνωστὴ ἀπὸ τὰ μέσα τοῦ 16ου αἰῶνος περίπου, συμφωνοῦν μὲ τὸ πλῆθος τῶν γραμμάτων τῶν λέξεων τῆς φράσεως :

Ἀεὶ ὁ Θεὸς ὁ μέγας γεωμετρεῖ
3 1 4 1 5 9

Σήμερον, διὰ τὰς ἀνάγκας τῆς ἀστροναυτικῆς, ἡ ὁποία ἀπαιτεῖ ἀκριβεστάτους ὑπολογισμούς, ἔχει ἐπιτευχθῇ δι' ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ προσέγγισις τοῦ ἀριθμοῦ π μὲ 10000 δεκαδικὰ ψηφία.

Δίδομεν προσέγγισιν τοῦ ἀριθμοῦ π μὲ 15 δεκαδικὰ ψηφία :

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ldots$$

ΜΗΚΟΣ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΟΞΟΥ

378. Ὁρισμός. Μῆκος ἢ ἀνάπτυγμα κυκλικοῦ τόξου μὲ ἄκρα τὰ σημεῖα Α καὶ Β καλεῖται τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ μῆκος κανονικῆς κυρτῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς μὲ τὰ αὐτὰ ἄκρα Α καὶ Β ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ ἐν λόγῳ τόξον, ὅταν τὸ πλῆθος ν τῶν πλευρῶν της αὐξανόμενον ἀπεριορίστως τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον.

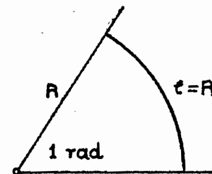
379. Ὑπολογισμὸς τοῦ μήκους κυκλικοῦ τόξου. Εἶναι γνωστὸν ὅτι τὰ γεωμετρικὰ μεγέθη «τόξα τοῦ αὐτοῦ κύκλου» καὶ «ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίκεντροι γωνίαι» ἀποτελοῦν ἀναλογίαν. Ἂν ἐπομένως καλέσωμεν l τὸ μῆκος κυκλικοῦ τόξου, τοῦ ὁποίου ἡ ἐπίκεντρος γωνία, μετρουμένη εἰς μοίρας, εἶναι μ^0, θὰ ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν :

$$(1) \qquad \frac{l}{L} = \frac{\mu^0}{360^0}$$

ὅπου L εἶναι τὸ μῆκος τοῦ κύκλου (O, R), εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει τὸ τόξον.

Τότε ἐκ τῆς σχέσεως (1) καὶ γνωστοῦ ὄντος ὅτι $L = 2\pi R$, λαμβάνομεν :

$$(2) \qquad l = \frac{2\pi R \cdot \mu}{360}$$



Σχ. 380

380. Ἀκτίνιον (rad ἐκ τοῦ radian = ἀκτίνιον). Ἓν κυκλικὸν τόξον καλεῖται τόξον ἑνὸς ἀκτινίου (ἢ ἀκτίνιον τόξον) ὅταν τὸ ἀνάπτυγμά του (τὸ μῆκος του) εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει. Ἀντιστοίχως ἡ ἐπίκεντρος γωνία του, καλεῖται γωνία ἑνὸς ἀκτινίου. Κατὰ ταῦτα, ἓν πλῆρες τόξον (τόξον 360^0) ἔχει $\frac{L}{R} = \frac{2\pi R}{R} =$ **2π ἀκτίνια.** Ἀντιστοίχως, ἡ ἐπίκεντρος γωνία του, ἤτοι ἡ γωνία τῶν 360^0, ἔχει 2π ἀκτίνια.

Ἡ γωνία ἑνὸς ἀκτινίου περιέχεται μεταξὺ τῶν 57^0 καὶ 58^0. Μία προσέγγισις αὐτῆς εἶναι :

$$\mathbf{1\ rad = 57^0\ 17'\ 44'',3}$$

῎Αν ἡ ἐπίκεντρος γωνία τόξου l, μετρουμένη εἰς ἀκτίνια, εἶναι ω, ὁ τύπος (2) γράφεται :

$$l = \frac{2\pi R \cdot \omega}{2\pi} = \omega \cdot R \quad \text{ἤ} \quad \boldsymbol{l = \omega \cdot R}$$

ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΟΥ

381. Συμφώνως πρὸς τὰ προηγούμενα, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου (O, R) τείνει νὰ καλυφθῇ ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν μεταβλητοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτόν, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν του, διπλασιαζόμενον συνεχῶς, τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον. ῎Αν E_λ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κυρτοῦ πολυγώνου μὲ λ πλευράς, γνωρίζομεν (§ 359) ὅτι εἶναι $E_\lambda = \frac{P_\lambda \cdot \alpha_\lambda}{2}$. Τότε δημιουργοῦμεν τὴν ἀκολουθίαν τῶν ἐμβαδῶν

(1) $$E_\kappa,\ E_{2\kappa},\ E_{2^2\kappa}, \ldots,\ E_{2^\nu\kappa}, \ldots \mid \nu = 0,1,2,\ldots$$

'Εὰν ἡ ἀκολουθία (1) συγκλίνῃ, τότε θὰ ὑπάρχῃ τὸ ἐμβαδὸν E τοῦ κύκλου καὶ θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὅριον τῆς ἀκολουθίας (1). 'Αλλὰ ἡ ἀκολουθία (1) συγκλίνει, διότι (§ 372):

$$\lim_{\nu\to\infty} E_{2^\nu\kappa} = \lim_{\nu\to\infty}\left[\frac{P_{2^\nu\kappa}\cdot \alpha_{2^\nu\kappa}}{2}\right] = \frac{1}{2}\lim_{\nu\to\infty} P_{2^\nu\kappa}\cdot \lim_{\nu\to\infty}\alpha_{2^\nu\kappa} = \frac{1}{2}\cdot L\cdot R$$

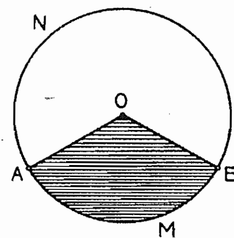
$$= \frac{1}{2}\cdot 2\pi R\cdot R = \pi R^2. \text{ ῎Αρα}$$

(2) $$\mathbf{E = \pi R^2}$$

῎Αν $d = 2R$ εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου, τότε ὁ τύπος (2) γράφεται :

(3) $$\mathbf{E = \frac{\pi d^2}{4}}$$

382. **Κυκλικὸς τομεύς.** ῎Εστω κύκλος (O,R), $\widehat{AMB}$ ἓν τόξον αὐτοῦ καὶ OA, OB αἱ δύο ἀκραῖαι ἀκτῖνες τοῦ τόξου (σχ. 381). Τὸ κλειστὸν ἐπίπεδον τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὸ ἐν λόγῳ τόξον καὶ ἀπὸ τὰς δύο ἀκραίας ἀκτῖνας του καλεῖται **κυκλικὸς τομεύς**. 'Η ἐπίκεντρος γωνία $\widehat{AOB}$ τοῦ τόξου καλεῖται καὶ ἐπίκεντρος γωνία τοῦ κυκλικοῦ τομέως.



Σχ. 381

'Ο κύκλος (O,R) μετὰ τοῦ ἐσωτερικοῦ του δύναται νὰ θεωρηθῇ κυκλικὸς τομεύς, τοῦ ὁποίου ἡ ἐπίκεντρος γωνία εἶναι πλήρης γωνία, ἤτοι γωνία 360°. Τοῦτον θὰ τὸν λέγωμεν καὶ πλήρη κυκλικὸν τομέα.

383. **'Εμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως.** Δύναται εὐκόλως νὰ διαπιστωθῇ

ὅτι τὰ γεωμετρικὰ στοιχεῖα «κυκλικοὶ τομεῖς τοῦ αὐτοῦ κύκλου» καὶ «ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίκεντροι γωνίαι» ἀποτελοῦν ἀναλογίαν (διατί ;).

Κατόπιν τούτου, ἐὰν $E_{κ.τ.}$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως, τοῦ ὁποίου ἡ ἐπίκεντρος γωνία, μετρουμένη εἰς μοίρας, εἶναι μ^0, καὶ $E = \pi R^2$ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει, ἔχομεν

$$\frac{E_{κ.τ.}}{\pi R^2} = \frac{\mu^0}{360^0} \quad ἢ$$

$$(1) \qquad \mathbf{E_{κ.τ.} = \frac{\pi R^2 \cdot \mu}{360}}$$

Μετασχηματισμὸς τοῦ τύπου (1). Ἐὰν ἡ ἐπίκεντρος γωνία τοῦ κυκλικοῦ τομέως, μετρουμένη εἰς ἀκτίνια, εἶναι ω, τότε ὁ τύπος (1) γράφεται :

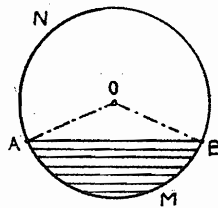
$$E_{κ.τ.} = \frac{\pi R^2 \cdot \omega}{2\pi} = \frac{1}{2} R^2\omega = \frac{1}{2} R\omega \cdot R = \frac{1}{2} l \cdot R \quad ἢ$$

$$\mathbf{E_{κ.τ.} = \frac{1}{2}\, l\, R}$$

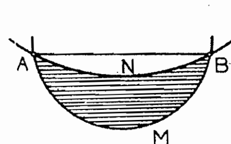
ὅπου l εἶναι τὸ μῆκος τοῦ τόξου του (§ 380).

384. Κυκλικὸν τμῆμα. Ἔστω κύκλος (O,R) καὶ AB μία χορδὴ αὐτοῦ (σχ. 382). Διὰ τῆς χορδῆς AB ὁ κύκλος χωρίζεται εἰς δύο κλειστὰ τμήματα ABMA καὶ ABNA, ἕκαστον τῶν ὁποίων καλεῖται **κυκλικὸν τμῆμα.** Εἰς ἕκαστον τούτων ἀντιστοιχεῖ μία ἐπίκεντρος γωνία $\widehat{AOB}$, ἡ ὁποία διὰ τὸ πρῶτον μὲν εἶναι κυρτή, διὰ τὸ δεύτερον δὲ εἶναι μὴ κυρτή.

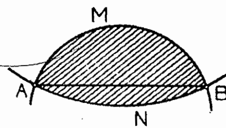
Τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τμήματος ὑπολογίζεται ἐκ τῶν ἐμβαδῶν τοῦ ἀντι-



Σχ. 382



Σχ. 383 α



Σχ. 383 β

στοίχου εἰς αὐτὸ κυκλικοῦ τομέως καὶ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου AOB, ὡς ἑξῆς :

i) Ἐὰν $\widehat{AOB} < 2^L$, τότε :

$$(ABMA) = (AOBMA) - (AOB).$$

ii) Ἐὰν $\widecheck{AOB} > 2^L$, τότε :

$$(ABNA) = (AOBNA) + (AOB)$$

385. Μηνίσκος. Τὸ κλειστὸν ἐπίπεδον τμῆμα, ποὺ ὁρίζουν δύο κυκλικὰ τόξα (ὄχι τοῦ αὐτοῦ κύκλου) μὲ κοινὰ ἄκρα A καὶ B καλεῖται μηνίσκος.

'Εὰν ἡ κοινὴ χορδὴ ΑΒ κεῖται ἐκτὸς τοῦ μηνίσκου, τὸ ἐμβαδόν του εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο κυκλικῶν τμημάτων ΑΜΒ καὶ ΑΝΒ (σχ. 383α), ἐνῷ, ἐὰν ἡ κοινὴ χορδὴ κεῖται ἐντὸς τοῦ μηνίσκου, τὸ ἐμβαδόν του εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο κυκλικῶν τμημάτων ΑΜΒ καὶ ΑΝΒ (σχ. 383β).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

660. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα 8 m.

661. Αὐτοκινήτου οἱ τροχοὶ ἔχουν ἀκτῖνα 0,35 m καὶ ἔκαμαν 1800 στροφάς. Πόσην ἀπόστασιν διήνυσε τὸ αὐτοκίνητον;

662. Κυκλικὸς στίβος ἔχει μῆκος 400 m. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ;

663. 'Επὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν τὰ διαδοχικὰ τμήματα ΑΒ, ΒΓ καὶ ΓΔ καὶ γράφομεν ἡμικύκλια μὲ διαμέτρους τὰς ΑΒ, ΒΓ καὶ ΓΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ μῆκος τοῦ ἡμικυκλίου διαμέτρου ΑΔ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν τριῶν ἄλλων ἡμικυκλίων.

664. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς κανονικὸν ἑξάγωνον πλευρᾶς 5 cm.

665. Εἰς κύκλον ἀκτῖνος 6 cm ἐγγράφομεν τετράγωνον καὶ εἰς τὸ τετράγωνον ἐγγράφομεν νέον κύκλον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς καὶ τὸ μῆκος τοῦ νέου αὐτοῦ κύκλου.

666. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ τόξου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς πλευρὰν ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου εἰς κύκλον ἀκτῖνος 4 m.

667. 'Ομοίως τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς πλευρὰν τετραγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος 10 m.

668. Εἰς κύκλον, τόξον 40^0 ἔχει μῆκος 15m. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου.

669. Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς α καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν 3 τόξα, περατούμενα εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν αὐτῶν ἰσοῦται μὲ τὸ μῆκος τοῦ κύκλου ἔχοντος ἀκτῖνα $\frac{\alpha}{2}$.

670. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἀκτῖνος 5 cm.

671. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τετράγωνον πλευρᾶς α.

672. Εἰς κύκλον ἄγομεν τὴν διάμετρον ΑΒ καὶ τὰς χορδὰς ΑΓ καὶ ΒΓ. Ἂν τὸ μῆκος τῶν χορδῶν εἶναι 12 m καὶ 5 m ἀντιστοίχως, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου.

673. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ δακτυλίου (ἤτοι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μέρους, ποὺ περιέχεται μεταξὺ δύο ὁμοκέντρων κύκλων) ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει διάμετρον τὴν χορδὴν τοῦ μεγαλυτέρου κύκλου, ἡ ὁποία εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ μικροτέρου.

674. Εἰς κύκλον ἀκτῖνος α εἶναι ἐγγεγραμμένον κανονικὸν ἑξάγωνον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μέρους τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ ἑξαγώνου.

675. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως 120^0 εἰς κύκλον ἀκτῖνος α.

676. Κυκλικὸς τομεὺς 45^0 ἔχει ἐμβαδὸν $\pi\alpha^2$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου.

677. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου ἐκ τῶν δύο μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται κύκλος ἀκτῖνος α ὑπὸ τῆς πλευρᾶς ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτόν.

678. Ὁμοίως ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου.

679. Δύο ἴσοι κύκλοι ἀκτῖνος ρ ἔχουν διάκεντρον ἴσην μὲ $\rho\sqrt{2}$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κοινοῦ μέρους αὐτῶν.

Β΄.

680. Δοθεὶς κύκλος νὰ διαιρεθῇ εἰς τέσσαρα ἰσοδύναμα μέρη δι' ὁμοκέντρων κύκλων.

681. Δοθεὶς κύκλος νὰ διαιρεθῇ δι' ὁμοκέντρων κύκλων εἰς τρία μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰ δοθέντα μήκη λ, μ, ν.

682. Τρεῖς ἴσοι κύκλοι ἀκτῖνος R ἐφάπτονται ἀνὰ δύο ἐξωτερικῶς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μέρους, ποὺ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν τριῶν τούτων κύκλων.

683. Τρεῖς ἴσοι κύκλοι ἀκτῖνος R ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς ἀνὰ δύο. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, ποὺ ἐφάπτεται ἐξωτερικῶς αὐτῶν καὶ τοῦ κύκλου ποὺ ἐφάπτεται ἐσωτερικῶς αὐτῶν.

684. Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α. Μὲ κέντρα τὰς κορυφάς του καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν ἀνὰ ἓν τόξον περατούμενον εἰς τὰς δύο ἄλλας κορυφάς του. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου καμπυλογράμμου τριγώνου.

685. Δίδεται τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α. Μὲ κορυφὰς τὰς Α καὶ Γ καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν δύο τεταρτοκύκλια ἐντὸς τοῦ τετραγώνου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεταξὺ αὐτῶν περιεχομένου μέρους.

686. **Μηνίσκοι τοῦ Ἱπποκράτους.** Ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἡμικύκλιον. Μὲ διαμέτρους τὰς καθέτους πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ γράφομεν ἡμικύκλια πρὸς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ τριγώνου. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο σχηματιζομένων μηνίσκων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

687. Δίδεται τετράγωνον πλευρᾶς 2α. Μὲ κέντρα τὰς κορυφάς του καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν τεταρτοκύκλια ἐντὸς αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου καμπυλογράμμου σταυροῦ.

688. Δίδεται τετράγωνον πλευρᾶς 2α. Μὲ διαμέτρους τὰς πλευράς του γράφομεν ἡμικύκλια ἐντὸς τοῦ τετραγώνου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου καμπυλογράμμου σταυροῦ.

689. Δίδεται κύκλος (Κ, R). Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸν ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ ἀκτῖνα R γράφομεν τρία τόξα περατούμενα εἰς τὸν κύκλον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου καμπυλογράμμου τριφύλλου.

690. Εἰς κύκλον Κ ἀκτῖνος R φέρομεν δύο διαμέτρους ΑΚΒ καὶ ΓΚΔ καθέτους μεταξύ των. Μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα ΓΑ γράφομεν τὸ τόξον $\overset{\frown}{\text{ΑΕΒ}}$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μηνίσκου ΑΔΒΕΑ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΓΑΒ.

691. Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α. Γράφομεν ἀνὰ ἓν τόξον, διερχόμενον διὰ τῶν δύο κορυφῶν του καὶ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ τριγώνου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου τριφύλλου.

692. Δίδεται τεταρτοκύκλιον ΚΑΒ ἀκτῖνος R. Μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα R γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ τόξον $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}$ εἰς τὸ Γ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μικτογράμμου σχήματος ΚΒΓ.

693. Δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου ΑΚΒ. Ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Γ καὶ μὲ διαμέτρους τὰς ΑΓ καὶ ΒΓ γράφομεν ἀνὰ ἕνα κύκλον ἐντὸς τοῦ ἡμικυκλίου, φέρομεν δὲ ἐκ τοῦ Γ τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, τέμνουσαν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ

Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδόν, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν τριῶν ἡμικυκλίων ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἔχοντος διάμετρον τὴν ΓΔ.

694. Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς δοθέντος τετραγώνου πλευρᾶς α καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν τεταρτοκύκλια ἐντὸς τοῦ τετραγώνου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου ὑπ' αὐτῶν καμπυλογράμμου τετραγώνου.

695. Δύο κύκλοι ἀκτίνων ρ καὶ 3ρ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α. "Αγομεν τὴν κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην αὐτῶν ΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μέρους, ποὺ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῆς ΒΓ καὶ τῶν δύο κύκλων.

696. 'Επὶ εὐθείας λαμβάνομεν τρία τμήματα ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = α καὶ μὲ κέντρα τὸ Β καὶ Γ καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν κύκλους, οἱ ὁποῖοι τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Μὲ κέντρα τὰ Ε καὶ Ζ καὶ ἀκτῖνα 2α γράφομεν τόξα, τὰ ὁποῖα καταλήγουν εἰς τοὺς κύκλους τούτους. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου ᾠοειδοῦς σχήματος.

697. Δίδεται τεταρτοκύκλιον ΚΑΒ κέντρου Κ. Μὲ διαμέτρους τὰς ἀκτῖνας ΚΑ καὶ ΚΒ γράφομεν ἀνὰ ἓν ἡμικύκλιον κείμενον ἐντὸς τοῦ τεταρτοκυκλίου, τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Γ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : α) Τὰ σημεῖα Α, Γ, Β κεῖνται ἐπ' εὐθείας, β) τὸ καμπυλόγραμμον σχῆμα ΚΓ, ποὺ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο τούτων ἡμικυκλίων, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο κυκλικῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα ἔχουν χορδὰς τὰς ΑΓ καὶ ΒΓ καὶ γ) νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καμπυλογράμμου σχήματος ποὺ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν τόξων $\overset{\frown}{ΑΒ}$, $\overset{\frown}{ΑΓ}$, καὶ $\overset{\frown}{ΒΓ}$.

698. Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς δοθέντος τετραγώνου πλευρᾶς α καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν τέσσαρας κύκλους. α) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κοινοῦ ἐσωτερικοῦ τμήματος τῶν τεσσάρων κύκλων. β) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὅλου σχήματος.

ΜΕΡΟΣ Β′

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

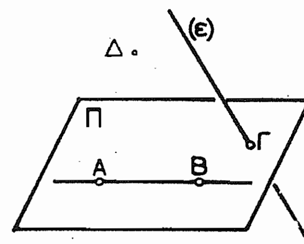
ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

386. **Ἐπίπεδον.** Ἡ ἔννοια τοῦ ἐπιπέδου ἢ ἐπιπέδου ἐπιφανείας εἶναι ἤδη γνωστὴ ἀπὸ τὴν ἐπιπεδομετρίαν, ὡς πρωταρχικὴ ἔννοια. Ἡ ἐπιφάνεια ἠρεμοῦντος ὕδατος (περιωρισμένων διαστάσεων) δύναται νὰ δώσῃ τὴν εἰκόνα μέρους ἐπιπέδου ἐπιφανείας, χωρὶς ὅμως τοῦτο νὰ ἀποτελῇ καὶ ὁρισμὸν τοῦ ἐπιπέδου.

387. **Ἀξιώματα τοῦ ἐπιπέδου. Ἀξίωμα Ι. Ἓν ἐπίπεδον περιέχει τοὐλάχιστον τρία σημεῖα Α, Β, Γ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, ὑπάρχει δὲ ἓν τοὐλάχιστον σημεῖον Δ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου (σχ. 384).**

Ἀξίωμα ΙΙ. Διὰ τριῶν σημείων, μὴ κειμένων ἐπ' εὐθείας, ἓν καὶ μόνον ἓν ἐπίπεδον διέρχεται.

Ἀξίωμα ΙΙΙ. Ἐὰν Α καὶ Β εἶναι δύο διακεκριμένα σημεῖα ἑνὸς ἐπιπέδου (Π), ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π) (σχ. 384).



Σχ. 384

Πόρισμα. Μία εὐθεῖα (ε), μὴ ἀνήκουσα εἰς ἐπίπεδον (Π), δύναται νὰ τέμνῃ τὸ ἐπίπεδον (Π) μόνον εἰς ἓν σημεῖον Γ. Τὸ Γ καλεῖται ἴχνος τῆς εὐθείας (ε) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) (σχ. 384).

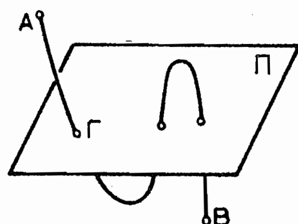
Ἀξίωμα IV. Ἐὰν Α καὶ Β εἶναι δύο σημεῖα τοῦ χώρου, ἑκατέρωθεν ἐπιπέδου (Π), τότε πᾶσα γραμμὴ διερχομένη διὰ τῶν Α καὶ Β ἔχει ἓν τοὐλάχιστον κοινὸν σημεῖον Γ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου (σχ. 385).

Ἀξίωμα V. Ἓν ἐπίπεδον ἐκτείνεται ἀπεριορίστως.

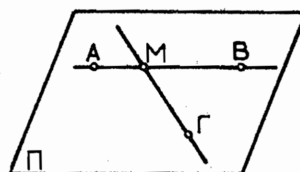
388 Θεώρημα. Ἓν ἐπίπεδον περιέχει ἀπείρους εὐθείας.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἐπίπεδον (Π) καὶ τρία σημεῖα Α, Β καὶ Γ αὐτοῦ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας (σχ. 386). Θεωροῦμεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, ἡ ὁποία ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π) (ἀξίωμα ΙΙΙ). Ἔστω τυχὸν σημεῖον Μ τῆς εὐθείας ΑΒ $\Rightarrow$ Μ$\in$(Π) καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ εὐθεῖα ΓΜ ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π).

Τὸ σημεῖον Μ, ὡς δυνάμενον νὰ διατρέχῃ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, δίδει ἀπείρους εὐθείας ΓΜ, αἱ ὁποῖαι ἀνήκουν εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π). Ἄρα τὸ ἐπίπεδον (Π) περιέχει ἀπείρους εὐθείας.



Σχ. 385



Σχ. 386

Παρατήρησις. Ἀπὸ τὸ προηγούμενον θεώρημα (§ 388), ἕπεται ὅτι, ἐὰν μία εὐθεῖα ΓΜ κινῆται οὕτως, ὥστε τὸ σημεῖον Γ νὰ παραμένῃ σταθερὸν καὶ τὸ Μ νὰ ἀνήκῃ πάντοτε εἰς εὐθεῖαν ΑΒ, ἡ εὐθεῖα ΓΜ διαγράφει ἐπίπεδον (Π). Ἐξ αὐτοῦ προκύπτει ὅτι τὸ ἐπίπεδον (Π) δύναται νὰ σχηματισθῇ ἐκ τῆς τοιαύτης κινήσεως τῆς εὐθείας ΓΜ, διὰ τοῦτο καὶ καλεῖται **εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια.** Ἡ εὐθεῖα ΑΒ καλεῖται **ὁδηγὸς** διὰ τὴν κίνησιν τῆς εὐθείας ΓΜ, ἐνῷ τὸ σημεῖον Γ καλεῖται **πόλος.**

Κάθε εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια, ἤτοι κάθε ἐπιφάνεια διαγραφομένη ἀπὸ τὴν τυχοῦσαν κίνησιν κάποιας εὐθείας, ἐν γένει δὲν εἶναι ἐπίπεδον (κυματοειδὴς ἐπιφάνεια κ.ἄ.).

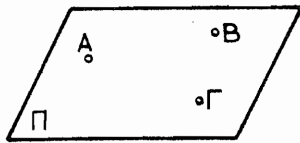
389 Καθορισμὸς ἐπιπέδου. Τρία σημεῖα μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, καθορίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς καὶ μόνον ἐπιπέδου.

Δεχόμεθα ὅτι τρία σημεῖα Α, Β καὶ Γ, μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, εἶναι ἱκανά, διὰ νὰ καθορίσουν τὸ μοναδικὸν ἐπίπεδον (Π) (σχ. 387) τὸ ὁποῖον διέρχεται δι' αὐτῶν (ἀξίωμα ΙΙ).

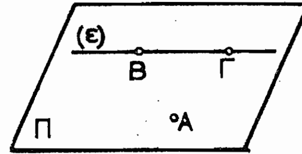
Πόρισμα. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα ἔχουν τρία κοινὰ σημεῖα μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, συμπίπτουν.

390. Μία εὐθεῖα καὶ ἓν σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς καθορίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς μόνον ἐπιπέδου.

Πράγματι, ἔστω εὐθεῖα (ε) καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτῆς. Λαμβάνομεν δύο τυχόντα σημεῖα Β καὶ Γ τῆς εὐθείας (ε). Τὰ τρία σημεῖα Α, Β καὶ Γ καθορίζουν ἓν ἐπίπεδον (Π) (σχ. 388), εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκουν ἀφ' ἑνὸς μὲν τὸ σημεῖον Α, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἡ εὐθεῖα (ε), ὡς ἔχουσα δύο σημεῖα της Β καὶ Γ ἐπὶ τοῦ (Π). Δυνάμεθα ἑπομένως νὰ θεωρήσωμεν ὅτι τὸ ἐπίπεδον (Π) ὁρίζεται ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν (ε) καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α.



Σχ. 387

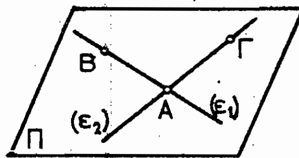


Σχ. 388

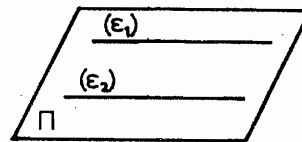
Πόρισμα. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα ἔχουν μίαν κοινὴν εὐθεῖαν καὶ ἓν κοινὸν σημεῖον ἐκτὸς τῆς εὐθείας, συμπίπτουν.

391. Δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι καθορίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς μόνον ἐπιπέδου.

Πράγματι, ἔστωσαν (ε_1) καὶ (ε_2) αἱ δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι καὶ Α τὸ κοινὸν σημεῖον των (σχ. 389). Λαμβάνομεν ἀνὰ ἓν σημεῖον Β καὶ Γ ἑκάστης



Σχ. 389



Σχ. 390

καὶ θεωροῦμεν τὸ ἐπίπεδον (Π) τὸ διερχόμενον διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β καὶ Γ. Εἰς τὸ (Π) ἀνήκουν καὶ αἱ δύο εὐθεῖαι, ἐφ' ὅσον ἑκάστη ἔχει δύο σημεῖα της ἐπὶ τοῦ (Π) (ἀξίωμα ΙΙΙ). Δυνάμεθα ἑπομένως νὰ θεωρήσωμεν ὅτι τὸ ἐπίπεδον (Π) ἔχει ὁρισθῆ ἀπὸ τὰς δύο τεμνομένας εὐθείας.

392. Δύο παράλληλοι εὐθεῖαι καθορίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς μόνον ἐπιπέδου (σχ. 390).

Τοῦτο ἕπεται ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῶν παραλλήλων εὐθειῶν, ὡς δύο συνεπιπέδων εὐθειῶν χωρὶς κοινὸν σημεῖον.

Πόρισμα. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα ἔχουν δύο κοινὰς εὐθείας (τεμνομένας ἢ παραλλήλους), συμπίπτουν.

393. Ἀνακεφαλαίωσις διὰ τὸν καθορισμὸν ἑνὸς ἐπιπέδου.



Ἓν ἐπίπεδον καθορίζεται πλήρως, καὶ συνεπῶς θὰ θεωρῆται γνωστόν, εἰς τὰς κάτωθι περιπτώσεις :

i) Ὅταν γνωρίζωμεν τρία σημεῖα αὐτοῦ, μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας.

ii) Ὅταν γνωρίζωμεν μίαν εὐθεῖαν καὶ ἕνα σημεῖον αὐτοῦ ἐκτὸς τῆς εὐθείας κείμενον.

iii) Ὅταν γνωρίζωμεν δύο τεμνομένας εὐθείας αὐτοῦ.

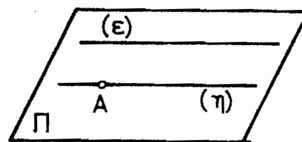
iv) Ὅταν γνωρίζωμεν δύο παραλλήλους εὐθείας αὐτοῦ.

Παρατήρησις. Εἰς τὰς ἀνωτέρω τέσσαρας στοιχειώδεις περιπτώσεις, τὸ ἐπίπεδον θὰ θεωρῆται καὶ κατασκευάσιμον. Ἐπίσης μαζὶ μὲ κάθε δεδομένον ἐπίπεδον σχῆμα (π.χ. τρίγωνον, κύκλος, κανονικὸν πολύγωνον κ.ἄ.) θὰ θεωρῆται ὡς δεδομένον καὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ.

Εἰς τὰ σχήματα, ὅπου εἴμεθα ἀναγκασμένοι νὰ ἀπεικονίζωμεν ἓν στερεὸν ἐπὶ τοῦ φύλλου σχεδιάσεως, τὰς περισσοτέρας φορὰς τὰ ἐπίπεδα θὰ τὰ ἀπεικονίζωμεν μὲ ἓν ὀρθογώνιον τμῆμα αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον ὅμως θὰ σχεδιάζωμεν συνήθως ὡς πλάγιον παραλληλόγραμμον (βλέπε καὶ § 453).

394. **Θεώρημα. Ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) θεωροῦμεν εὐθεῖαν (ε) καὶ σημεῖον Α. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν εὐθεῖαν (η)//(ε). Ἡ εὐθεῖα (η) ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π).**

Ἀπόδειξις. Αἱ δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (ε) καὶ (η) καθορίζουν ἐπίπεδον (σχ. 391). Τοῦτο μετὰ τοῦ ἐπιπέδου (Π) ἔχει κοινὴν τὴν εὐθεῖαν (ε) καὶ τὸ σημεῖον Α καὶ ἐπομένως συμπίπτει μετὰ τοῦ (Π) (§ 390 πόρ.). Ἄρα ἡ εὐθεῖα (η) ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π).



Σχ. 391

ΕΥΘΕΙΑΙ ΕΙΣ ΤΟΝ ΧΩΡΟΝ

395. **Συνεπίπεδοι εὐθεῖαι** ἢ ὁμοεπίπεδοι εὐθεῖαι καλοῦνται δύο διακεκριμέναι εὐθεῖαι, ὅταν ὑπάρχῃ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ τὰς περιέχῃ. Τότε αἱ δύο εὐθεῖαι ἢ θὰ τέμνωνται εἰς ἓν σημεῖον ἢ θὰ εἶναι παράλληλοι.

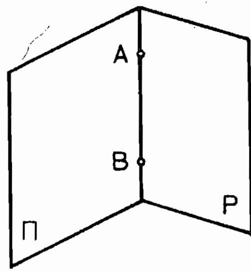
396. **Ἀσύμβατοι εὐθεῖαι** καλοῦνται δύο μὴ συνεπίπεδοι εὐθεῖαι. Ἀποκλείονται τὰ ἐνδεχόμενα «νὰ τέμνωνται» ἢ «νὰ εἶναι παράλληλοι».

ΕΠΙΠΕΔΑ ΕΙΣ ΤΟΝ ΧΩΡΟΝ

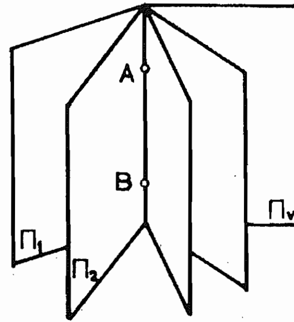
397. **Θεώρημα. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα Α καὶ Β, τότε ἔχουν καὶ κοινὴν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ.**

Ἀπόδειξις. $A \in (\Pi)$, $B \in (\Pi) \Rightarrow$ εὐθ. $AB \in (\Pi)$. Ἐπίσης $A \in (P)$, $B \in (P) \Rightarrow$ εὐθ. $AB \in (P)$ (σχ. 392). Ἄρα ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι κοινὴ διὰ τὰ δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ).

Παρατήρησις. Τὸ θεώρημα δύναται νὰ ἐπεκταθῇ διὰ ν ἐπίπεδα, ἤτοι :
Ἐὰν ν ἐπίπεδα (Π_1), (Π_2), (Π_3), ...,(Π_ν) ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα Α καὶ Β, τότε ἔχουν καὶ κοινὴν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ.



Σχ. 392

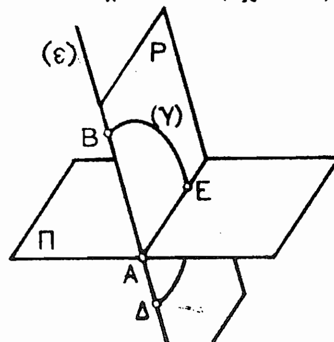


Σχ. 393

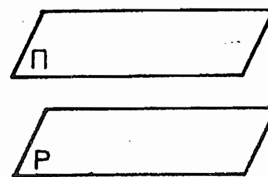
Τὰ ν ἐπίπεδα λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν ἀξονικὴν δέσμην ἐπιπέδων (σχ. 393), ἐφ' ὅσον εἶναι διακεκριμένα.

398. Θεώρημα. Ἐὰν δύο διακεκριμένα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) ἔχουν ἕνα κοινὸν σημεῖον Α, τότε ἔχουν καὶ κοινὴν εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ σημείου Α.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν εὐθεῖαν (ε) τοῦ ἐπιπέδου (Ρ) διερχομένην διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου Α (σχ. 394). Ἐπ' αὐτῆς καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ Α λαμβά-



Σχ. 394



Σχ. 395

νομεν δύο σημεῖα Β καὶ Δ καὶ γράφομεν γραμμὴν (γ) (ὄχι εὐθεῖαν), ἀνήκουσαν εἰς τὸ ἐπίπεδον (Ρ), ἡ ὁποία θὰ διέρχεται διὰ τῶν Β καὶ Δ. Αὕτη θὰ τμήσῃ τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον Ε (§ 387, IV). Τὸ σημεῖον Ε ἀνήκει προφανῶς καὶ εἰς τὰ δύο ἐπίπεδα καὶ συνεπῶς ἡ εὐθεῖα ΑΕ εἶναι κοινὴ διὰ τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ). Ἄρα ἡ τομὴ δύο ἐπιπέδων ἐν γένει εἶναι εὐθεῖα.

399. Ὁρισμός. Δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) καλοῦνται παράλληλα, ἐὰν ἡ τομὴ αὐτῶν εἶναι τὸ κενὸν σύνολον (σχ. 395).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

699. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ τριῶν σημείων κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, διέρχονται ἄπειρα ἐπίπεδα.

700. Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι τέμνωνται ἀνὰ δύο, δείξατε ὅτι ἀνήκουν εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἢ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

701. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἷς κύκλος (O, R), μὴ κείμενος ἐπὶ ἐπιπέδου (Π), τὸ πολὺ δύο κοινὰ σημεῖα δύναται νὰ ἔχῃ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου (Π).

702. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι δύο ἴσοι καὶ ὁμόκεντροι κύκλοι, μὴ ἀνήκοντες ὅμως εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ἔχουν μίαν μόνον κοινὴν διάμετρον.

703. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2). Ἐπὶ τῆς (ε_1) λαμβάνομεν σημεῖα Α, Β καὶ ἐπὶ τῆς (ε_2) σημεῖα Γ, Δ. Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι ἀσύμβατοι.

Β΄.

704. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι 10 ἐπίπεδα τέμνονται κατὰ 45 τὸ πολὺ εὐθείας.

705. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν εὐθειῶν, κατὰ τὰς ὁποίας ν τὸ πλῆθος ἐπίπεδα τέμνονται ἀνὰ δύο.

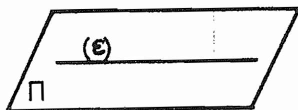
706. Δίδονται σημεῖον Α, εὐθεῖα (ε) καὶ κύκλος (Κ, R) ἐν τῷ χώρῳ. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Α εὐθεῖα (ζ), τέμνουσα τὴν εὐθεῖαν (ε) καὶ τὸν κύκλον (Κ, R).

707. Δίδονται δύο τεμνόμεναι καὶ δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι. Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα καὶ τὰς τέσσαρας δοθείσας εὐθείας.

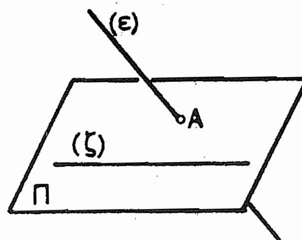
ΕΥΘΕΙΑΙ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΕΙΣ ΤΟΝ ΧΩΡΟΝ

400. Θέσεις εὐθείας καὶ ἐπιπέδου. Τρεῖς εἶναι αἱ διάφοροι δυναταὶ θέσεις εὐθείας (ε) καὶ ἐπιπέδου (Π) εἰς τὸν χῶρον :

i) Ἡ εὐθεῖα (ε) ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π) (σχ. 396).



Σχ. 396



Σχ. 397

ii) Ἡ εὐθεῖα (ε) τέμνει τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον Α (σχ. 397). Τὸ Α καλεῖται ἴχνος τῆς εὐθείας (ε) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π).

Παρατήρησις. Κάθε εὐθεῖα (ζ) τοῦ ἐπιπέδου (Π), μὴ διερχομένη διὰ τοῦ Α, (σχ. 397) εἶναι ἀσύμβατος τῆς εὐθείας (ε) (διατί ;).

iii) Ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι παράλληλος τοῦ ἐπιπέδου (Π). Μὲ τὸν ὅρον «παράλληλος» ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα (ε) δὲν ἔχει κοινὸν σημεῖον μετὰ τοῦ

ἐπιπέδου (Π) (σχ. 398). Τότε καὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) καλεῖται παράλληλον τῆς εὐθείας (ε).

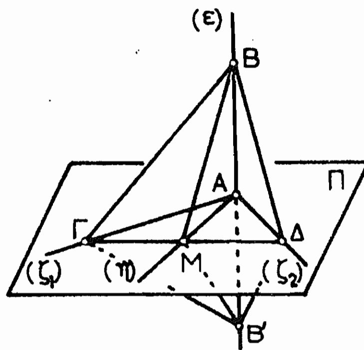
401. Εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον. Ὁρισμός. Μία εὐθεῖα (ε) τέμνουσα ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον Α αὐτοῦ, καλεῖται κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π), τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν εἶναι κάθετος ἐπὶ ὅλας τὰς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου (Π) τὰς διερχομένας διὰ τοῦ σημείου Α.

402. Θεώρημα. Ἐὰν μία εὐθεῖα (ε), τέμνουσα ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον Α, εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου (Π) διερχομένας διὰ τοῦ Α, τότε εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π).

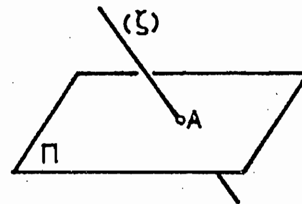


Σχ. 398

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας (ζ_1) καὶ (ζ_2) τοῦ ἐπιπέδου (Π) εἰς τὸ Α (σχ. 399). Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν τυχοῦσαν εὐθεῖαν (η) τοῦ ἐπιπέδου (Π), τὴν διερχομένην διὰ τοῦ σημείου Α.



Σχ. 399



Σχ. 400

Ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε) λαμβάνομεν σημεῖα Β καὶ Β' τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι ΑΒ = ΑΒ' καὶ ἐπὶ τῶν (ζ_1) καὶ ζ_2) τυχόντα σημεῖα Γ καὶ Δ. Τὸ τρίγωνον ΓΒΒ' εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ ΓΒ = ΓΒ' (1), διότι ἔχει τὴν ΓΑ ὡς ὕψος καὶ διάμεσον. Ὁμοίως καὶ τὸ τρίγωνον ΔΒΒ' εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ ΔΒ = ΔΒ' (2). Τότε, ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2), ἕπεται ὅτι τριγ. ΒΓΔ = τριγ. Β'ΓΔ (ἡ ΓΔ εἶναι κοινή). Ἄρα $\widehat{B\Gamma\Delta} = \widehat{B'\Gamma\Delta}$ (3). Ἔστω Μ τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ τυχοῦσα εὐθεῖα (η) τοῦ ἐπιπέδου (Π), ἡ διερχομένη διὰ τοῦ Α, τέμνει τὴν ΓΔ. Τριγ. ΒΓΜ = τριγ. Β'ΓΜ, λόγῳ τῶν σχέσεων (1), (3) καὶ τῆς ΓΜ = ΓΜ. Ἄρα ΜΒ = ΜΒ', ἤτοι τὸ τριγ. ΒΜΒ' εἶναι ἰσοσκελές. Τοῦτο ἔχει τὴν ΜΑ ὡς διάμεσον. Ἑπομένως εἶναι καὶ ὕψος αὐτοῦ, ἤτοι $MA \perp BB' \Rightarrow (\varepsilon) \perp (\eta)$. Ἄρα ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π).

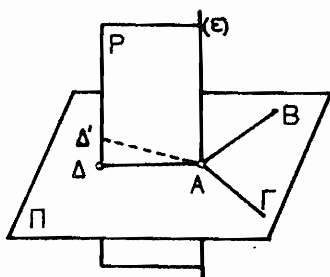
Παρατήρησις. Πᾶσα εὐθεῖα (ζ) τέμνουσα ἐπίπεδον (Π) καὶ μὴ κάθετος πρὸς αὐτό, καλεῖται **πλαγία** ὡς πρὸς τὸ (Π) (σχ. 400).

403. Θεώρημα. Ἔστω εὐθεῖα (ε) καὶ σημεῖον Α αὐτῆς. Τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν τοῦ χώρου τῶν καθέτων ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε) εἰς τὸ σημεῖον Α ἀποτελεῖ ἐπίπεδον (Π) κάθετον ἐπὶ τὴν (ε) εἰς τὸ Α.

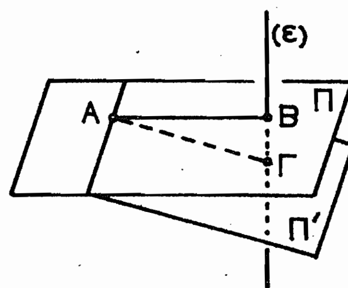
Ἀπόδειξις. Δύο ἐκ τῶν εὐθειῶν τοῦ συνόλου τούτου, αἱ ΑΒ καὶ ΑΓ, καθορίζουν ἐπίπεδον (Π), τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε) εἰς τὸ σημεῖον Α, διότι (ε) ⊥ ΑΒ καὶ (ε) ⊥ ΑΓ (σχ. 401). Ἔστω ἀκόμη μία εὐθεῖα ΑΔ ⊥ (ε). Ἀρκεῖ νὰ δεθχῇ ὅτι ΑΔ∈(Π).

Θεωροῦμεν ἐπίπεδον (Ρ), τὸ ὁποῖον καθορίζεται ἀπὸ τὰς εὐθείας (ε) καὶ ΑΔ. Αὐτὸ τέμνει τὸ ἐπίπεδον (Π) κατ' ἀνάγκην κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΔ. Διότι, ἐὰν ἔτεμνε τὸ (Π) κατ' ἄλλην εὐθεῖαν ΑΔ', θὰ ἦτο (ε) ⊥ ΑΔ', καθ' ὅτι εἶναι (ε) ⊥ (Π). Ἐξ ὑποθέσεως ὅμως ἔχομεν ὅτι (ε) ⊥ ΑΔ, ὅπερ ἄτοπον, διότι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Ρ) θὰ ὑπῆρχον δύο εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΑΔ' κάθετοι ἐπὶ τὴν (ε), Ἄρα (Π) ∩ (Ρ) = ΑΔ, ἤτοι ἡ ΑΔ ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π).

Πόρισμα. Ἀπὸ σημεῖον Α εὐθείας (ε) ἓν μόνον κάθετον ἐπίπεδον ὑπάρχει ἐπὶ τὴν (ε).



Σχ. 401



Σχ. 402

404. Θεώρημα. Ἐκ σημείου Α ἐκτὸς εὐθείας (ε) ἓν καὶ μόνον ἓν ἐπίπεδον διέρχεται κάθετον ἐπὶ τὴν (ε).

Ἀπόδειξις. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν ΑΒ ⊥ (ε). Ἡ ΑΒ εἶναι μία καὶ μοναδική (διατί;). Ἐκ τοῦ Β θεωροῦμεν τὸ κάθετον ἐπίπεδον (Π) ἐπὶ τὴν (ε) (σχ. 402), τὸ ὁποῖον ἀφ' ἑνὸς μὲν εἶναι ἓν καὶ μοναδικὸν (§ 403 πόρ.), ἀφ' ἑτέρου δὲ περιέχει τὸ Α, διότι ΑΒ ⊥ (ε). Ἄρα ὑπάρχει ἐκ τοῦ Α ἓν ἐπίπεδον (Π) ⊥ (ε). Εἶναι καὶ τὸ μοναδικὸν διότι, ἐὰν ἐκ τοῦ Α ὑπῆρχε καὶ δεύτερον ἐπίπεδον (Π') ⊥ (ε), αὐτὸ θὰ ἔτεμνε τὴν (ε) εἰς σημεῖον (Γ) καὶ θὰ ἦτο ΑΓ ⊥ (ε). Δηλαδὴ ἐκ τοῦ Α θὰ ὑπῆρχον δύο κάθετοι αἱ ΑΒ καὶ ΑΓ, ἐπὶ τὴν (ε), ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα τὸ (Π) εἶναι καὶ μοναδικόν.

Β. ΤΕΤΡΑΜΗΝΟ.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΚΑΘΕΤΩΝ



405. Θεώρημα. Εὐθεῖα (ζ) εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον Α. Ἀπὸ τὸ ἴχνος της Α θεωροῦμεν εὐθεῖαν ΑΒ ⊥ ΓΔ, ὅπου ἡ ΓΔ εἶναι εὐθεῖα

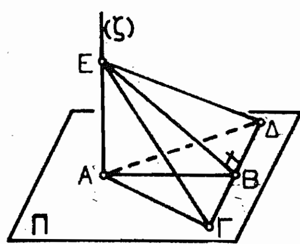
τοῦ ἐπιπέδου (Π). Ἐὰν Ε εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας (ζ), τότε εἶναι ΕΒ ⊥ ΓΔ.

Ἀπόδειξις. Τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ τὰ λαμβάνομεν οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι ΒΓ = ΒΔ (σχ. 403). Τότε τὸ τρίγωνον ΑΓΔ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἔχει τὴν ΑΒ ὡς ὕψος καὶ διάμεσον ⇒ ΑΓ = ΑΔ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΕΑΓ καὶ ΕΑΔ, (ΕΑ ⊥ (Π)), ὡς ἔχοντα τὴν ΑΕ κοινὴν καὶ ΑΓ = ΑΔ, εἶναι ἴσα ⇒ ΕΓ = ΕΔ, ἤτοι τὸ τρίγωνον ΕΓΔ εἶναι ἰσοσκελές. Αὐτὸ ἔχει τὴν ΕΒ ὡς διάμεσον. Ἄρα εἶναι καὶ ὕψος του ⇒ ΕΒ ⊥ ΓΔ.

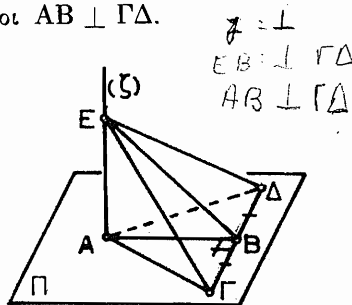
406 Θεώρημα. Εὐθεῖα (ζ) εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον Α. Ἐὰν ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Ε τῆς (ζ) φέρωμεν κάθετον ΕΒ ἐπὶ τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΓΔ τοῦ ἐπιπέδου (Π), τότε ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ ληφθοῦν οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι ΒΓ = ΒΔ (σχ. 404), τὸ τρίγωνον ΕΓΔ εἶναι ἰσοσκελές, μὲ ΕΓ = ΕΔ, διότι ἔχει τὴν ΕΒ ὡς ὕψος καὶ διάμεσον. Τότε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΕΑΓ καὶ ΕΑΔ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΕΑ κοινὴν καὶ ΕΓ = ΕΔ. Ἄρα εἶναι καὶ ΑΓ = ΑΔ, ἤτοι τὸ τρίγωνον ΑΓΔ εἶναι ἰσοσκελές. Τοῦτο ἔχει τὴν ΑΒ ὡς διάμεσον. Ἑπομένως εἶναι καὶ ὕψος του, ἤτοι ΑΒ ⊥ ΓΔ.

ΕΒ ⊥ ΓΔ
ΑΒ ⊥ ΓΔ



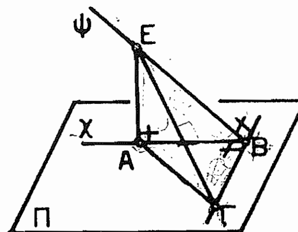
Σχ. 403



Σχ. 404

407 Θεώρημα. Δύο ἡμιευθεῖαι Βx καὶ Βy μὲ κοινὴν ἀρχὴν εἶναι κάθετοι ἐπὶ τρίτην εὐθεῖαν ΒΓ. Αἱ Βx καὶ ΒΓ ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου (Π). Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Ε τῆς Βy φέρομεν ΕΑ ⊥ Βx. Τότε εἶναι ΕΑ ⊥ (Π).

Ἀπόδειξις. Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΕΑ ⊥ Βx (σχ. 405). Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΕΑ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ μίαν ἀκόμη εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου (Π).



Σχ. 405

Τὰ τρίγωνα ΑΒΕ, ΑΒΓ καὶ ΕΒΓ εἶναι ὀρθογώνια. Ἐφαρμόζομεν εἰς αὐτὰ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα καὶ ἔχομεν ἀντιστοίχως : $ΒΕ^2 = ΑΒ^2 + ΑΕ^2$ (1), $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ (2) καὶ $ΓΕ^2 = ΒΓ^2 + ΒΕ^2$ (3). Ἀπὸ τὴν σχέσιν (1) λαμβάνομεν $ΑΕ^2 = ΒΕ^2 - ΑΒ^2$ (4). Προσθέτομεν τὰς σχέσεις (2) καὶ (4) κατὰ μέλη καὶ λαμβάνομεν : $ΑΓ^2 + ΑΕ^2 = ΒΓ^2 + ΒΕ^2$ (5).

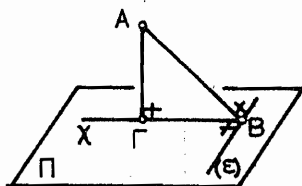
Ἐκ τῶν σχέσεων (3) καὶ (5) ἕπεται $ΓΕ^2 = ΑΓ^2 + ΑΕ^2$. Ἐκ τῆς τελευταίας ἕπεται ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΓΕ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α, διότι εἰς αὐτὸ ἰσχύει ἡ σχέσις τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος. Ἄρα ΕΑ ⊥ ΑΓ καὶ ἑπομένως ΕΑ ⊥ (Π).

408 Κατασκευὴ εὐθείας διερχομένης ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α καὶ καθέτου ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον (Π).

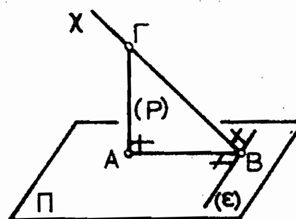
i) Τὸ σημεῖον Α δὲν ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π) (σχ. 406). Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν εὐθεῖαν ΑΒ ⊥ (ε), ὅπου (ε) τυχοῦσα εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π). Ἐκ τοῦ Β φέρομεν εὐθεῖαν Βx ⊥ (ε) ἀνήκουσα εἰς τὸ (Π). Ἐκ τοῦ Α φέρομεν ΑΓ ⊥ Βx. Ἡ ΑΓ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π).

ii) Τὸ σημεῖον Α ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π) (σχ. 407). Φέρομεν ΑΒ ⊥ (ε), ὅπου (ε) εἶναι τυχοῦσα εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π). Ἐκ τοῦ Β φέρομεν Βx ⊥ (ε), μὴ ἀνήκουσα εἰς τὸ (Π). Αἱ ΑΒ καὶ Βx καθορίζουν ἐπίπεδον (Ρ). Ἐπ' αὐτοῦ φέρομεν εὐθεῖαν ΑΓ ⊥ ΑΒ. Ἡ ΑΓ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π).

Ἡ ἀπόδειξις καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις εἶναι φανερά, τῇ βοηθείᾳ τοῦ 3ου θεωρήματος τῶν τριῶν καθέτων (§ 407).



Σχ. 406



Σχ. 407

Παρατήρησις. Αἱ δύο προηγούμεναι κατασκευαὶ ἀποδεικνύουν τὴν ὕπαρξιν εὐθείας καθέτου ἐπὶ ἐπίπεδον, ἀπὸ σημεῖον ἐκτὸς αὐτοῦ κείμενον ἢ ἐπὶ αὐτοῦ.

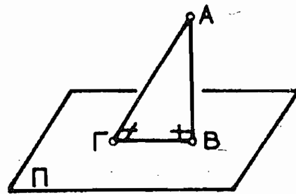
409 Θεώρημα. Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α, κείμενον ἐκτὸς ἐπιπέδου (Π), μία μόνον κάθετος εὐθεῖα ἄγεται ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

Ἀπόδειξις. Ἐκ τοῦ Α ὑπάρχει μία κάθετος ΑΒ (σχ. 408) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) (408, i). Ἐὰν ὑπῆρχε καὶ δευτέρα κάθετος ΑΓ ἐπὶ τοῦ (Π), τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ ἦτο ὀρθογώνιον εἰς τὰς δύο γωνίας του Β καὶ Γ, ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι ἡ μοναδικὴ κάθετος ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ (Π). Εἰς τὰ ἑπόμενα θὰ δειχθῇ ὅτι αὐτὸ εἶναι καὶ τὸ μικρότερον τμῆμα μὲ ἄκρα τὸ σημεῖον Α ἀφ' ἑνὸς καὶ τυχὸν σημεῖον τοῦ (Π) ἀφ' ἑτέρου.

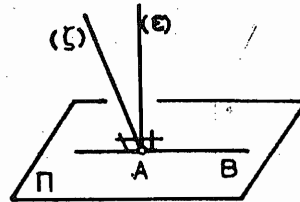
410 Ἀπόστασις σημείου Α ἀπὸ ἐπίπεδον (Π) καλεῖται τὸ μῆκος τοῦ καθέτου τμήματος ἐκ τοῦ σημείου Α πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π).

411 Θεώρημα. Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α ἐπιπέδου (Π) μία μόνον κάθετος εὐθεῖα ἄγεται ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

'Απόδειξις. 'Εκ τοῦ Α ὑπάρχει μία εὐθεῖα (ε) ⊥ (Π) (408, ii). 'Εὰν ὑπῆρχε καὶ δευτέρα εὐθεῖα (ζ) κάθετος ἐπὶ τοῦ (Π) εἰς τὸ Α (σχ. 409), τότε τὸ ἐπίπεδον τῶν εὐθειῶν (ε) καὶ (ζ) θὰ ἔτεμνε τὸ ἐπίπεδον (Π) κατὰ τὴν



Σχ. 408



Σχ. 409

εὐθεῖαν ΑΒ καὶ θὰ ἦτο (ε) ⊥ ΑΒ καὶ (ζ) ⊥ ΑΒ. Τοῦτο ὅμως δὲν δύναται νὰ συμβαίνῃ, διότι θὰ ὑπῆρχον εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἐκ τοῦ Α δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἄρα ἡ (ε) ⊥ (Π) εἶναι ἡ μοναδικὴ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) εἰς τὸ σημεῖον Α.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

708. Σημεῖον Α ἀπέχει ἀπὸ ἐπίπεδον (Π) ἀπόστασιν 10 cm. Φέρομεν ΑΒ ⊥ (Π) καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) γράφομεν κύκλον κέντρου Β καὶ ἀκτῖνος 8 cm. Φέρομεν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου εἰς σημεῖον Γ αὐτοῦ καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα $ΓΔ = 2\sqrt{7}$ cm. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ΑΔ.

709. 'Απὸ τὸ κέντρον Κ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ φέρομεν εὐθεῖαν (ε) ⊥ (ΑΒΓΔ) καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Μ. 'Εὰν Ζ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΒ, δείξατε ὅτι εἶναι ΜΖ ⊥ ΑΒ.

710. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ εὐθεῖα (ε) πλαγία ὡς πρὸς αὐτό. Δείξατε ὅτι ὑπάρχει μία μόνον εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π) κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε).

711. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), σημεῖον Α αὐτοῦ καὶ σημεῖον Β ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν προβολῶν τοῦ Β ἐπὶ τὰς εὐθείας τοῦ (Π) τὰς διερχομένας διὰ τοῦ Α.

712. 'Απὸ τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου ἄγομεν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι πᾶν σημεῖον τῆς καθέτου ταύτης ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου.

713. Δίδεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. 'Απὸ τὴν κορυφὴν Α αὐτοῦ φέρομεν τὴν Αx κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου καὶ ἑνώνομεν τὸ τυχὸν σημεῖον Δ τῆς Αx μὲ τὸ μέσον Μ τῆς βάσεως ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι α) ΔΜ ⊥ ΒΓ καὶ β) ΒΓ ⊥ (ΔΑΜ).

Β΄.

714. Δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) τέμνονται κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. 'Εκ τυχόντος σημείου Γ φέρομεν ΓΔ ⊥ (Π), ΓΕ ⊥ (Ρ) καὶ ἐκ τῶν Δ καὶ Ε φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὴν ΑΒ. Δείξατε ὅτι αὐται διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

715. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου (Π), τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐκ τοῦ Α δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ.

716. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), σημεῖον Α αὐτοῦ καὶ σημεῖον Β ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Α εὐθεῖα τοῦ (Π) ἀπέχουσα ἐκ τοῦ Β δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ.

717. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), κύκλος (Κ, R) ἐπ' αὐτοῦ καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π), ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου (Κ, R) καὶ ἀπέχουσα ἐκ τοῦ σημείου Α δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ.

718. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἰσαπέχουν ἀπὸ τρία δοθέντα σημεῖα Α, Β καὶ Γ, μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας.

719. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἰσαπέχουν ἀπὸ τρεῖς συνεπιπέδους εὐθείας, τεμνομένας ἀνὰ δύο.

720. Ἐὰν εὐθεῖα (ε) σχηματίζῃ ἴσας γωνίας μὲ τρεῖς εὐθείας ἑνὸς ἐπιπέδου (Π), νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι (ε) ⊥ (Π).

721. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ = 2α ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου (Π), ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ τμῆμα ΑΒ φαίνεται ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν.

722. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὸ κάθετον τμῆμα ΑΒ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο πλάγια τμήματα ΑΓ καὶ ΑΔ. Ἐπ' αὐτῶν λαμβάνομεν σημεῖα Ε, Ζ, Η ἀντιστοίχως οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{ΑΕ}{ΑΒ} = \frac{ΑΖ}{ΑΓ} = \frac{ΑΗ}{ΑΔ}$. Δείξατε ὅτι ΑΒ ⊥ (ΕΖΗ).

723. Ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) δίδεται κύκλος (Κ, R). Ἀπὸ σημεῖον Α τοῦ κύκλου φέρομεν τὴν διάμετρον ΑΒ καὶ ὑψώνομεν κάθετον Αx ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου. Ἐπὶ τῆς Αx λαμβάνομεν σημεῖον Γ καὶ τὸ συνδέομεν μὲ τυχὸν σημεῖον Δ τοῦ κύκλου. α) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΓΔ ⊥ ΒΔ. β) Φέρομεν ΑΕ ⊥ ΒΓ καὶ ΑΖ ⊥ ΓΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τριγ. ΓΒΔ≈τριγ. ΓΖΕ. γ) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΒΓ ⊥ (ΑΕΖ).

724. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ ἐπιπέδου (Π), διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι : $ΜΑ^2 + ΜΒ^2 = λ^2$, ἔνθα λ δεδομένον μῆκος.

725. Δίδεται εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ, διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι : $ΜΑ^2 - ΜΒ^2 = λ^2$, ὅπου λ δοθὲν μῆκος.

412. Μεσοκάθετον ἐπίπεδον εὐθυγράμμου τμήματος. Ὁρισμός. Μεσοκάθετον ἐπίπεδον εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ καλεῖται τὸ ἐκ τοῦ μέσου τοῦ τμήματος ΑΒ κάθετον ἐπίπεδον ἐπ' αὐτοῦ.

413. Θεώρημα. Κάθε σημεῖον τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου (Π) εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ ἰσαπέχει ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος καὶ ἀντιστρόφως, κάθε σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἰσαπέχει ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος, εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου.

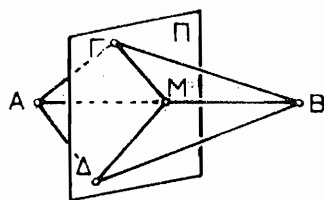
Ἀπόδειξις. Ἔστω Γ τυχὸν σημεῖον τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου (Π) τοῦ τμήματος ΑΒ ⇒ ΓΜ ⊥ ΑΒ (σχ. 500). Ἐπειδὴ ἐπὶ πλέον εἶναι ΜΑ = ΜΒ, ἕπεται ὅτι τὸ τριγ. ΓΑΒ εἶναι ἰσοσκελές, ἐφ' ὅσον ἔχει τὴν ΓΜ ὡς ὕψος καὶ διάμεσον. Ἄρα ΓΑ = ΓΒ.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω Δ τυχὸν σημεῖον, ἰσαπέχον ἐκ τῶν Α καὶ Β, ἤτοι ΔΑ = ΔΒ ⇒ τὸ τριγ. ΔΑΒ εἶναι ἰσοσκελές. Τότε ἡ διάμεσος ΔΜ εἶναι καὶ ὕψος του, ἤτοι ΔΜ ⊥ ΑΒ. Ἄρα τὸ σημεῖον Δ ἀνήκει εἰς τὸ μεσοκάθετον ἐπίπεδον (Π) τοῦ τμήματος ΑΒ.

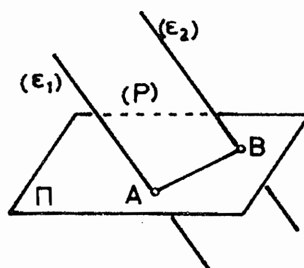
Παρατήρησις. Ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, ἕπεται ὅτι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, τὰ ὁποῖα ἰσαπέχουν ἐκ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β εἶναι τὸ μεσοκάθετον ἐπίπεδον τοῦ τμήματος ΑΒ.

414) Θεώρημα. Ἐκ δύο παραλλήλων εὐθειῶν, (ε_1) καὶ (ε_2), ἐὰν ἡ μία τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδου (Π), τότε καὶ ἡ ἄλλη τέμνεται ὑπὸ τοῦ (Π).

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι ἡ (ε_1) τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου (Π) εἰς τὸ σημεῖον Α (σχ. 411). Αἱ δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2), καθορίζουν ἐπίπεδον (Ρ), τὸ ὁποῖον ἔχει μετὰ τοῦ (Π) κοινὸν τὸ σημεῖον Α. Ἄρα ἔχουν καὶ κοινὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία, ὡς ἀνήκουσα εἰς τὸ ἐπίπεδον (Ρ) καὶ τέμνουσα τὴν εὐθεῖαν (ε_1) εἰς τὸ Α, θὰ τέμνῃ καὶ τὴν παράλληλόν της εἰς τὸ Β. Τὸ Β ἑπομένως, ὡς ἀνῆκον εἰς τὴν τομὴν τῶν δύο ἐπιπέδων, ἀνήκει καὶ εἰς τὸ (Π), ἤτοι τὸ ἐπίπεδον (Π) τέμνει καὶ τὴν (ε_2) εἰς τὸ Β.



Σχ. 410

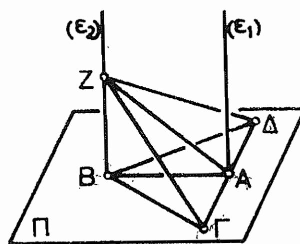


Σχ. 411

415. Θεώρημα. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) εἶναι κάθετοι ἐπὶ ἐπίπεδον (Π), εἶναι μεταξύ των παράλληλοι.

Ἀπόδειξις. Κατ' ἀρχὰς παρατηροῦμεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) ἀποκλείεται νὰ τέμνωνται, διότι τότε ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον των θὰ ὑπῆρχον δύο κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (Π) (σχ. 412). Ἀρκεῖ ἑπομένως νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ (ε_1) καὶ (ε_2) εἶναι συνεπίπεδοι.

Α καὶ Β εἶναι τὰ ἴχνη τῶν (ε_1) καὶ (ε_2) ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) ἀντιστοίχως. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν εὐθεῖαν τοῦ (Π) κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν $ΑΓ = ΑΔ$. Τότε τὸ τριγ. ΒΓΔ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἔχει τὴν ΒΑ ὡς ὕψος καὶ διάμεσον. Ἄρα $ΒΓ = ΒΔ$. Αἱ εὐθεῖαι (ε_1) καὶ ΑΒ καθορίζουν τὸ μεσοκάθετον ἐπίπεδον τοῦ τμήματος ΓΔ, διότι (ε_1) $\perp$ ΓΔ καὶ ΑΒ $\perp$ ΓΔ. Τὸ σημεῖον Β τῆς (ε_2) ἀνήκει προφανῶς εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο. Ἔστω Ζ τυχὸν



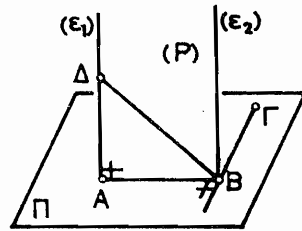
Σχ. 412

σημεῖον τῆς εὐθείας (ε_2). Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΖΒΓ καὶ ΖΒΔ ἔχουν τὴν ΖΒ κοινὴν καὶ $ΒΓ = ΒΔ$. Ἄρα εἶναι ἴσα $\Rightarrow ΖΓ = ΖΔ$. Ἐξ αὐτῆς ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον Ζ ἀνήκει εἰς τὸ μεσοκάθετον ἐπίπεδον τοῦ τμήματος ΓΔ. Τότε

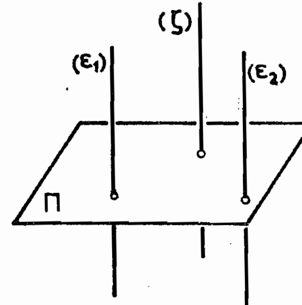
καὶ ἡ εὐθεῖα (ε_2) ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο καὶ ἑπομένως εἶναι συνεπίπεδος τῆς (ε_1). Ἄρα εἶναι $(\varepsilon_1) // (\varepsilon_2)$.

416 Θεώρημα. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) εἶναι παράλληλοι καὶ ἐπίπεδον (Π) εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν, τότε τὸ (Π) εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην.

Ἀπόδειξις. Ἔστω $(\Pi) \perp (\varepsilon_1)$ εἰς τὸ σημεῖον Α (σχ. 413). Τὸ ἐπίπεδον (Π) θὰ τέμνῃ ὁπωσδήποτε καὶ τὴν εὐθεῖαν (ε_2) εἰς σημεῖον Β, διότι εἶναι $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$ (§ 414) καὶ θὰ εἶναι $(\varepsilon_1) \perp AB \Rightarrow (\varepsilon_2) \perp AB$. Ἀρκεῖ ἑπομένως νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ (ε_2) εἶναι κάθετος καὶ εἰς ἄλλην μίαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου (Π).



Σχ. 413



Σχ. 414

Ἐκ τοῦ σημείου Β καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) φέρομεν τὴν $B\Gamma \perp AB$ καὶ ἔστω Δ τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας (ε_1). Γνωρίζομεν ὅτι $\Delta B \perp B\Gamma$ (θεώρ. τριῶν καθέτων) καὶ ἑπομένως $B\Gamma \perp (AB\Delta)$. Τὸ ἐπίπεδον ὅμως (ΑΒΔ) συμπίπτει μὲ τὸ ἐπίπεδον (Ρ) τῶν δύο παραλλήλων (ε_1) καὶ (ε_2), διότι ἔχουν κοινὴν τὴν εὐθεῖαν (ε_1) καὶ τὸ σημεῖον Β. Ἄρα θὰ εἶναι $(\varepsilon_2) \perp B\Gamma$. Τότε ὅμως εἶναι $(\varepsilon_2) \perp (\Pi)$.

417 Θεώρημα. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) εἶναι παράλληλοι πρὸς τρίτην εὐθεῖαν (ζ), εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλοι.

Ἀπόδειξις. Ἂς θεωρήσωμεν ἐπίπεδον $(\Pi) \perp (\zeta)$ (σχ. 414). Τότε θὰ εἶναι $(\Pi) \perp (\varepsilon_1)$ διότι $(\varepsilon_1)//(\zeta)$ (§ 416). Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον θὰ εἶναι καὶ $(\Pi) \perp (\varepsilon_2)$. Ἄρα $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (Π) (§ 415).

ΚΑΘΕΤΑ ΚΑΙ ΠΛΑΓΙΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΤΜΗΜΑΤΑ

418 Θεώρημα. Ἐκ σημείου Α ἐκτὸς ἐπιπέδου (Π) κειμένου :

i) Τὸ κάθετον τμῆμα πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π) εἶναι μικρότερον παντὸς πλαγίου.

ii) Τὰ ἴχνη δύο ἴσων πλαγίων τμημάτων ἰσαπέχουν ἀπὸ τὸ ἴχνος τοῦ καθέτου τμήματος.

iii) Τὰ ἴχνη δύο ἀνίσων τμημάτων ἀπέχουν ὁμοιοστρόφως ἀνίσους ἀποστάσεις ἀπὸ τὸ ἴχνος τοῦ καθέτου τμήματος.

Ἀπόδειξις.

i) ΑΒ ⊥ (Π). Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Β (σχ. 415) καὶ ἑπομένως εἶναι ΑΒ < ΑΓ.

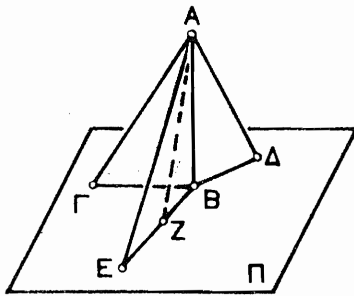
ii) Ἔστωσαν ΑΓ καὶ ΑΔ δύο ἴσα πλάγια εὐθύγραμμα τμήματα. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας καὶ τὴν ΑΒ κοινήν. Ἄρα εἶναι ἴσα ⇒ ΒΓ = ΒΔ.

iii) Ἔστωσαν ΑΕ, ΑΔ δύο ἄνισα εὐθύγραμμα τμήματα μὲ ΑΕ > ΑΔ. Ἐπὶ τῆς ΕΒ λαμβάνομεν σημεῖον Ζ τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι ΑΖ = ΑΔ ⇒ ΒΖ = ΒΔ καὶ ΑΕ > ΑΖ ⇒ ΒΕ > ΒΖ ⇒ ΒΕ > ΒΔ.

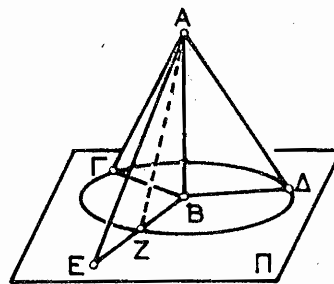
419. Θεώρημα. Εἰς τὸ σύνολον τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων τῶν ἀγομένων ἐκ σημείου Α πρὸς ἐπίπεδον (Π):

i) Μικρότερον ὅλων εἶναι τὸ κάθετον.

ii) Δύο τμήματα εἶναι ἴσα, ἐὰν τὰ ἴχνη των ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) ἰσαπέχουν ἀπὸ τὸ ἴχνος τοῦ καθέτου τμήματος.



Σχ. 415



Σχ. 416

iii) Δύο τμήματα εἶναι ἄνισα, ἐὰν τὰ ἴχνη των ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) ἀπέχουν ὁμοιοστρόφως ἀνίσους ἀποστάσεις ἀπὸ τὸ ἴχνος τοῦ καθέτου τμήματος.

Ἀπόδειξις.

i) Φέρομεν τὸ κάθετον τμῆμα ΑΒ ⊥ (Π) καὶ τυχὸν τμῆμα ΑΔ πλάγιον ὡς πρὸς τὸ (Π). Τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Β καὶ ἑπομένως ΑΒ ≦ ΑΔ, ἤτοι τὸ κάθετον τμῆμα εἶναι μικρότερον παντὸς πλαγίου (τὸ = ἰσχύει εἰς τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ Δ συμπίπτει μὲ τὸ Β).

ii) ΑΒ ⊥ (Π) (σχ. 416) καὶ ἔστω ΒΓ = ΒΔ ⇒ $\overset{\Delta}{\text{ΑΒΓ}} = \overset{\Delta}{\text{ΑΒΔ}}$, διότι εἶναι ὀρθογώνια μὲ ΒΓ = ΒΔ καὶ τὴν ΑΒ κοινήν. Ἄρα ΑΓ = ΑΔ.

iii) Ἔστω ΒΕ > ΒΔ. Ἐπὶ τῆς ΒΕ λαμβάνομεν τμῆμα ΒΖ = ΒΔ ⇒ ΑΖ = ΑΔ καὶ ΒΕ > ΒΖ ⇒ ΑΕ > ΑΖ ⇒ ΑΕ > ΑΔ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

726. Δίδεται εὐθεῖα (ε) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β τοῦ χώρου. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε) σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον νὰ ἰσαπέχῃ ἐκ τῶν Α καὶ Β.

727. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β καὶ εὐθεῖα (ε) εἰς τὸν χῶρον. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Γ τῆς εὐθείας (ε) τοιοῦτον ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ νὰ εἶναι ἰσοσκελὲς α) μὲ κορυφὴν τὸ Γ β) μὲ κορυφὴν τὸ Α.

728. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π), τὰ ὁποῖα ἰσαπέχουν ἐκ τῶν Α καὶ Β.

729. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν στρεβλοῦ τετραπλεύρου (τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου) εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου. Πότε τοῦτο εἶναι ρόμβος ;

730. Δίδεται παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Δείξατε ὅτι τὰ Α καὶ Γ ἰσαπέχουν ἀπὸ κάθε ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς ΒΔ.

Β΄.

731. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), εὐθεῖα (ε) καὶ σημεῖον Α. Διὰ τοῦ Α νὰ ἀχθῇ εὐθύγραμμον τμῆμα ἔχον τὰ ἄκρα του Β καὶ Γ ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε) καὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) ἀντιστοίχως οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι : $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{1}{2}$.

732. Ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β. Ἐκ τῶν Α καὶ Β φέρομεν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ (Π) καθέτους ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) καὶ ἐπ' αὐτῶν λαμβάνομεν τμήματα ΑΓ = κ καὶ ΒΔ = λ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου (Π), ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὰ τμήματα ΑΓ καὶ ΒΔ φαίνονται ὑπὸ ἴσας γωνίας.

733. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον, τὸ ὁποῖον νὰ ἰσαπέχῃ ἀπὸ τέσσαρα δοθέντα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ μὴ κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

734. Δίδεται στρεβλὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ (στρεβλὸν καλεῖται τὸ τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ τέσσαρες κορυφαὶ δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον). Ἀπὸ τὰ μέσα Ε καὶ Ζ τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν του ΑΒ καὶ ΓΔ φέρομεν ἐπίπεδον (Π), τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς ΑΔ καὶ ΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Η καὶ Θ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι : $\frac{ΗΑ}{ΗΔ} = \frac{ΘΒ}{ΘΓ}$.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

420 **Ὁρισμός. Εὐθεῖα (ε) καλεῖται παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον (Π), ἐὰν ἡ τομή των εἶναι τὸ κενὸν σύνολον: (ε)//(Π) $\Longleftrightarrow$ (ε) $\cap$ (Π) = $\varnothing$ (σχ. 417).**

Τότε καὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) καλεῖται παράλληλον τῆς εὐθείας (ε).

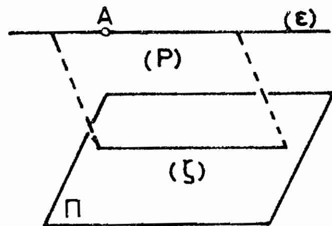
421. Θεώρημα. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), εὐθεῖα (ζ) αὐτοῦ καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ Α θεωροῦμεν εὐθεῖαν (ε)//(ζ). Τότε ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π).

Ἀπόδειξις. Αἱ εὐθεῖαι (ε) καὶ (ζ), ὡς παράλληλοι, καθορίζουν ἐπίπεδον (Ρ) (σχ. 417), τὸ ὁποῖον τέμνεται μετὰ τοῦ (Π) κατὰ τὴν εὐθεῖαν (ζ). Ἡ εὐθεῖα (ε), ὡς εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Ρ), ἀνήκει ἐξ ὁλοκλήρου εἰς αὐτό. Ἑπομένως, ἐὰν ἡ (ε) ἔτεμνε τὸ (Π) εἰς σημεῖον Σ, θὰ ἔπρεπε αὐτὸ νὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ κοινὸν μέρος τῶν δύο ἐπιπέδων, ἤτοι εἰς τὴν εὐθεῖαν (ζ). Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον, καθ' ὅτι εἶναι (ε)//(ζ). Ἄρα ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π).

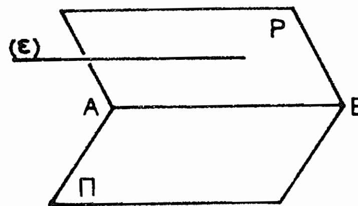
Παρατήρησις. Ἀπὸ τὸ προηγούμενον θεώρημα ἕπεται ὅτι ἀπὸ σημεῖον

Α ἐκτὸς ἐπιπέδου (Π) ὑπάρχουν ἄπειροι εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π).

Πόρισμα. Ἐὰν εὐθεῖα (ε) εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τομὴν ΑΒ δύο τεμνομένων ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) (σχ. 418), μὴ ἀνήκουσα εἰς αὐτά, εἶναι παράλληλος πρὸς ἀμφότερα τὰ ἐπίπεδα.



Σχ. 417

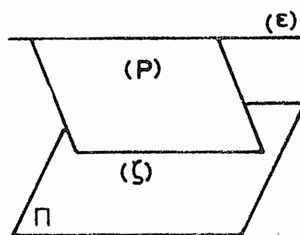


Σχ. 418

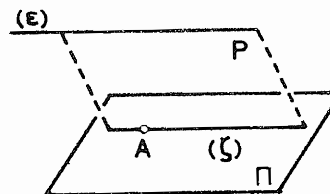
422. Θεώρημα. Ἐὰν εὐθεῖα (ε) εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον (Π), πᾶν ἐπίπεδον (Ρ) διερχόμενον διὰ τῆς εὐθείας (ε) καὶ τέμνον τὸ ἐπίπεδον (Π), τὸ τέμνει κατὰ εὐθεῖαν (ζ)//(ε).

Ἀπόδειξις. Αἱ εὐθεῖαι (ε) καὶ (ζ) εἶναι συνεπίπεδοι (σχ. 419). Ἀρκεῖ ἑπομένως νὰ δειχθῇ ὅτι δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον. Ἀσφαλῶς ὅμως δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον, διότι, ἐὰν ὑπῆρχε κοινὸν σημεῖον Σ, τοῦτο, ὡς σημεῖον τῆς εὐθείας (ζ), θὰ εὑρίσκετο ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π). Ἀλλὰ τότε ἡ εὐθεῖα (ε) θὰ εἶχε τὸ σημεῖον της Σ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π), ὅπερ ἄτοπον, διότι εἶναι (ε)//(Π). Ἄρα εἶναι (ε)//(ζ).

423. Θεώρημα. Ἔστω ἐπίπεδον (Π), σημεῖον Α αὐτοῦ καὶ εὐθεῖα (ε)//(Π). Ἐκ τοῦ Α θεωροῦμεν εὐθεῖαν (ζ)//(ε). Τότε ἡ εὐθεῖα (ζ) εἶναι εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π).



Σχ. 419



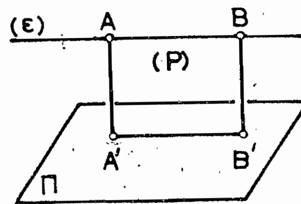
Σχ. 420

Ἀπόδειξις. Αἱ δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (ε) καὶ (ζ) καθορίζουν ἐπίπεδον (Ρ) (σχ. 420). Τὰ δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) ἔχουν κοινὸν σημεῖον τὸ Α. Ἑπομένως θὰ ἔχουν καὶ κοινὴν εὐθεῖαν καὶ μάλιστα αὕτη πρέπει νὰ εἶναι παράλληλος τῆς εὐθείας (ε) (§ 422). Ἐπειδὴ ἐπὶ πλέον πρέπει νὰ διέρχεται

ἀπὸ τὸ σημεῖον Α, δὲν εἶναι ἄλλη παρὰ ἡ ἰδία ἡ εὐθεῖα (ζ). Ἄρα ἡ εὐθεῖα (ζ) ὡς κοινὴ διὰ τὰ δύο ἐπίπεδα, ἀνήκει καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π).

424. Θεώρημα. Ἐὰν εὐθεῖα (ε) εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον (Π), ὅλα τὰ σημεῖα της ἰσαπέχουν ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο σημεῖα τῆς εὐθείας (ε) (σχ. 421). Φέρομεν ΑΑ′ ⊥ (Π) καὶ ΒΒ′ ⊥ (Π) ⇒ ΑΑ′ // ΒΒ′. Αἱ παράλληλοι ΑΑ′ καὶ ΒΒ′ καθορίζουν ἐπίπεδον (Ρ). Τὸ (Ρ) τέμνει τὸ ἐπίπεδον (Π) κατὰ τὴν εὐθεῖαν Α′Β′ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι Α′Β′ // (ε) (§ 422). Τότε τὸ τετράπλευρον ΑΒΒ′Α′ εἶναι παραλληλόγραμμον, ὡς ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευρὰς του παραλλήλους. Ἑπομένως εἶναι ΑΑ′ = ΒΒ′.



Σχ. 421

Ἀντιστρόφως. Ἔστω ὅτι τὰ σημεῖα Α καὶ Β τῆς εὐθείας (ε) ἰσαπέχουν ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον (Π), ἤτοι εἶναι ΑΑ′ = ΒΒ′. Τότε τὸ τετράπλευρον ΑΒΒ′Α′ εἶναι παραλληλόγραμμον ὡς ἔχον τὰς ΑΑ′ καὶ ΒΒ′ ἴσας καὶ παραλλήλους (κάθετοι ἐπὶ τὸ (Π)). Ἄρα εἶναι ΑΒ // Α′Β′ καὶ ἑπομένως (ε) // (Π) (§ 421).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α′.

735. Δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) τέμνονται κατὰ εὐθεῖαν ΑΒ. Ἐπίπεδον (Σ) παράλληλον τῆς ΑΒ τέμνει τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ τομαὶ εἶναι παράλληλοι.

736. Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς δύο δοθέντα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ).

737. Δίδεται εὐθεῖα (ε) καὶ δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ). Νὰ ἀχθῇ διὰ τῆς εὐθείας (ε) ἐπίπεδον τέμνον τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) κατὰ εὐθείας παραλλήλους.

738. Νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ δοθείσης εὐθείας (ε) καὶ ἰσαπέχον ἐκ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β.

739. Νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον διερχόμενον εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ.

Β′.

740. Δίδονται τρεῖς ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ε_1), (ε_2) καὶ (ε). Νὰ ἀχθοῦν διὰ τῶν (ε_1) καὶ (ε_2) δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ), τεμνόμενα κατὰ εὐθεῖαν ΑΒ // (ε).

741. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ εἶναι τοποθετημένα οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι ΑΒ// Α′Β′, ΒΓ//Β′Γ′, ΓΑ//Γ′Α′. Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἢ εἶναι παράλληλοι.

742. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), εὐθεῖα (ε)//(Π) καὶ σημεῖον Σ. Νὰ ἀχθη διὰ τοῦ Σ εὐθεῖα τέμνουσα τὴν εὐθεῖαν (ε) εἰς σημεῖον Α καὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον Β οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι ΑΒ = λ, ὅπου λ δοθὲν μῆκος.

743. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), δύο σημεῖα Α, Β καὶ εὐθύγραμμον τμῆμα α//(Π).

Διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β νὰ ἀχθοῦν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι, τέμνουσαι τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς τὰ Α' καὶ Β' ἀντιστοίχως οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι Α'Β'//=α.

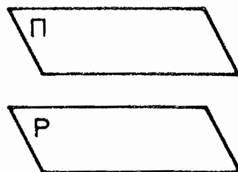
744. (Θεώρημα Desargues). Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι τοποθετημένα εἰς τρόπον, ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ Α'Β' νὰ τέμνωνται εἰς σημεῖον Κ, αἱ ΒΓ καὶ Β'Γ' νὰ τέμνωνται εἰς σημεῖον Λ καὶ αἱ ΓΑ καὶ Γ'Α' νὰ τέμνωνται εἰς σημεῖον Μ. Δείξατε ὅτι α) τὰ σημεῖα Κ, Λ, Μ εὑρίσκονται ἐπ' εὐθείας, β) αἱ εὐθεῖαι ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἢ εἶναι παράλληλοι.

745. Δίδεται στρεβλὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἐπίπεδον (Π) παράλληλον πρὸς τὰς δύο ἀπέναντι πλευρὰς του ΑΒ καὶ ΓΔ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς ΑΔ καὶ ΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι : $\frac{ΕΑ}{ΕΔ} = \frac{ΖΒ}{ΖΓ}$.

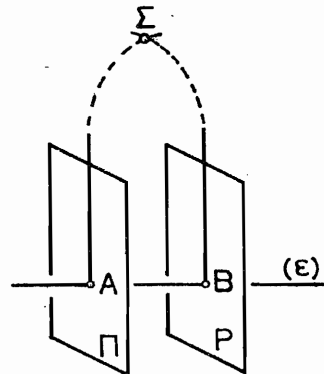
ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ ΕΠΙΠΕΔΑ

425. Ὁρισμός. Δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) καλοῦνται παράλληλα, ἐὰν ἡ τομή των εἶναι τὸ κενὸν σύνολον : (Π)//(Ρ) $\Longleftrightarrow$ (Π) ∩ (Ρ) = ∅ (σχ. 422).

426. Θεώρημα. Δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ), κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (ε), εἶναι μεταξύ των παράλληλα.



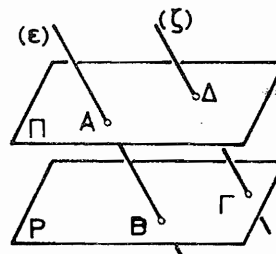
Σχ. 422



Σχ. 423

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι ἡ εὐθεῖα (ε) τέμνει τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β (σχ. 423). Τὰ ἐπίπεδα ἀποκλείεται νὰ τέμνωνται. Διότι, ἐὰν ὑπῆρχε ἓν κοινὸν σημεῖον Σ αὐτῶν, ἐκ τοῦ Σ θὰ ὑπῆρχον δύο εὐθεῖαι ΣΑ καὶ ΣΒ κάθετοι ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε), ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) εἶναι παράλληλα.

427. Θεώρημα. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) εἶναι παράλληλα, πᾶσα εὐθεῖα (ε), τέμνουσα τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν, τέμνει καὶ τὸ ἄλλο.



Σχ. 424

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι ἡ εὐθεῖα (ε) τέμνει τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς τὸ σημεῖον Α (σχ. 424). Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Γ τοῦ ἐπιπέδου (Ρ) καὶ ἐξ αὐτοῦ φέρομεν εὐθεῖαν (ζ)//(ε). Τὸ ἐ-

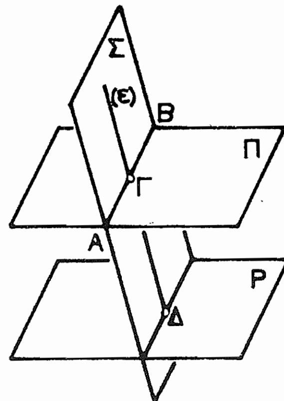
πίπεδον (Π), ὡς τέμνον τὴν εὐθεῖαν (ε), θὰ τέμνῃ καὶ τὴν παράλληλον αὐτῆς (ζ) εἰς σημεῖον Δ (§ 414). Ἄρα ἡ εὐθεῖα (ζ), ὡς ἔχουσα σημεῖον της Δ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου (Ρ), δὲν εἶναι εὐθεῖα τοῦ (Ρ). Τὸ ἐπίπεδον (Ρ) ὅμως τέμνει τὴν εὐθεῖαν (ζ) εἰς τὸ Γ καὶ ἐπομένως θὰ τέμνῃ καὶ τὴν παράλληλόν της (ε) εἰς σημεῖον Β.

428. Θεώρημα. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) εἶναι παράλληλα, πᾶν ἐπίπεδον (Σ) τέμνον τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν, τέμνει καὶ τὸ ἄλλο.

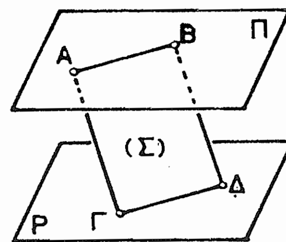
Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι τὸ ἐπίπεδον (Σ) τέμνει τὸ (Π) κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ (σχ. 425). Θεωροῦμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν (ε) τοῦ ἐπιπέδου (Σ) τέμνουσαν τὴν ΑΒ εἰς τὸ Γ. Ἡ εὐθεῖα (ε), τέμνουσα τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς τὸ σημεῖον Γ, θὰ τέμνῃ καὶ τὸ παράλληλον αὐτοῦ ἐπίπεδον (Ρ) εἰς σημεῖον Δ. Ἐξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι τὸ ἐπίπεδον (Σ) ἔχει τὸ σημεῖον του Δ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Ρ) καὶ ἐπομένως τὸ τέμνει.

429. Θεώρημα. Αἱ τομαὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ), ὑπὸ τρίτου ἐπιπέδου (Σ), εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι τὸ ἐπίπεδον (Σ) τέμνει τὰ παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) κατὰ τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ ἀντιστοίχως (σχ. 426). Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι συνεπίπεδοι, ὡς εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου (Σ). Ἀποκλείεται νὰ ἔχουν κοινὸν σημεῖον, διότι ἀνήκουν εἰς τὰ παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ). Ἄρα εἶναι ΑΒ//ΓΔ.



Σχ. 425



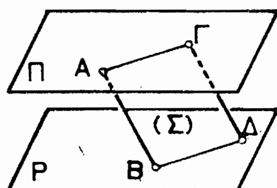
Σχ. 426

Πόρισμα. Δύο παράλληλα εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ, μὲ τὰ ἄκρα των ἐπὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) εἶναι ἴσα.

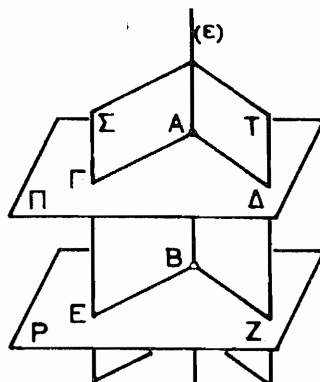
Ἀπόδειξις. Τὰ παράλληλα εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ καθορίζουν ἐπίπεδον (Σ), τὸ ὁποῖον τέμνει τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) κατὰ τὰς ΑΓ καὶ ΒΔ (σχ. 427). Τότε θὰ εἶναι ΑΓ//ΒΔ (§ 429) καὶ ἐπομένως τὸ ΑΒΔΓ εἶναι παραλληλόγραμμον ⇒ ΑΒ = ΓΔ.

430. Θεώρημα. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) εἶναι παράλληλα, πᾶσα εὐθεῖα (ε), κάθετος ἐπὶ τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἄλλο.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι (ε) ⊥ (Π) (σχ. 428). Ἡ εὐθεῖα (ε), ἐφ' ὅσον τέμνει τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον Α, θὰ τέμνῃ καὶ τὸ παράλληλον αὐτοῦ ἐπίπεδον (Ρ) εἰς σημεῖον Β. Ἐκ τοῦ σημείου Α θεωροῦμεν δύο τυχούσας εὐθείας ΑΓ καὶ ΑΔ τοῦ ἐπιπέδου (Π). Ἡ (ε) μετὰ τῶν ΑΓ καὶ ΑΔ καθο-



Σχ. 427

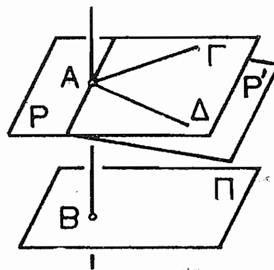


Σχ. 428

ρίζει δύο ἐπίπεδα (Σ) καὶ (Τ) ἀντιστοίχως, τὰ ὁποῖα, ὡς τέμνοντα τὸ (Π) κατὰ τὰς ΑΓ καὶ ΑΔ, θὰ τέμνουν καὶ τὸ παράλληλόν του ἐπίπεδον (Ρ) κατὰ τὰς ΒΕ καὶ ΒΖ ἀντιστοίχως καὶ θὰ εἶναι μάλιστα ΑΓ//ΒΕ καὶ ΑΔ//ΒΖ (§ 429). Ἐπειδὴ (ε) ⊥ (Π) ⇒ (ε) ⊥ ΑΓ καὶ (ε) ⊥ ΑΔ. Τότε ὅμως θὰ εἶναι καὶ (ε) ⊥ ΒΕ καὶ (ε) ⊥ ΒΖ ⇒ (ε) ⊥ (Ρ).

431. Θεώρημα. Ἀπὸ σημεῖον Α κείμενον ἐκτὸς ἐπιπέδου (Π) δύναται νὰ ἀχθῇ ἓν μόνον ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ (Π).

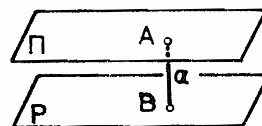
Ἀπόδειξις. Ἐκ τοῦ σημείου Α φέρομεν εὐθεῖαν ΑΒ ⊥ (Π) (σχ. 429). Φέρομεν ἐπίσης ΑΓ ⊥ ΑΒ καὶ ΑΔ ⊥ ΑΒ, αἱ ὁποῖαι καθορίζουν τὸ μοναδικὸν κάθετον ἐπίπεδον (Ρ) ἐπὶ τῆς ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Α. Εἶναι φανερὸν τώρα ὅτι (Ρ)//(Π), ὡς κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Τὸ (Ρ) εἶναι καὶ τὸ μοναδικὸν ἐπίπεδον ἐκ τοῦ Α παράλληλον πρὸς τὸ (Π), διότι, ἐὰν ὑπῆρχε καὶ δεύτερον ἐπίπεδον (Ρ')//(Π) ⇒ (Ρ') ⊥ ΑΒ, διότι ΑΒ ⊥ (Π). Ἀλλὰ τότε θὰ ὑπῆρχον δύο κάθετα ἐπίπεδα ἐκ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΑΒ τὸ (Ρ) καὶ τὸ (Ρ'), ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα ἐκ τοῦ Α ἓν μόνον ἐπίπεδον ὑπάρχει παράλληλον πρὸς τὸ (Π).



Σχ. 429

432. Ἀπόστασις δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) καλεῖται τὸ μῆκος α τοῦ καθέτου εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ τῶν δύο ἐπιπέδων. Τὰ

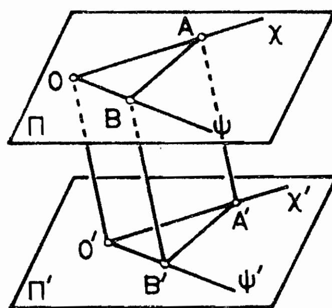
Α καὶ Β εἶναι σημεῖα τῶν ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) ἀντιστοίχως (σχ. 430).



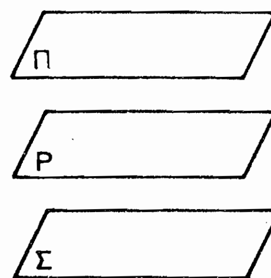
Σχ. 430

433. Θεώρημα. Δύο γωνίαι $x\widehat{O}y$ καὶ $x'\widehat{O'}y'$, ἔχουσαι τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους, εἶναι ἴσαι, τὰ δὲ ἐπίπεδα, τὰ καθοριζόμενα ὑπ' αὐτῶν, εἶναι παράλληλα.

᾿Απόδειξις. ᾿Επὶ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν Ox καὶ O'x' λαμβάνομεν σημεῖα Α καὶ Α' ἀντιστοίχως οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι ΟΑ = Ο'Α' ⇒ τὸ ΟΑΑ'Ο' εἶναι παραλληλόγραμμον ⇒ ΟΟ' // = ΑΑ' (1) (σχ. 431). ῾Ομοίως ἐπὶ τῶν Oy καὶ O'y' λαμβάνομεν ΟΒ = Ο'Β' ⇒ τὸ ΟΒΒ'Ο' εἶναι παραλληλόγραμμον ⇒ ΟΟ' // = ΒΒ' (2). ᾿Εκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι ΑΑ' // = ΒΒ' ⇒ τὸ ΑΒΒ'Α' εἶναι παραλληλόγραμμον ⇒ ΑΒ = Α'Β'. ῎Αρα $\overset{\Delta}{OAB} = \overset{\Delta}{O'A'B'}$, (Π - Π - Π). ᾿Επομένως θὰ εἶναι καὶ $\widehat{O} = \widehat{O'}$ ⇒ $x\widehat{O}y = x'\widehat{O'}y'$.



Σχ. 431



Σχ. 432

Αἱ δύο γωνίαι $x\widehat{O}y$ καὶ $x'\widehat{O'}y'$ καθορίζουν τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (Π') ἀντιστοίχως. ᾿Επειδὴ Ox // O'x' ⇒ Ox // (Π') (§ 421), ἤτοι ἡ Ox ἀποκλείεται νὰ τέμνῃ τὸ ἐπίπεδον (Π'). ῾Ομοίως ἡ Oy, διότι Oy // O'y' ⇒ Oy // (Π'). Τότε ἀποκλείεται νὰ τέμνωνται καὶ τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (Π'), διότι, ἐὰν ἐτέμνοντο κατὰ εὐθεῖαν ΚΛ, αὐτή, ὡς εὐθεῖα τοῦ (Π), θὰ ἔπρεπε νὰ τέμνῃ τοὐλάχιστον μίαν ἐκ τῶν Ox καὶ Oy καὶ αὐτὸ σημαίνει ὅτι μία τοὐλάχιστον ἐκ τῶν Ox καὶ Oy θὰ εἶχε σημεῖον της ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π'), ὅπερ ἄτοπον. ῎Αρα εἶναι (Π) // (Π').

Πόρισμα. ᾿Εὰν δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι ἑνὸς ἐπιπέδου εἶναι παράλληλοι ἀντιστοίχως πρὸς δύο εὐθείας ἑνὸς ἄλλου ἐπιπέδου, τὰ ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα.

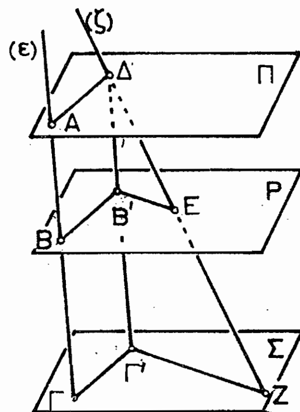
434. Θεώρημα. ᾿Εὰν δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) εἶναι παράλληλα πρὸς τρίτον ἐπίπεδον (Σ), εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλα.

᾿Απόδειξις. (Π) // (Σ), (Ρ) // (Σ) (σχ. 432). Τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ

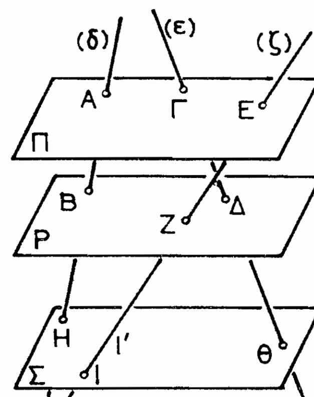
(Ρ) ἀποκλείεται νὰ τέμνωνται, διότι, ἐὰν ἐτέμνοντο, ἐξ ἑνὸς τῶν κοινῶν σημείων των θὰ ὑπῆρχον δύο παράλληλα ἐπίπεδα πρὸς τὸ (Σ), ὅπερ ἄτοπον (§ 431). Ἄρα εἶναι (Π)//(Ρ).

435. Θεώρημα τοῦ Θαλοῦ. Ἐὰν τρία τοὐλάχιστον ἐπίπεδα (Π), (Ρ) καὶ (Σ) εἶναι παράλληλα καὶ τέμνωνται ὑπὸ δύο εὐθειῶν (ε) καὶ (ζ) εἰς τὰ σημεῖα Α,Β,Γ, καὶ Δ,Ε,Ζ ἀντιστοίχως, τὰ ἀποκοπτόμενα τμήματα ἐκ τῶν εὐθειῶν ὑπὸ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων εἶναι ἀνάλογα.

Ἀπόδειξις. Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{EZ}$ (σχ. 433). Ἐκ τοῦ σημείου Δ φέρομεν εὐθεῖαν ΔΒ′Γ′//ΑΒΓ. Αἱ δύο παράλληλοι εὐθεῖαι καθορίζουν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰ ἐπίπεδα (Π), (Ρ) καὶ (Σ) κατὰ εὐθείας παραλλήλους ΑΔ//ΒΒ′//ΓΓ′. Ἄρα τὰ τετράπλευρα ΑΒΒ′Δ καὶ ΒΓΓ′Β′ εἶναι παραλληλόγραμμα ⇒ ΑΒ = ΔΒ′ καὶ ΒΓ = Β′Γ′.



Σχ. 433



Σχ. 434

Αἱ τεμνόμεναι εὐθεῖαι ΔΕΖ καὶ ΔΒ′Γ′ καθορίζουν ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον, τέμνει τὰ ἐπίπεδα (Ρ) καὶ (Σ) κατὰ εὐθείας παραλλήλους Β′Ε//Γ′Ζ. Ἄρα θὰ εἶναι (θεώρημα τοῦ Θαλοῦ εἰς τὸ ἐπίπεδον) $\frac{\Delta B'}{B'\Gamma'} = \frac{\Delta E}{EZ} \Rightarrow \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{EZ}$.

Τὸ θεώρημα δύναται νὰ ἐπεκταθῇ καὶ διὰ περισσότερα τῶν τριῶν ἐπιπέδων.

436. Θεώρημα. Τρεῖς εὐθεῖαι (δ), (ε) καὶ (ζ) ὄχι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου τέμνουν δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) εἰς τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ καὶ Ε,Ζ ἀντιστοίχως (σχ. 434). Ἐὰν ἐπ' αὐτῶν λάβωμεν σημεῖα Η,Θ καὶ Ι ἀντιστοίχως καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου (Ρ) τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι : $\frac{AB}{BH} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta\Theta} = \frac{EZ}{ZI}$, τὰ σημεῖα Η,Θ καὶ Ι καθορίζουν ἐπίπεδον (Σ) παράλληλον πρὸς τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ).

'Απόδειξις. 'Εάν τό ἐπίπεδον (Σ) (σχ. 434), τό ὁποῖον καθορίζεται ἀπό τά σημεῖα Η, Θ καί Ι, δέν ἦτο παράλληλον πρός τά ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ), ἐκ τῶν σημείων Η καί Θ θά διήρχετο ἕν μόνον ἐπίπεδον παράλληλον πρός τά ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) καί θά ἔτεμνε τήν εὐθεῖαν (ζ) εἰς σημεῖον Ι', πρός τό μέρος τῶν Η καί Θ ὡς πρός τό (Ρ) (διατί ;). Τότε θά ἦτο (προηγούμενον θεώρημα) : $\frac{AB}{BH} = \frac{EZ}{ZI'}$ (1). 'Εξ ὑποθέσεως ὅμως ἔχομεν : $\frac{AB}{BH} = \frac{EZ}{ZI}$ (2). 'Εκ τῶν σχέσεων (1) καί (2) ἕπεται $\frac{EZ}{ZI'} = \frac{EZ}{ZI} \Longleftrightarrow ZI' = ZI$, ἤτοι θά ἔπρεπε τό σημεῖον Ι' νά συμπίπτῃ μετά τοῦ σημείου Ι. 'Εξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι (Σ)//(Π)//(Ρ).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

746. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καί εὐθεῖα (ε)//(Π). Διά τῆς (ε) νά ἀχθῇ ἐπίπεδον (Ρ)//(Π).

747. Τρεῖς εὐθεῖαι τοῦ χώρου Οx, Οy, καί Οz ἔχουν κοινόν σημεῖον Ο καί τέμνονται ὑπό δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καί (Ρ) εἰς τά σημεῖα Α, Β, Γ καί Δ, Ε, Ζ ἀντιστοίχως. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι τριγ. ΑΒΓ ≈ τριγ. ΔΕΖ.

748. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καί εὐθεῖα (ε) ἐκτός αὐτοῦ. Νά τοποθετηθῇ τμῆμα δοθέντος μήκους λ μέ τά ἄκρα του ἐπί τοῦ ἐπιπέδου (Π) καί τῆς εὐθείας (ε) καί παράλληλον πρός δοθεῖσαν διεύθυνσιν (δ).

749. Δίδονται δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π)//(Ρ) καί σημεῖον Α τοῦ ἐπιπέδου (Π). Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου (Π), τά ὁποῖα ἰσαπέχουν ἐκ τοῦ σημείου Α καί τοῦ ἐπιπέδου (Ρ).

750. 'Από σημεῖον Α νά ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρός ἐπίπεδον (Π), τέμνουσα δοθεῖσαν εὐθεῖαν (ε).

751. Τρία παράλληλα ἐπίπεδα (Π), (Ρ), (Σ) κατά σειράν ἀπέχουν τά μέν (Π) καί (Ρ) 12cm, τά δέ (Ρ) καί (Σ) 8cm. Εὐθεῖα (ε) τέμνει αὐτά εἰς τά σημεῖα Α,Β,Γ ἀντιστοίχως καί εἶναι ΑΒ = 18cm. Νά ὑπολογισθῇ τό μῆκος ΒΓ.

Β'.

752. Διά δοθέντος σημείου Α νά ἀχθῇ ἐπίπεδον ἰσαπέχον ἀπό τρία δοθέντα σημεῖα Β,Γ,Δ.

753. 'Επί δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καί (Ρ) εὑρίσκονται δύο κύκλοι (Κ,R) καί (Λ,ρ) ἀντιστοίχως. Νά ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρός δοθεῖσαν διεύθυνσιν (δ), ἡ ὁποία νά τέμνῃ τούς δύο κύκλους.

754. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, τά ὁποῖα διαιροῦν εἰς δεδομένον λόγον μ/ν τά τμήματα, τά ὁποῖα ἔχουν τά ἄκρα των ἐπί δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καί (Ρ).

755. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), δύο σημεῖα Α,Β αὐτοῦ καί σημεῖον Κ ἐκτός αὐτοῦ. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων, τά ὁποῖα διέρχονται ἀντιστοίχως διά τῶν ΚΑ καί ΚΒ καί τέμνουν τό ἐπίπεδον (Π) κατά εὐθείας παραλλήλους.

756. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτοῦ. Συνδέομεν τὸ Α μὲ τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου (Π) καὶ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΑΜ λαμβάνομεν σημεῖον Ι τοιοῦτον, ὥστε $\frac{IA}{IM} = \frac{\kappa}{\lambda}$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Ι.

757. Δίδεται κύκλος (O,R) καὶ σημεῖον Α. Ἐὰν Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου, νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου Δ τοῦ τμήματος ΑΜ. Νὰ γίνῃ γενίκευσις ἐὰν $\frac{A\Delta}{AM} = \frac{\kappa}{\lambda}$.

758. Δίδονται τέσσαρα σημεῖα Α,Β,Γ,Δ. Νὰ κατασκευασθοῦν τέσσαρα ἰσαπέχοντα ἐπίπεδα, διερχόμενα διὰ τῶν τεσσάρων δοθέντων σημείων ἀντιστοίχως.

759. Δίδεται κύκλος (O,R) καὶ δύο σημεῖα Β καὶ Γ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου του. Μεταβλητὸν σημεῖον Α διαγράφει τὸν κύκλον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ κ. βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

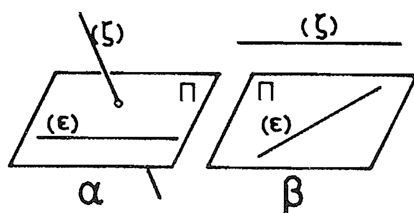
ΑΣΥΜΒΑΤΟΙ ΕΥΘΕΙΑΙ

437. **Ὁρισμός.** Εἰς τὴν § 396 εἴδομεν ὅτι ἀσύμβατοι εὐθεῖαι καλοῦνται δύο μὴ συνεπίπεδοι εὐθεῖαι.

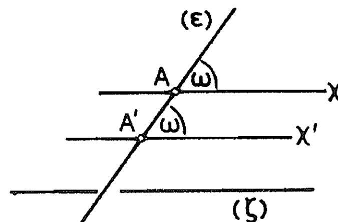
Πόρισμα. Πᾶν ἐπίπεδον (Π), περιέχον μίαν ἐκ δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ε) καὶ (ζ), τέμνει τὴν ἄλλην ἢ εἶναι παράλληλον πρὸς αὐτὴν (σχ. 435 α καὶ β).

438. **Γωνία δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν.** Ἔστωσαν (ε) καὶ (ζ) δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (σχ. 436). Ἐκ τυχόντος σημείου Α τῆς εὐθείας (ε) φέρομεν εὐθεῖαν Αx//(ζ). Ἡ γωνία ω τῶν εὐθειῶν (ε) καὶ Αx* εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ Α ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε) καὶ καλεῖται γωνία τῶν ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ε) καὶ (ζ).

Πράγματι, ἐὰν Α′ εἶναι ἓν ἄλλο σημεῖον τῆς εὐθείας (ε) καὶ ἐξ αὐτοῦ φέρωμεν εὐθεῖαν Α′x′//(ζ), θὰ εἶναι Αx//Α′x′, ὡς παράλληλοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (ζ). Ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\widehat{A} = \widehat{A'} = \omega$.



Σχ. 435



Σχ. 436

439. **Ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι καλοῦνται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι, τῶν ὁποίων ἡ γωνία εἶναι ὀρθή.**

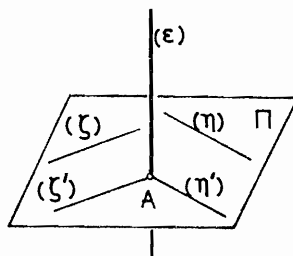
440. **Θεώρημα. Ἐὰν μία εὐθεῖα (ε) εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς δύο εὐθείας (ζ) καὶ (η) ἑνὸς ἐπιπέδου (Π), ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π).**

* Ὑπενθυμίζομεν ὅτι γωνία δύο τεμνομένων εὐθειῶν καλεῖται ἡ μικροτέρα γωνία (ὀξεῖα) τὴν ὁποίαν σχηματίζουν.

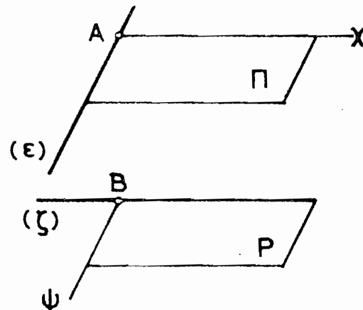
Ἀπόδειξις. Ἀπὸ τὸ ἴχνος Α τῆς εὐθείας (ε) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) φέρομεν τὰς εὐθείας (ζ')//(ζ) καὶ (η')//(η) (σχ. 437). Αἱ εὐθεῖαι (ζ') καὶ (η') ἀνήκουν εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π) (§ 394). Ἐπειδὴ εἶναι (ε) ⊥ (ζ) ⇒ (ε) ⊥ (ζ'). Ὁμοίως εἶναι καὶ (ε) ⊥ (η'). Ἄρα ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π), ὡς κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας του.

441. Θεώρημα. Δοθεισῶν δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ε) καὶ (ζ) ὑπάρχουν δύο μόνον παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ), ἐξ ὧν ἕκαστον περιέχει ἀνὰ μίαν τῶν ἀσυμβάτων.

Ἀπόδειξις. Ἀπὸ σημεῖα Α καὶ Β τῶν ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ε) καὶ (ζ) ἀντιστοίχως φέρομεν ἀνὰ μίαν εὐθεῖαν Αx καὶ Βy παράλληλον τῆς (ζ) καὶ (ε) ἀντιστοίχως (σχ. 438). Τὰ δύο καθοριζόμενα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) εἶναι παράλληλα, διότι δύο εὐθεῖαι τοῦ ἑνὸς εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς δύο εὐθείας τοῦ ἄλλου.



Σχ. 437



Σχ. 438

Εἶναι καὶ τὰ μόνα παράλληλα ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα περιέχουν τὰς δύο ἀσυμβάτους, διότι, ἐὰν ἐκ τοῦ οἱουδήποτε σημείου Α' τῆς εὐθείας (ε) ἤγετο Α'x' //(ζ) ⇒ Α'x'∈ (Π) (§ 423).

Πόρισμα. Δοθεισῶν δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ε) καὶ (ζ) ὑπάρχει ἓν μόνον παράλληλον ἐπίπεδον (Π) πρὸς τὴν εὐθεῖαν (ε), τὸ ὁποῖον περιέχει τὴν εὐθεῖαν (ζ) (σχ. 439).

ΚΟΙΝΗ ΚΑΘΕΤΟΣ ΔΥΟ ΑΣΥΜΒΑΤΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

442. Θεώρημα. Δοθεισῶν δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ε) καὶ (ζ), ὑπάρχει μία καὶ μόνον μία κοινὴ κάθετος αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἐκ τυχόντος σημείου Γ τῆς εὐθείας (ζ) φέρομεν εὐθεῖαν Γx//(ε) (σχ. 440). Αἱ δύο εὐθεῖαι (ζ) καὶ Γx καθορίζουν ἐπίπεδον (Π). Ἐκ τυχόντος σημείου Δ τῆς εὐθείας (ε) φέρομεν ΔΗ ⊥ (Π) καὶ ἐκ τοῦ Η τὴν εὐθεῖαν ΗΒ//(ε). Ἡ εὐθεῖα ΗΒ ἀνήκει ἀσφαλῶς εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π) (§ 423) καὶ ἑπομένως τέμνει τὴν εὐθεῖαν (ζ) εἰς σημεῖον Β (ἀποκλείεται νὰ εἶναι παράλληλοι, διότι τότε θὰ ἦτο καὶ (ε)//(ζ)). Αἱ δύο παράλληλοι (ε) καὶ ΒΗ καθορίζουν ἐπίπεδον (Ρ) εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει προφανῶς καὶ ἡ ΔΗ. Ἀπὸ τὸ

σημεῖον Β φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν ΔΗ, ἡ ὁποία, ὡς εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Ρ), τέμνει τὴν εὐθεῖαν (ε) εἰς σημεῖον Α. Τὸ τετράπλευρον ΑΔΗΒ εἶναι ἐκ κατασκευῆς παραλληλόγραμμον καὶ μάλιστα ὀρθογώνιον,

Σχ. 439

Σχ. 440

διότι εἶναι $ΔΗ \perp (Π) \Rightarrow ΔΗ \perp ΗΒ$. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\widehat{Α} = 1^{L} \Rightarrow ΑΒ \perp (ε)$. Ἐπειδὴ ἐπὶ πλέον εἶναι $ΔΗ \perp (Π) \Rightarrow ΑΒ \perp (Π) \Rightarrow ΑΒ \perp (ζ)$. Ἑπομένως ἡ ΑΒ εἶναι κοινὴ κάθετος διὰ τὰς δύο ἀσυμβάτους εὐθείας (ε) καὶ (ζ).

Ἡ κοινὴ κάθετος ΑΒ τῶν δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν εἶναι καὶ ἡ μοναδική. Πράγματι ἔστω ὅτι ἡ ΙΚ (σχ. 441) εἶναι μία ἄλλη κοινὴ κάθετος τῶν δύο ἀσυμβάτων. Ἐκ τοῦ Κ φέρομεν Κy//(ε). Τότε ἡ ΙΚ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν Κy, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν παράλληλόν της (ε). Ἡ Κy ὅμως ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π), διότι Κy//(ε)//Γx. Ἄρα $ΙΚ \perp (Π)$, ὡς κάθετος ἐπὶ τὰς δύο εὐθείας του (ζ) καὶ Κy $\Rightarrow$ ΑΒ//ΙΚ, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (Π) $\Rightarrow$ αἱ ΑΒ καὶ ΙΚ καθορίζουν ἐπίπεδον, εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει ἡ $ΑΙ \equiv (ε)$ καὶ ἡ $ΒΚ \equiv (ζ)$, ἤτοι αἱ ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ε) καὶ (ζ) εἶναι συνεπίπεδοι, ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα μία μόνον εἶναι ἡ κοινὴ κάθετος δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν.

443. Θεώρημα. Ἐξ ὅλων τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, τῶν ὁποίων τὰ ἄκρα εὑρίσκονται ἐπὶ δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ε) καὶ (ζ), μικρότερον εἶναι τὸ κοινὸν κάθετον τμῆμα ΑΒ τῶν δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ΑΒ τὸ κοινὸν κάθετον τμῆμα τῶν ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ε) καὶ (ζ) (σχ. 442). Ἐκ τοῦ Β φέρομεν τὴν Βx//(ε), ἡ ὁποία μετὰ τῆς

Σχ. 441

Σχ. 442

εὐθείας (ζ) καθορίζουν ἐπίπεδον (Π)//(ε). 'Εὰν ΚΛ εἶναι τυχὸν εὐθύγραμμον τμῆμα μὲ τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ε) καὶ (ζ), ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι $AB < K\Lambda$. Φέρομεν $K\Gamma \perp (\Pi) \Rightarrow AB = K\Gamma$ (§ 424). 'Απὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΚΓΛ λαμβάνομεν $K\Gamma < K\Lambda \Rightarrow AB < K\Lambda$.

444. 'Ελαχίστη ἀπόστασις δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν ἢ ἁπλῶς «ἀπόστασις δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν» καλεῖται τὸ μῆκος τοῦ κοινοῦ καθέτου εὐθυγράμμου τμήματος αὐτῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

760. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) καὶ σημεῖον Α. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Α εὐθεῖα τέμνουσα τὰς δύο ἀσυμβάτους.

761. Ἡ κοινὴ κάθετος ΑΒ δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ε_1) καὶ (ε_2) ἔχει μῆκος 12cm, ἡ δὲ γωνία τῶν ἀσυμβάτων εἶναι 60°. 'Επὶ τῆς (ε_1) λαμβάνομεν τμῆμα ΑΓ = 6cm καὶ ἐπὶ τῆς (ε_2) τμῆμα ΒΔ = 8cm. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ΓΔ (δύο περιπτώσεις).

762. 'Απὸ τὸ μέσον Γ τοῦ κοινοῦ καθέτου τμήματος ΑΒ δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ε_1) καὶ (ε_2) φέρομεν ἐπίπεδον (Π) παράλληλον πρὸς τὰς ἀσυμβάτους. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι κάθε τμῆμα μὲ τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν δύο ἀσυμβάτων διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου (Π).

763. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) παράλληλοι πρὸς τὸ (Π). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ κοινὴ κάθετος τῶν δύο ἀσυμβάτων εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π).

764. Εἰς στρεβλὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ΑΒ = ΓΔ καὶ ΑΔ = ΒΓ. Δείξατε ὅτι ἡ συνδέουσα τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του εἶναι ἡ κοινὴ κάθετος αὐτῶν.

Β'.

765. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2). Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς δύο ἀσυμβάτους καὶ ἔχουσα δοθεῖσαν διεύθυνσιν (δ).

766. Μεταβλητοῦ στρεβλοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αἱ κορυφαὶ Α,Β,Γ διατηροῦνται σταθεραί, ἐνῷ ἡ κορυφὴ Δ διαγράφει εὐθεῖαν (ε). Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τοῦ Δ ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε) οὕτως, ὥστε τὸ παραλληλόγραμμον, τὸ ἔχον κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, εἶναι : α) ὀρθογώνιον, β) ρόμβος.

767. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), σημεῖον Α αὐτοῦ καὶ εὐθεῖα (ε) τέμνουσα τὸ (Π) εἰς τὸ Β. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Α εὐθεῖα (ζ) τοῦ ἐπιπέδου (Π) τοιαύτη, ὥστε ἡ κοινὴ κάθετος τῶν ἀσυμβάτων (ε) καὶ (ζ) νὰ διέρχεται i) διὰ τοῦ σημείου Α, ii) διὰ τοῦ σημείου Β.

768. Διὰ νὰ εἶναι ὀρθογώνια δύο ἀσύμβατα εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ, δείξατε ὅτι πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\Gamma A^2 - \Gamma B^2 = \Delta A^2 - \Delta B^2$.

769. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) τέμνουσαι ἐπίπεδον (Π) εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως. Νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα δοθέντος μήκους λ, παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π) καὶ ἔχον τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν δύο ἀσυμβάτων.

770. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ε) καὶ (ζ) τέμνουσαι αὐτὸ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Μεταβλητὸν εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΔ ἔχει τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν καὶ παραμένει παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου του Ι.

771. Δίδονται τρεῖς ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ε_1), (ε_2), (ε_3). Μεταβλητὸν ἐπίπεδον (Π),

τὸ ὁποῖον παραμένει παράλληλον πρὸς δύο σταθερὰς διευθύνσεις, τέμνει τὰς ἀσυμβάτους εἰς τὰ σημεῖα Α,Β,Γ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ κ. βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

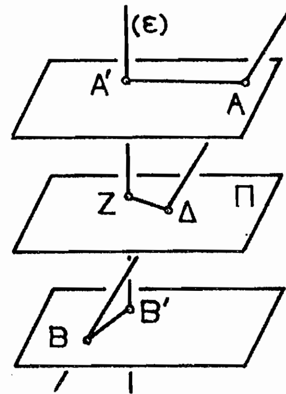
772. 'Εὰν τρεῖς εὐθεῖαι (ε_1), (ε_2), (ε_3) τέμνουν δύο ἀσυμβάτους εὐθείας (δ_1) καὶ (δ_2) εἰς μέρη ἀνάλογα, δείξατε ὅτι ὑπάρχει ἐπίπεδον, πρὸς τὸ ὁποῖον αἱ (ε_1), (ε_2) καὶ (ε_3) εἶναι παράλληλοι.

773. 'Εὰν στρεβλοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι ΑΒ = ΓΔ καὶ ΑΔ = ΒΓ, δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ διερχομένη ἀπὸ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ στρεβλοῦ τετραπλεύρου.

ΟΡΘΑΙ ΠΡΟΒΟΛΑΙ

445. 'Ορθὴ προβολὴ σημείου Α ἐπὶ εὐθεῖαν (ε) καλεῖται τὸ ἴχνος Α' τῆς ἐκ τοῦ Α καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε).

'Ορθὴ προβολὴ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ ἐπὶ εὐθεῖαν (ε) καλεῖται τὸ σύνολον τῶν ὀρθῶν προβολῶν τῶν σημείων τοῦ τμήματος ΑΒ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε) (σχ. 443). Τὸ σημειοσύνολον τοῦτο εἶναι εὐθύγραμμον τμῆμα μὲ ἄκρα τὰς ὀρθὰς προβολὰς Α' καὶ Β' τῶν Α καὶ Β ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε). Κάθε σημεῖον Δ τοῦ τμήματος ΑΒ προβάλλεται εἰς ἓν σημεῖον Ζ τοῦ τμήματος Α'Β' δι' ἐπιπέδου (Π) ἐκ τοῦ Δ καθέτου ἐπὶ τὴν (ε) καὶ ἀντιστρόφως, κάθε σημεῖον Ζ τοῦ τμήματος Α'Β' εἶναι ἡ προβολὴ ἑνὸς σημείου Δ τοῦ τμήματος ΑΒ, ὅπου τὸ Δ εἶναι ἡ τομὴ τοῦ καθέτου ἐπιπέδου ἐπὶ τὴν (ε) ἐκ τοῦ Ζ.



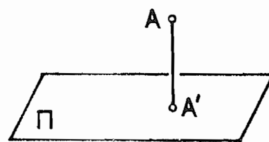
Σχ. 443

446. 'Ορθὴ προβολὴ σημείου Α ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) καλεῖται τὸ ἴχνος Α' τῆς ἐκ τοῦ Α καθέτου εὐθείας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) (σχ. 444).

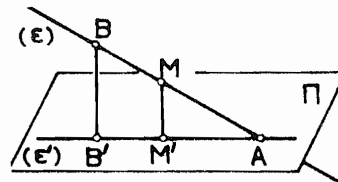
447. 'Ορθὴ προβολὴ σχήματος (Σ) ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) καλεῖται τὸ σύνολον τῶν προβολῶν τῶν σημείων τοῦ σχήματος (Σ) ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π).

448. Θεώρημα. Ἡ ὀρθὴ προβολὴ εὐθείας (ε) ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) εἶναι ἐν γένει εὐθεῖα.

'Απόδειξις. Ἡ εὐθεῖα (ε) τέμνει ἐν γένει τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον Α (σχ. 445). 'Εκ τυχόντος σημείου Β τῆς εὐθείας (ε) φέρομεν τὴν ΒΒ' ⊥ (Π).



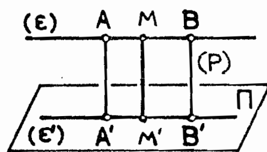
Σχ. 444



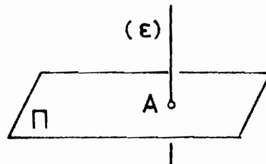
Σχ. 445

Ἡ εὐθεῖα ΒΒ' καὶ τὸ σημεῖον Α καθορίζουν ἐπίπεδον (Ρ), τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ ἐπίπεδον (Π) κατὰ τὴν εὐθεῖαν (ε'). Τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς εὐθείας (ε) προβάλλεται ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον Μ' ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε'), διότι ἡ ΜΜ', ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π), εἶναι παράλληλος τῆς εὐθείας ΒΒ' καὶ ἑπομένως εἶναι εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Ρ). Ἑπομένως τὸ σημεῖον Μ', κατὰ τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ ἐπίπεδον (Π), πρέπει νὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ κοινὸν μέρος τῶν δύο ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ), ἤτοι εἰς τὴν εὐθεῖαν (ε').

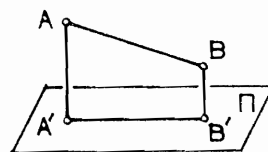
Καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν Μ' εἶναι σημεῖον τῆς εὐθείας (ε'), φέρομεν ἐξ αὐτοῦ κάθετον ἐπὶ τὸ (Π), ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος τῆς ΒΒ' καὶ ἑπομένως περιέχεται εἰς τὸ ἐπίπεδον ΒΒ'Α. Ἄρα τέμνει τὴν ΑΒ εἰς σημεῖον Μ. Ἐξ αὐτῶν ἕπεται ὅτι ἡ ὀρθὴ προβολὴ τῆς εὐθείας (ε) ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) εἶναι ἡ εὐθεῖα (ε').



Σχ. 446



Σχ. 447



Σχ. 448

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π) (σχ. 446), ἡ ὀρθὴ προβολή της (ε') ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) καθορίζεται ἀπὸ τὰς ὀρθὰς προβολὰς Α' καὶ Β' δύο σημείων Α καὶ Β τῆς εὐθείας (ε) ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π). Πράγματι, αἱ ΑΑ' $\perp$ (Π) καὶ ΒΒ' $\perp$ (Π) εἶναι παράλληλοι καὶ ὁρίζουν ἐπίπεδον (Ρ) $\perp$ (Π). Ἀπὸ κάθε σημεῖον Μ τῆς εὐθείας (ε) ἡ ΜΜ' $\perp$ (Π) ἀνήκει εἰς τὸ (Ρ) καὶ ἑπομένως τέμνει τὸ (Π) εἰς Μ'$\in$(ε') καὶ ἀντιστρόφως, ἐκ τυχόντος σημείου Μ' τῆς (ε') ἡ κάθετος ἐπὶ τὸ (Π) ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (Ρ) καὶ ἑπομένως τέμνει τὴν (ε) εἰς σημεῖον Μ. Αἱ εὐθεῖαι (ε) καὶ (ε'), ὡς συνεπίπεδοι καὶ μὴ τεμνόμεναι, εἶναι παράλληλοι εὐθεῖαι.

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) (σχ. 447), ἡ ὀρθὴ προβολή της ἐπὶ τὸ (Π) εἶναι τὸ ἴχνος της Α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π).

Παρατήρησις. Ἡ ὀρθὴ προβολὴ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) εἶναι εὐθύγραμμον τμῆμα μὲ ἄκρα τὰς ὀρθὰς προβολὰς Α' καὶ Β' τῶν Α καὶ Β ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) (σχ. 448) (διατί ;).

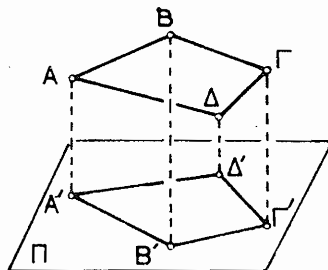
Πόρισμα. Ἡ ὀρθὴ προβολὴ εὐθυγράμμου σχήματος ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) εἶναι εὐθύγραμμον σχῆμα μὲ κορυφὰς τὰς ὀρθὰς προβολὰς τῶν κορυφῶν τοῦ ἀρχικοῦ σχήματος (σχ. 449).

449. Θεώρημα. Ἡ ὀρθὴ προβολὴ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) εἶναι μικροτέρα ἢ ἴση πρὸς τὸ τμῆμα ΑΒ.

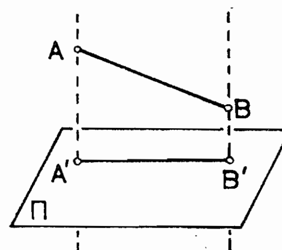
Ἀπόδειξις. Ἔστω Α'Β' ἡ προβολὴ τοῦ τμήματος ΑΒ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον

(Π) (σχ. 450). Τότε εἶναι Α'Β' $\leqq$ ΑΒ, διότι τὸ τμῆμα Α'Β' εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν παραλλήλων εὐθειῶν ΑΑ' καὶ ΒΒ'. Τὸ = ἰσχύει μόνον εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς παραλληλίας τοῦ τμήματος ΑΒ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου (Π).

450. Θεώρημα. Αἱ ὀρθαὶ προβολαὶ δύο παραλλήλων εὐθειῶν (ε) καὶ (ζ) ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι.



Σχ. 449

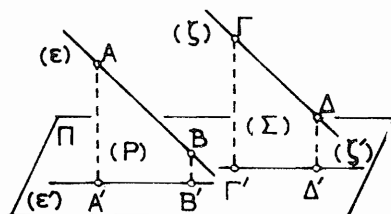


Σχ. 450

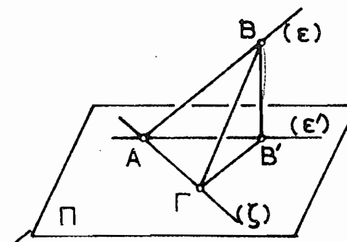
Ἀπόδειξις. Λαμβάνομεν δύο τυχόντα σημεῖα Α καὶ Β τῆς εὐθείας (ε) καὶ τὰ προβάλλομεν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς τὰ σημεῖα Α' καὶ Β' ἀντιστοίχως (σχ. 451). Τὰ σημεῖα Α' καὶ Β' καθορίζουν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) τὴν ὀρθὴν προβολὴν τῆς εὐθείας (ε). Ὁμοίως ἡ εὐθεῖα (ζ) προβάλλεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) εἰς τὴν εὐθεῖαν (ζ') διὰ τῶν ὀρθῶν προβολῶν Γ' καὶ Δ' δύο τυχόντων σημείων της Γ καὶ Δ. Αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΑ' καὶ ΒΒ' καθορίζουν ἐπίπεδον (Ρ), εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει ἡ εὐθεῖα (ε). Ὁμοίως αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΓΓ' καὶ ΔΔ' καθορίζουν ἐπίπεδον (Σ), εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει ἡ εὐθεῖα (ζ). Ἐπειδὴ εἶναι (ε)//(ζ) καὶ ΑΑ'//ΓΓ' ὡς κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (Π), ἕπεται ὅτι (Ρ)//(Σ) (§ 433). Ἄρα θὰ εἶναι καὶ (ε')//(ζ'), ὡς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου.

451. Θεώρημα. Ἐὰν εὐθεῖα (ε) τέμνῃ ἐπίπεδον (Π) εἰς τὸ σημεῖον Α, σχηματίζει γωνίας μὲ τὰς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου (Π), ἐκ τῶν ὁποίων μικροτέρα εἶναι ἡ σχηματιζομένη μὲ τὴν προβολήν της (ε').

Ἀπόδειξις. Ἐκ τυχόντος σημείου Β τῆς εὐθείας (ε) φέρομεν ΒΒ' ⊥ (Π) (σχ. 452). Ἡ εὐθεῖα ΑΒ' ≡ (ε') εἶναι ἡ προβολὴ τῆς εὐθείας (ε) ἐπὶ τὸ



Σχ. 451



Σχ. 452

ἐπίπεδον (Π). Ἄς θεωρήσωμεν καὶ τυχοῦσαν εὐθεῖαν (ζ) τοῦ ἐπιπέδου (Π), διερχομένην διὰ τοῦ σημείου Α. Ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα $ΑΓ = ΑΒ'$ καὶ ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι $\widehat{ΒΑΒ'} < \widehat{ΒΑΓ}$.

$ΒΒ' < ΒΓ$, διότι ἡ ΒΓ εἶναι ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΒ'Γ ($\widehat{Β'} = 1^{L}$). Τότε ἀπὸ τὰ τρίγωνα ΒΑΒ' καὶ ΒΑΓ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν ΒΑ κοινήν, $ΑΒ' = ΑΓ$ καὶ $ΒΒ' < ΒΓ$, ἕπεται ὅτι $\widehat{ΒΑΒ'} < \widehat{ΒΑΓ}$.

452. Γωνία εὐθείας καὶ ἐπιπέδου καλεῖται ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ἐν λόγῳ εὐθεῖα, μὲ τὴν προβολήν της ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

Ἡ αὐτὴ γωνία καλεῖται καὶ **γωνία κλίσεως** τῆς εὐθείας ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον.

453. Τὰ σχήματα εἰς τὴν Στερεομετρίαν. Ἡ στερεομετρία, ἀποτελοῦσα ἐπέκτασιν τῆς ἐπιπεδομετρίας, μὲ πρώτην σκέψιν δὲν θὰ πρέπει νὰ παρουσιάζῃ μεγαλυτέραν δυσχέρειαν εἰς τὴν ἀντιμετώπισιν τῶν θεμάτων της, ἀπὸ ἐκείνην τῆς ἐπιπεδομετρίας. Παρὰ ταῦτα ὅμως, ὑπάρχει μεγαλυτέρα δυσχέρεια καὶ τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι δὲν ἐργαζόμεθα μὲ αὐτὰ τὰ ἴδια στερεὰ τῆς στερεομετρίας, ἀλλὰ ἀπεικονίζομεν αὐτὰ ἐπὶ ἐπιπέδου (φύλλου χάρτου ἢ πίνακος) καὶ ἐργαζόμεθα μὲ τὰς εἰκόνας των.

Αἱ εἰκόνες τῶν στερεῶν μὲ τὰς ὁποίας ἐργαζόμεθα, δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο, παρὰ αἱ ὀρθαὶ προβολαὶ τῶν ἐν λόγῳ στερεῶν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον σχεδιάσεως. Διὰ τὴν σχεδίασιν ἑπομένως τῶν σχημάτων, πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν ὡρισμένους ἀπαραβάτους κανόνας, ἤτοι :

i) Ἐὰν τὸ πρὸς ἀπεικόνισιν στερεὸν περιέχῃ παραλλήλους εὐθείας, αὗται θὰ σχεδιασθοῦν ὡς παράλληλοι (§ 450).

ii) Τὰ μήκη ἐν γένει δὲν διατηροῦνται, ἀλλὰ προβάλλονται εἰς μικρότερα (§ 449).

iii) Δύο παράλληλα καὶ ἴσα τμήματα ἔχουν παραλλήλους καὶ ἴσας προβολὰς (διατί ;)

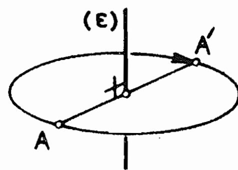
iv) Αἱ γωνίαι ἐν γένει δὲν διατηροῦνται, ἀλλὰ προβάλλονται εἰς μεγαλυτέρας ἢ μικροτέρας γωνίας καὶ τοῦτο θὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν φανταστικὴν θέσιν τοῦ στερεοῦ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον σχεδιάσεως. Τὰ ἐπίπεδα τμήματα, ἐπὶ παραδείγματι, τὰ ὁποῖα φανταζόμεθα ὡς ὀρθογώνια, τὰ σχεδιάζομεν συνήθως ὡς πλάγια παραλληλόγραμμα, δηλαδὴ ἐκ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν των αἱ δύο ἀπέναντι προβάλλονται ὡς ἀμβλεῖαι καὶ αἱ ἄλλαι δύο ὡς ὀξεῖαι.

Ἐν τέλει, ἡ ὀρθὴ καὶ παραστατικὴ σχεδίασις τῶν σχημάτων ἐξαρτᾶται κατὰ πολὺ καὶ ἀπὸ τὴν ἐμπειρίαν τοῦ ἀσχολουμένου.

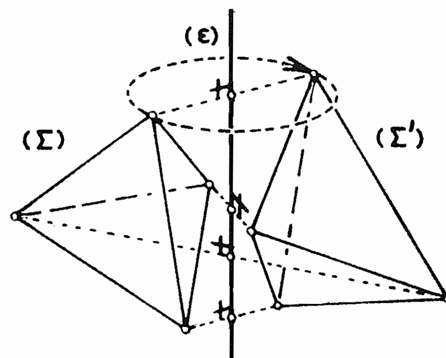
454. Ἀξονικὴ συμμετρία. Καθορίζεται ἐπακριβῶς, ὅπως καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον ὡς μετατόπισις. Οὕτω τὸ συμμετρικὸν σημείου Α, ὡς πρὸς ἄξονα εὐθεῖαν (ε) (σχ. 453), εἶναι σημεῖον Α', τὸ ὁποῖον προκύπτει ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ σημείου Α περὶ τὴν εὐθεῖαν (ε), κατὰ γωνίαν 180^{0}. Τὸ ἐπίπεδον

ἐπὶ τοῦ ὁποίου γίνεται ἡ περιστροφὴ τοῦ A εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα συμμετρίας (ε). Τὸ τμῆμα AA′ ἔχει ὡς μεσοκάθετον τὸν ἄξονα συμμετρίας (ε)

Τὸ συμμετρικὸν (Σ′) ἑνὸς στερεοῦ (Σ) ὡς πρὸς ἕνα ἄξονα συμμετρίας (ε) ἀπαρτίζεται ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν συμμετρικῶν τῶν σημείων τοῦ στερεοῦ (Σ) ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν ἄξονα (σχ. 454). Τὰ δύο στερεὰ (Σ) καὶ (Σ′) εἶναι ἴσα, διότι τὸ (Σ′) προκύπτει ἀπὸ μετατόπισιν (περιστροφὴν) τοῦ στερεοῦ (Σ).



Σχ. 453



Σχ. 454

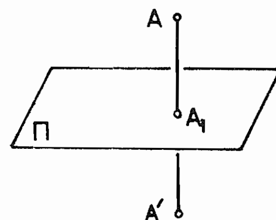
455. Ἄξων συμμετρίας στερεοῦ. Ἐὰν δι' ἓν στερεὸν (Σ) ὑπάρχῃ εὐθεῖα (ε) καὶ εἶναι τοιαύτη, ὥστε τὸ συμμετρικὸν M′ τυχόντος σημείου M τοῦ στερεοῦ (Σ), ὡς πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν (ε), νὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ (Σ), τότε λέγομεν ὅτι τὸ στερεὸν (Σ) ἔχει ἄξονα συμμετρίας τὴν εὐθεῖαν (ε).

ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΝ (ΚΑΤΟΠΤΡΙΣΜΟΣ)

456. Ὁρισμός. Ἔστω ἐπίπεδον (Π) καὶ σημεῖον A ἐκτὸς αὐτοῦ (σχ. 455).

Συμμετρικὸν τοῦ σημείου A, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π), καλεῖται ἓν σημεῖον A′, τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἐπίπεδον (Π) νὰ εἶναι τὸ μεσοκάθετον τοῦ τμήματος AA′.

Κατόπιν τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ, διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὸ συμμετρικὸν A′ τοῦ σημείου A ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π), φέρομεν ἐκ τοῦ A τὴν $AA_1 \perp (\Pi)$ καὶ εἰς τὴν προέκτασιν λαμβάνομεν τμῆμα $A_1A' = A_1A$.



Σχ. 455

Πόρισμα I. Τὸ συμμετρικὸν τοῦ σημείου A′ συμμετρικοῦ τοῦ A, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π), εἶναι τὸ σημεῖον A.

Πόρισμα II. Τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π) παραμένουν ἀναλλοίωτα εἰς τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς τὸ (Π), ἤτοι συμπίπτουν μὲ τὰ συμμετρικά των.

457. Ὁρισμός. Συμμετρικὸν σχήματος (Σ), ὡς πρὸς ἐπίπεδον (Π) καλεῖται ἓν σχῆμα (Σ΄), τὸ ὁποῖον ἀπαρτίζεται ἀπὸ τὰ συμμετρικὰ τῶν σημείων τοῦ σχήματος (Σ), ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π).

Ἐὰν ὑπάρχῃ ἐπίπεδον, ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον τὸ συμμετρικὸν (Σ΄) ἑνὸς σχήματος (Σ) συμπίπτει μὲ τὸ σχῆμα (Σ), θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ σχῆμα (Σ) ἔχει ἐπίπεδον συμμετρίας.

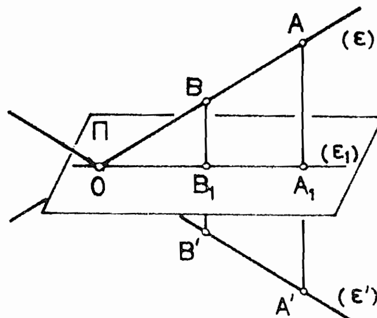
Παράδειγμα. Τὰ ἔμψυχα ὄντα τῆς φύσεως ἐν γένει ἔχουν ἐπίπεδον συμμετρίας.

458. Θεώρημα. Τὸ συμμετρικὸν εὐθείας, ὡς πρὸς ἐπίπεδον, εἶναι εὐθεῖα.

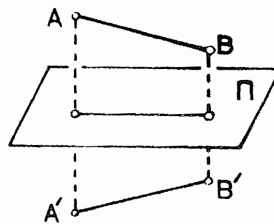
Ἀπόδειξις. Ἔστω εὐθεῖα (ε) καὶ (Π) τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας (σχ. 456). Λαμβάνομεν δύο σημεῖα Α καὶ Β τῆς εὐθείας (ε) καὶ κατασκευάζομεν τὰ συμμετρικά των Α΄ καὶ Β΄ ἀντιστοίχως, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π). Αἱ εὐθεῖαι ΑΑ΄ καὶ ΒΒ΄ τέμνουν τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς τὰ σημεῖα A_1 καὶ B_1 ἀντιστοίχως, τὰ ὁποῖα καθορίζουν τὴν ὀρθὴν προβολὴν (ε_1) τῆς εὐθείας (ε) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π). Τότε ἡ συμμετρία τῆς εὐθείας (ε), ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π), δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ ἀξονικὴ συμμετρία, ὡς πρὸς ἄξονα τὴν εὐθεῖαν (ε_1). Ἑπομένως, λόγῳ συνυπαρχούσης ἀξονικῆς συμμετρίας, τὸ συμμετρικὸν τῆς εὐθείας (ε), ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π) εἶναι εὐθεῖα (ε΄).

Πόρισμα Ι. Ἐὰν εὐθεῖα (ε) τέμνῃ ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον Ο, ἡ συμμετρικὴ εὐθεῖα (ε΄) τῆς (ε) ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π) διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Ο.

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα (ε) ἦτο παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π), καὶ ἡ συμμετρική της θὰ ἦτο παράλληλος πρὸς τὸ (Π).



Σχ. 456



Σχ. 457

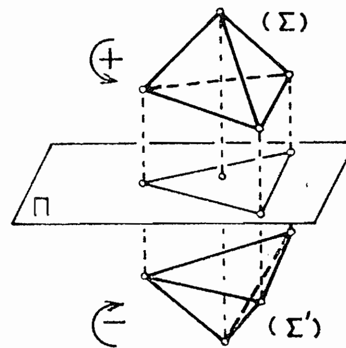
Πόρισμα ΙΙ. Τὸ συμμετρικὸν εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ, ὡς πρὸς ἐπίπεδον (Π) εἶναι εὐθύγραμμον τμῆμα Α΄Β΄, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ἄκρα τὰ συμμετρικὰ τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος ΑΒ (σχ. 457) καὶ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΑΒ.

Πόρισμα ΙΙΙ. Τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, ὡς πρὸς ἐπίπεδον (Π), εἶναι ἴσον τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄, διότι τὰ δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς πλευρὰς των ἀντιστοίχως ἴσας. Κατὰ συνέπειαν καὶ τὸ συμμετρικὸν οἱουδήποτε ἐπιπέδου

εὐθυγράμμου σχήματος, ὡς πρὸς ἐπίπεδον, εἶναι ἴσον σχῆμα καὶ γενικώτερον τὸ συμμετρικὸν οἱουδήποτε ἐπιπέδου σχήματος εἶναι ἴσον σχῆμα.

Παρατηρήσεις.

i) Τὸ συμμετρικὸν (Σ′) ἑνὸς στερεοῦ (Σ), ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π), ἐν γένει δὲν εἶναι σχῆμα ἴσον πρὸς τὸ σχῆμα (Σ) καὶ τοῦτο, διότι τὰ δύο στερεὰ εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμένα (σχ. 458).



Σχ. 458

Παράδειγμα. Αἱ παλάμαι τῶν χειρῶν μας, τιθέμεναι ἀντιμέτωποι, δύνανται νὰ θεωρηθοῦν συμμετρικαὶ ἀλλήλων, ὡς πρὸς ἐνδιάμεσον ἐπίπεδον. Εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι δὲν εἶναι ἴσαι, διότι, ἐὰν ἦσαν ἄϋλαι, δὲν θὰ ἠδύναντο νὰ ταυτισθοῦν τιθέμεναι ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης.

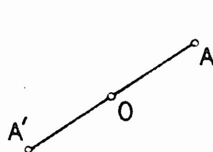
ii) Ἡ συμμετρία, ὡς πρὸς ἐπίπεδον, καλεῖται καὶ κατοπτρισμός, διότι δύο συμμετρικὰ μεταξύ των στερεά, ὡς πρὸς ἐπίπεδον, ἔχουν τοιαύτην σχέσιν, οἵαν σχέσιν ἔχει τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν μὲ τὸ κατοπτρικόν του εἴδωλον ἐντὸς ἐπιπέδου κατόπτρου.

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

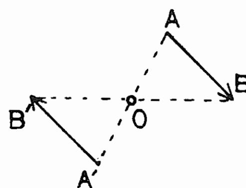
459. Ὁρισμός. Δοθέντος σημείου Α καὶ σημείου Ο, καλουμένου κέντρου, καλοῦμεν συμμετρικὸν τοῦ σημείου Α, ὡς πρὸς κέντρον τὸ σημεῖον Ο, ἓν σημεῖον Α′ τοιοῦτον, ὥστε τὸ τμῆμα ΑΑ′ νὰ ἔχῃ ὡς μέσον τὸ κέντρον Ο (σχ. 459).

Πόρισμα. Τὸ συμμετρικὸν τοῦ σημείου Α′, συμμετρικοῦ τοῦ Α, ὡς πρὸς τὸ κέντρον Ο, εἶναι τὸ σημεῖον Α.

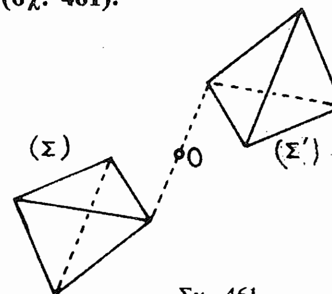
460. Ὁρισμός. Συμμετρικὸν σχήματος (Σ), ὡς πρὸς κέντρον σημεῖον Ο, καλεῖται ἓν σχῆμα (Σ′), τὸ ὁποῖον ἀπαρτίζεται ἀπὸ τὰ συμμετρικὰ τῶν σημείων τοῦ σχήματος (Σ), ὡς πρὸς τὸ κέντρον Ο (σχ. 461).



Σχ. 459



Σχ. 460



Σχ. 461

Ἐὰν τὸ σχῆμα (Σ′) συνέπιπτε μὲ τὸ σχῆμα (Σ), λέγομεν ὅτι τὸ (Σ) ἔχει κέντρον συμμετρίας τὸ σημεῖον Ο.

461. Ἡ κεντρικὴ συμμετρία ἀπεικονίζει ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ εἰς ἴσον τμῆμα Α′Β′ (§ 81), καὶ ἑπομένως τὰ ἐπίπεδα σχήματα γενικῶς τὰ ἀπεικονίζει εἰς ἴσα σχήματα. Ἕνα προσανατολισμένον τμῆμα ὅμως $\overrightarrow{AB}$ τὸ ἀπεικονίζει εἰς τὸ ἀντίθετόν του $\overrightarrow{A'B'}$ (σχ. 460), ἤτοι εἶναι $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{A'B'}$ καὶ ἑπομένως τὰ στερεὰ τὰ ἀπεικονίζει ἀντιθέτως προσανατολισμένα, ἤτοι μὴ ἐφαρμόσιμα $\Longleftrightarrow$ ὄχι ἴσα (σχ. 461).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α′.

774. Ἐὰν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ προβάλλεται ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) εἰς τὸ Α′Β′, δείξατε ὅτι εἶναι $AB \geqq A'B' \geqq 0$.

775. Δείξατε ὅτι τὸ μέσον εὐθυγράμμου τμήματος προβάλλεται εἰς τὸ μέσον τῆς προβολῆς του ἐπὶ τυχὸν ἐπίπεδον.

776. Τρία σημεῖα Α,Β,Γ κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ προβάλλονται ἐπ' ἐπιπέδου (Π) εἰς τὰ Α′,Β′,Γ′ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι : $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$.

777. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτοῦ καὶ σημεῖα Β καὶ Γ τοῦ (Π). Ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Α ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον (Π) εἶναι 3λ καὶ ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ εἶναι 5λ. Ἐὰν Α′ εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ Α ἐπὶ τὸ (Π), δείξατε ὅτι : $(A'B\Gamma) = \frac{4}{5}(AB\Gamma)$.

778. Εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ μήκους 20cm ἔχει προβολὴν Α′Β′ ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) μήκους 10cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία κλίσεως τοῦ τμήματος, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον.

779. Σημεῖον Α ἀπέχει ἀπὸ ἐπίπεδον (Π) 8cm καὶ σημεῖον Β ἀπέχει ἀπὸ τὸ (Π) 10cm. Ἐὰν ἡ γωνία κλίσεως τοῦ τμήματος ΑΒ, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π), εἶναι 30°, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ΑΒ, ὅταν : α) τὰ Α καὶ Β εὑρίσκονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου (Π), β) τὰ Α καὶ Β εὑρίσκονται ἑκατέρωθεν τοῦ (Π).

780. Νὰ ἐξετασθῇ τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ γωνία κλίσεως τοῦ τμήματος ΑΒ, ὡς πρὸς τὸ (Π), εἶναι 45°.

Β′.

781. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ προβολαὶ δύο παραλλήλων καὶ ἴσων εὐθυγράμμων τμημάτων ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι ἴσαι.

782. Δίδεται ὀρθὴ γωνία $x\widehat{K}y$. Ἐὰν ἡ μία πλευρά της εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον (Π), δείξατε ὅτι ἡ προβολὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) εἶναι ὀρθὴ γωνία.

783. Δίδεται εὐθεῖα (ε) καὶ σημεῖον Α. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν ὀρθῶν προβολῶν τοῦ σημείου Α ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, τὰ διερχόμενα διὰ τῆς εὐθείας (ε).

784. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

785. Τὸ αὐτὸ πρόβλημα ὅταν ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β πρέπει νὰ εἶναι μεγίστη.

786. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθύγραμμον τμῆμα, ἔχον ὡς μέσον δοθὲν σημεῖον Ο καὶ τὰ ἄκρα του νὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ εὐθείας (ε) καὶ ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) ἀντιστοίχως.

787. Δίδεται ὀρθὴ γωνία $x\widehat{K}y$, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ τέμνουν ἐπίπεδον (Π) εἰς τὰ Α καὶ Β. Δείξατε ὅτι ἡ προβολὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον εἶναι ἀμβλεῖα γωνία.

788. Πότε ἡ προβολὴ μιᾶς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ ἐπίπεδον εἶναι ὀξεῖα γωνία ;

789. Δίδεται ὀξεῖα γωνία $x\widehat{O}y$. Ἐὰν ἡ μία πλευρά της εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον (Π), δείξατε ὅτι ἡ προβολὴ τῆς γωνίας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον εἶναι ὀξεῖα γωνία.

790. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ὀρθῶν προβολῶν δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ τρεῖς εὐθείας, ἀνὰ δύο ὀρθογωνίους, ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ δοθέντος τμήματος.

791. Δίδεται στρεβλὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ σημεῖον Σ. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Σ ἐπίπεδον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου τὸ τετράπλευρον νὰ προβάλλεται κατὰ παραλληλόγραμμον.

792. Ὑπὸ ποίας συνθήκας ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας προβάλλεται ἐπὶ ἐπιπέδου κατὰ τὴν διχοτόμον τῆς προβολῆς της ;

793. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2). Μεταβλητὸν τμῆμα σταθεροῦ μήκους λ ἔχει τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν δύο ἀσυμβάτων. Δείξατε ὅτι ὑπάρχει ἐπίπεδον, ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον τὸ τμῆμα σχηματίζει σταθερὰν γωνίαν κλίσεως καὶ προβάλλεται ἐπ' αὐτοῦ κατὰ σταθερὸν μῆκος.

794. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὑπάρχουν δύο ἄξονες συμμετρίας, ὅπου μέσῳ ἑκάστου ἐξ αὐτῶν ἡ μία ἐκ τῶν ἀσυμβάτων εὐθειῶν ἀπεικονίζεται ἐπὶ τῆς ἄλλης.

795. Δίδεται εὐθεῖα (ε) καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτῆς. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν συμμετρικῶν τοῦ Α, ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα, τὰ διερχόμενα διὰ τῆς εὐθείας (ε).

796. Δίδονται δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ὄχι μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων. Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντομώτερος δρόμος ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β, ὅταν αὐτὸς πρέπει νὰ ἐγγίζῃ τὰ δύο ἐπίπεδα καὶ τὸ ἐντὸς τῶν ἐπιπέδων τμῆμα του νὰ ἔχῃ καθωρισμένον μῆκος λ.

797. Δίδονται δύο ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι (ε) καὶ (ζ). Εὐθύγραμμον τμῆμα σταθεροῦ μήκους λ ἔχει τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου Μ τοῦ τμήματος ΑΒ.

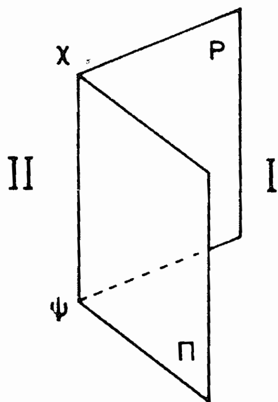
ΔΙΕΔΡΟΙ ΓΩΝΙΑΙ

462. Ὁρισμός. Δύο ἡμιεπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) μὲ κοινὴν ἀρχὴν εὐθεῖαν xy διαιροῦν τὸν χῶρον εἰς δύο περιοχὰς Ι καὶ ΙΙ (σχ. 462). Ἑκάστη ἐξ αὐτῶν καλεῖται δίεδρος γωνία μὲ ἀκμὴν τὴν εὐθεῖαν xy καὶ μὲ ἕδρας τὰ ἡμιεπίπεδα (Π) καὶ (Ρ)

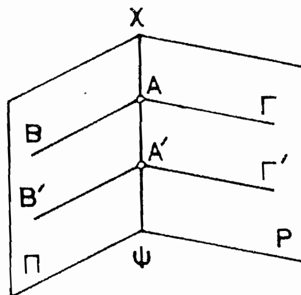
Τὴν δίεδρον γωνίαν συμβολίζομεν μὲ (Π)xy(Ρ).

463. Ἀντίστοιχος ἐπίπεδος διέδρου. Ἔστω δίεδρος γωνία (Π)xy(Ρ) καὶ Α τυχὸν σημεῖον τῆς ἀκμῆς της xy (σχ. 463). Ἐκ τοῦ Α θεωροῦμεν κάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ τὴν xy, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς ἕδρας τῆς διέδρου κατὰ τὰς ἡμιευθείας ΑΒ καὶ ΑΓ. Ἡ σχηματιζομένη ἐπίπεδος γωνία $\widehat{BA\Gamma}$ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ σημείου Α ἐπὶ τῆς xy καὶ καλεῖται «ἀντίστοιχος ἐπίπεδος γωνία τῆς διέδρου (Π)xy(Ρ)».

Πράγματι, ἐὰν Α' εἶναι ἓν ἄλλο σημεῖον τῆς ἀκμῆς xy καὶ φέρομεν ἐξ αὐτοῦ τὸ κάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ τὴν xy, θὰ καθορισθῆ ἀντιστοίχως ἡ ἐπίπεδος



Σχ. 462



Σχ. 463

γωνία $B'\widehat{A'}\Gamma'$, ἡ ὁποία εἶναι προφανῶς ἴση μὲ τὴν $B\widehat{A}\Gamma$, ὡς ἔχουσαι τὰς πλευρὰς των παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους (§ 433).

Δέον νὰ σημειωθῆ ὅτι αἱ πλευραὶ τῆς ἀντιστοίχου ἐπιπέδου γωνίας εὑρίσκονται ἐπὶ τῶν ἑδρῶν τῆς διέδρου καὶ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ἀκμήν.

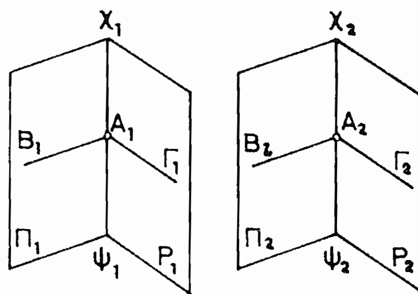
464. Θεώρημα. Ἐὰν δύο δίεδροι γωνίαι $(\Pi_1)x_1y_1(P_1)$ καὶ $(\Pi_2)x_2y_2(P_2)$ εἶναι ἴσαι, τότε καὶ αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἴσαι καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Ἐφ' ὅσον αἱ δίεδροι εἶναι ἴσαι, δύνανται νὰ ταυτισθοῦν μὲ μετατόπισιν καὶ ἑπομένως δύνανται νὰ ἀποκτήσουν κοινὴν ⇒ ἴσην ἀντίστοιχον ἐπίπεδον γωνίαν, μὲ κάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ τὴν κοινὴν ἀκμήν των.

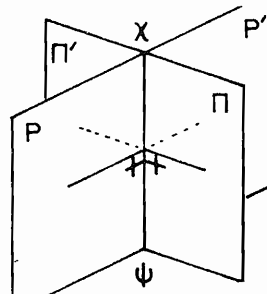
Ἀντιστρόφως. Ἔστω $B_1\widehat{A_1}\Gamma_1 = B_2\widehat{A_2}\Gamma_2$ αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι γωνίαι τῶν διέδρων (σχ. 464). Φανταζόμεθα μετατόπισιν τῆς ἐπιπέδου γωνίας $B_2\widehat{A_2}\Gamma_2$ οὕτως, ὥστε νὰ ταυτισθῆ μὲ τὴν $B_1\widehat{A_1}\Gamma_1$. Τότε κατ' ἀνάγκην ἡ ἀκμὴ x_2y_2 θὰ ταυτισθῆ μετὰ τῆς ἀκμῆς x_1y_1, διότι ἄλλως ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $B_1A_1\Gamma_1$ θὰ ὑπῆρχον δύο κάθετοι εὐθεῖαι εἰς τὸ σημεῖον A_1, ὅπερ ἄτοπον. Τότε ὅμως τὸ ἡμιεπίπεδον (Π_2) εἰς τὴν νέαν θέσιν του θὰ ταυτισθῆ μετὰ τοῦ (Π_1), διότι θὰ ἔχῃ μετ' αὐτοῦ κοινὰς τὰς A_1B_1 καὶ x_1y_1. Ὁμοίως καὶ τὸ ἡμιεπίπεδον (P_2) θὰ ταυτισθῆ μετὰ τοῦ (P_1). Ἄρα αἱ δίεδροι εἶναι ἴσαι, ἐφ' ὅσον δύνανται νὰ ταυτισθοῦν.

465. Κατ' ἀκμὴν δίεδροι καλοῦνται δύο δίεδροι γωνίαι (Π)xy(P) καὶ (Π')xy(P') (σχ. 465), αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὴν ἀκμὴν xy καὶ εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν ἀκμήν των xy. Ἑπομένως δύο κατ' ἀκμὴν δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι (§ 454). Αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι γωνίαι

αὐτῶν, αἱ προκύπτουσαι ἀπὸ τὸ αὐτὸ κάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν xy, εἶναι κατὰ κορυφήν.



Σχ. 464

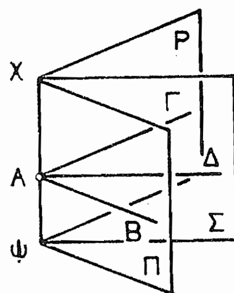


Σχ. 465

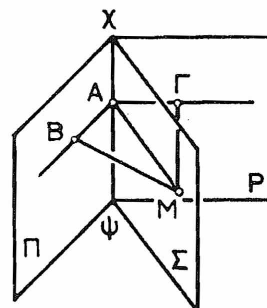
466. Διχοτομοῦν ἐπίπεδον. Ἔστω (Π)xy(P) μία δίεδρος γωνία καὶ $\widehat{BAΓ}$ ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος αὐτῆς (σχ. 466). Ἡ διχοτόμος ΑΔ τῆς γωνίας $\widehat{BAΓ}$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν xy ὡς εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου ΒΑΓ καὶ καθορίζει μετὰ τῆς xy ἐπίπεδον (Σ). Τὸ ἐπίπεδον (Σ) καλεῖται ἐπίπεδον διχοτομοῦν τὴν δίεδρον (Π)xy(P) καὶ τὴν διαιρεῖ εἰς δύο ἴσας διέδρους. Πράγματι εἶναι $(Π)xy(Σ) = (P)xy(Σ) \Longleftrightarrow \widehat{BAΔ} = \widehat{ΓAΔ}$.

467. Χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τοῦ διχοτομοῦντος ἐπιπέδου. Πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διχοτομοῦντος δίεδρον γωνίαν, ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς ἕδρας της καὶ ἀντιστρόφως, πᾶν σημεῖον ἐσωτερικὸν μιᾶς διέδρου καὶ ἰσαπέχον ἀπὸ τὰς ἕδρας της ἀνήκει εἰς τὸ διχορομοῦν ἐπίπεδον.

Ἀπόδειξις. Ἔστω δίεδρος γωνία (Π)xy(P), (Σ) τὸ διχοτομοῦν αὐτὴν ἐπίπεδον καὶ Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ (Σ) (σχ. 467). Ἐκ τοῦ Μ φέρομεν ΜΑ ⊥



Σχ. 466



Σχ. 467

xy, ΜΒ ⊥ (Π), ΜΓ ⊥ (P) ⇒ ΑΒ ⊥ xy καὶ ΑΓ ⊥ xy (θεώρ. τριῶν καθέτων), ἤτοι ἡ γωνία $\widehat{BAΓ}$ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος τῆς διέδρου (Π)xy(P), ὡς καὶ αἱ $\widehat{BAM}$ καὶ $\widehat{ΓAM}$ αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι τῶν (Π)xy(Σ) καὶ (P)xy

(Σ). Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Μ ἀνήκει εἰς τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον τῆς διέδρου (Π)xy(Ρ), ἕπεται ὅτι $\widehat{BAM} = \widehat{ΓAM}$. Ἄρα τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΑΜ καὶ ΓΑΜ εἶναι ἴσα, διότι ἐπὶ πλέον ἔχουν καὶ τὴν ΜΑ κοινὴν ⇒ ΜΒ = ΜΓ.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω ὅτι αἱ ἀποστάσεις ΜΒ καὶ ΜΓ τοῦ σημείου Μ ἀπὸ τὰς ἕδρας τῆς διέδρου (Π)xy(Ρ) εἶναι ἴσαι. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ τότε τὰ αὐτὰ ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ΜΒ = ΜΓ καὶ ΜΑ κοινήν. Ἄρα $\widehat{BAM} = \widehat{ΓAM}$ καὶ ἑπομένως τὸ σημεῖον Μ ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (Σ) τὸ διχοτομοῦν τὴν δίεδρον (Π)xy(Ρ).

468. Μέτρησις διέδρου γωνίας. Ἐκ τῶν προηγουμένων (§ 464, 466) ἕπεται ὅτι ἡ διχοτόμησις μιᾶς διέδρου γωνίας συνεπάγεται τὴν διχοτόμησιν τῆς ἀντιστοίχου αὐτῆς ἐπιπέδου καὶ ἀντιστρόφως. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ διαίρεσις μιᾶς διέδρου εἰς ν διέδρους συνεπάγεται τὴν διαίρεσιν εἰς ν ἴσας ἐπιπέδους τῆς ἀντιστοίχου ἐπιπέδου. Ἄρα τὰ γεωμετρικὰ στοιχεῖα «δίεδροι γωνίαι» καὶ «ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίπεδοι» εἶναι ἀνάλογα καὶ ἑπομένως δέχονται ἀριθμητικῶς μόνον τὰς ἰδίας μονάδας μετρήσεως. Λέγομεν, ἐπὶ παραδείγματι, ὅτι μία δίεδρος γωνία εἶναι 60°, ἐὰν καὶ μόνον ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς ἐπίπεδος εἶναι 60°. Εὐνόητον εἶναι ὅτι ὅλαι αἱ μονάδες μετρήσεως τῶν γωνιῶν ἔχουν τὰς ἀντιστοίχους των διὰ τὴν μέτρησιν τῶν διέδρων γωνιῶν.

Αἱ πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως μεταξὺ διέδρων γωνιῶν ὡς καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἢ διαιρέσεως διέδρου μὲ φυσικὸν ἀριθμόν, ἀνάγονται εἰς τὰς ἀντιστοίχους πράξεις μεταξὺ τῶν ἀντιστοίχων ἐπιπέδων γωνιῶν των.

469. Εἴδη διέδρων γωνιῶν. Ἀντιστοίχως πρὸς τὰ γνωστὰ εἴδη τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ὁρίζομεν καὶ διὰ τὰς διέδρους γωνίας :

i) Ὀξεῖα δίεδρος, ὅταν ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς ἐπίπεδος γωνία εἶναι ὀξεῖα.

ii) Ὀρθὴ δίεδρος, ὅταν ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς ἐπίπεδος γωνία εἶναι ὀρθή.

iii) Ἀμβλεῖα δίεδρος ὅταν ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς ἐπίπεδος εἶναι ἀμβλεῖα γωνία.

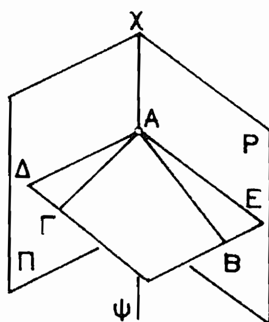
470. Συμπληρωματικαὶ δίεδροι καλοῦνται δύο δίεδροι γωνίαι, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι μία ὀρθὴ δίεδρος.

471. Παραπληρωματικαὶ δίεδροι καλοῦνται δύο δίεδροι γωνίαι, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι μία πεπλατυσμένη δίεδρος.

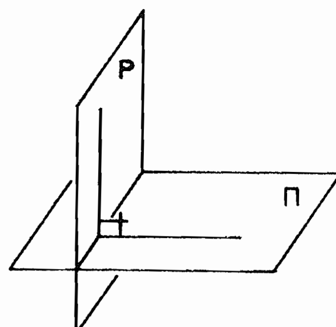
472. Θεώρημα. Ἐὰν ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Α τῆς ἀκμῆς xy διέδρου γωνίας (Π)xy(Ρ) ἀχθοῦν ἡμιευθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ κάθετοι ἐπὶ τὰς ἕδρας τῆς διέδρου καὶ πρὸς τὸ μέρος τῶν ἑδρῶν (Ρ) καὶ (Π) ἀντιστοίχως, αἱ ἡμιευθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ καθορίζουν δίεδρον μὲ ἀκμὴν τὴν xy παραπληρωματικὴν τῆς διέδρου (Π)xy(Ρ).

Ἀπόδειξις. $AB \perp (Π) \Rightarrow AB \perp xy$, $AΓ \perp (P) \Rightarrow AΓ \perp xy$ (σχ. 468).

Ἄρα τὸ ἐπίπεδον τῶν ἡμιευθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν xy καὶ ἑπομένως αἱ τομαί του ΑΔ καὶ ΑΕ μὲ τὰς ἕδρας τῆς διέδρου δίδουν τὴν ἀντίστοιχον ἐπίπεδον γωνίαν $\widehat{ΔΑΕ}$ τῆς διέδρου. Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι



Σχ. 468



Σχ. 469

$\widehat{ΒΑΓ} + \widehat{ΔΑΕ} = 2^{L}$. $\widehat{ΒΑΔ} = 1^{L}$, $\widehat{ΓΑΕ} = 1^{L} \Rightarrow \widehat{ΒΑΔ} + \widehat{ΓΑΕ} = 2^{L} \Rightarrow (\widehat{ΒΑΓ} + \widehat{ΓΑΔ}) + (\widehat{ΓΑΒ} + \widehat{ΒΑΕ}) = 2^{L} \Rightarrow \widehat{ΒΑΓ} + (\widehat{ΓΑΔ} + \widehat{ΓΑΒ} + \widehat{ΒΑΕ}) = 2^{L}$ $\Rightarrow \widehat{ΒΑΓ} + \widehat{ΔΑΕ} = 2^{L}$.

ΚΑΘΕΤΑ ΕΠΙΠΕΔΑ

473. Ὁρισμός. Δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) καλοῦνται κάθετα μεταξύ των, ὅταν μία ἐκ τῶν τεσσάρων διέδρων, τὰς ὁποίας σχηματίζουν, εἶναι ὀρθὴ (σχ. 469).

Εὐνόητον εἶναι ὅτι καὶ αἱ τέσσαρες σχηματιζόμεναι δίεδροι εἶναι ὀρθαί.

474. Θεώρημα. Ἔστω εὐθεῖα (ε) κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον (Π). Πᾶν ἐπίπεδον (Ρ), περιέχον τὴν εὐθεῖαν (ε), εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π).

Ἀπόδειξις. Ἔστω Α τὸ ἴχνος τῆς εὐθείας (ε) ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) (σχ. 470). Τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ), ὡς ἔχοντα κοινὸν τὸ σημεῖον Α, ἔχουν κοινὴν εὐθεῖαν, τὴν xy. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) φέρομεν εὐθεῖαν $ΑΒ \perp xy$.

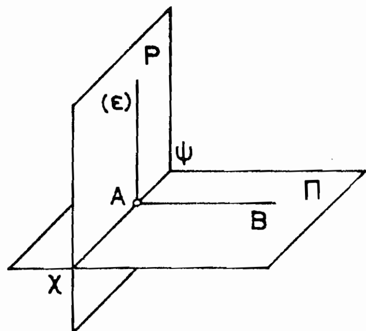
Ἐπειδὴ $(ε) \perp (Π) \Rightarrow (ε) \perp xy$ καὶ $(ε) \perp ΑΒ$. Ἄρα ἡ ὀρθὴ γωνία $\widehat{(ε)ΑΒ}$ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος γωνία τῆς διέδρου (Π)xy(Ρ) καὶ ἑπομένως τὰ δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) εἶναι κάθετα.

475. Θεώρημα. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) εἶναι κάθετα μεταξύ των, πᾶσα εὐθεῖα (ε) τοῦ ἐπιπέδου (Π), κάθετος ἐπὶ τὴν τομήν των xy, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Ρ).

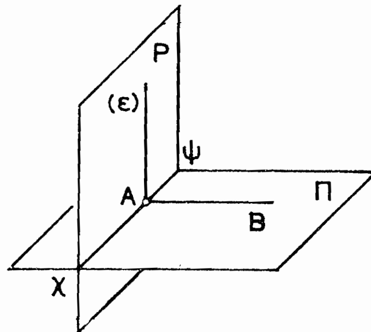
Ἀπόδειξις. Ἔστω Α τὸ ἴχνος τῆς εὐθείας (ε) ἐπὶ τὴν xy (σχ. 471). Ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν xy τοῦ ἐπιπέδου (Π). Ἀρκεῖ

ἐπομένως νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ μίαν ἄλλην εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου (Π).

Φέρομεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) εὐθεῖαν ΑΒ ⊥ xy. Τότε ἡ γωνία $(\varepsilon)\widehat{AB}$ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος τῆς διέδρου (Π)xy(Ρ) καὶ ἐπειδὴ εἶναι '(Π) ⊥



Σχ. 470

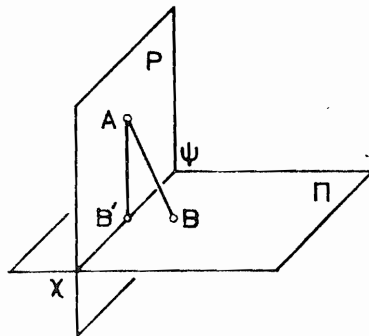


Σχ. 471

(Ρ) ⇒ (ε) ⊥ ΑΒ. Ἄρα (ε) ⊥ (Π), ὡς κάθετος ἐπὶ τὰς δύο εὐθείας του xy καὶ ΑΒ.

476. Θεώρημα. Ἔστωσαν (Π) καὶ (Ρ) δύο κάθετα μεταξύ των ἐπίπεδα καὶ Α τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου (Ρ). Φέρομεν ΑΒ ⊥ (Π). Τότε ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (Ρ).

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΒ δὲν ἀνῆκεν εἰς τὸ ἐπίπεδον (Ρ), δὲν θὰ ἔτεμνε τὴν τομὴν xy τῶν δύο ἐπιπέδων (σχ. 472). Θὰ ὑπῆρχεν ἑπομένως εὐθεῖα ΑΒ′ ⊥ xy. Τότε ὅμως, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, θὰ ἦτο ΑΒ′ ⊥ (Π), ἤτοι θὰ ὑπῆρχον δύο κάθετοι ΑΒ καὶ ΑΒ′ ἐκ τοῦ σημείου Α πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π), ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα ἡ ΑΒ ⊥ (Π) ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (Ρ).



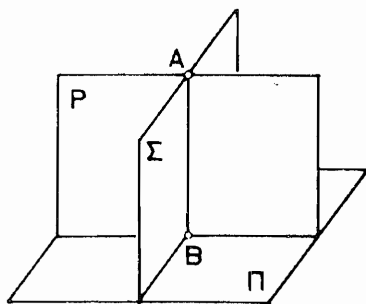
Σχ. 472

477. Θεώρημα. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα (Ρ) καὶ (Σ) εἶναι κάθετα ἐπὶ ἐπιπέδον (Π), τότε καὶ ἡ τομή των εἶναι εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π).

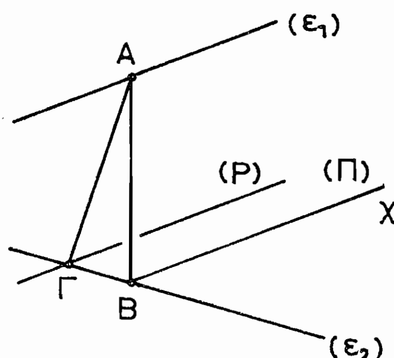
Ἀπόδειξις. Ἔστω Α τυχὸν σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων (Ρ) καὶ (Σ) (σχ. 473). Ἐξ αὐτοῦ φέρομεν ΑΒ ⊥ (Π) ⇒ ΑΒ∈(Ρ) καὶ ΑΒ∈(Σ) (§ 476). Ἄρα ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων (Ρ) καὶ (Σ) καὶ ἑπομένως εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π).

478. Θεώρημα. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι εἶναι ὀρθογώνιοι, ὑπάρχει ἓν καὶ μόνον ἓν ἐπίπεδον διὰ τῆς μιᾶς κάθετον ἐπὶ τὴν ἄλλην.

Ἀπόδειξις. Ἂς θεωρήσωμεν δύο ὀρθογωνίους εὐθείας (ε_1) καὶ (ε_2) (σχ. 474). Φέρομεν τὴν κοινὴν κάθετον ΑΒ αὐτῶν καὶ ἐκ τοῦ Β τὴν $Bx // (\varepsilon_1)$ $\Rightarrow Bx \perp (\varepsilon_2)$. Αἱ δύο παράλληλοι Bx καὶ (ε_1) ὁρίζουν ἐπίπεδον (Π), τὸ



Σχ. 473



Σχ. 474

ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν (ε_2), διότι ἀφ' ἑνὸς μὲν εἶναι $Bx \perp (\varepsilon_2)$, ἀφ' ἑτέρου δὲ $AB \perp (\varepsilon_2)$. Ἄρα ὑπάρχει ἐπίπεδον (Π) διὰ τῆς (ε_1), κάθετον ἐπὶ τὴν (ε_2).

Ἐκτὸς τοῦ (Π) δὲν ὑπάρχει ἄλλο. Διότι, ἐὰν ὑπῆρχε διὰ τῆς (ε_1) καὶ δεύτερον ἐπίπεδον $(P) \perp (\varepsilon_2)$, αὐτὸ θὰ ἔτεμνε τὴν (ε_2) εἰς σημεῖον Γ καὶ θὰ ἦτο $(\varepsilon_2) \perp (P) \Rightarrow (\varepsilon_2) \perp$ ΑΓ. Αὐτὸ ὅμως εἶναι ἄτοπον, διότι ἐκ τοῦ Α θὰ ὑπῆρχον δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν (ε_2), ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΑΓ. Ἄρα δὲν ὑπάρχει δεύτερον ἐπίπεδον διὰ τῆς (ε_1), κάθετον ἐπὶ τὴν (ε_2).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

798. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα δύο κατ' ἀκμὴν διέδρων γωνιῶν ἀποτελοῦν ἓν ἐπίπεδον.

799. Ἐὰν δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) τμηθοῦν ὑπὸ τρίτου ἐπιπέδου (Σ), δείξατε ὅτι αἱ ἐντὸς καὶ ἐναλλὰξ σχηματιζόμεναι δίεδροι εἶναι ἴσαι, αἱ δὲ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δίεδροι εἶναι παραπληρωματικαί.

800. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι κάθε εὐθεῖα, ἀνήκουσα εἰς τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον μιᾶς διέδρου γωνίας, εἶναι ἴσον κεκλιμένη πρὸς τὰς ἕδρας τῆς διέδρου.

801. Ἐὰν δύο δίεδροι γωνίαι ἔχουν τὰς ἕδρας των παραλλήλους, δείξατε ὅτι αἱ ἀκμαί των εἶναι παράλληλοι.

802. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, τὰ ὁποῖα ἰσαπέχουν ἀπὸ δύο δοθέντα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ).

803. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα δύο ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικῶν διέδρων γωνιῶν εἶναι κάθετα.

804. Εὐθεῖα (ε) εἶναι πλαγία ὡς πρὸς ἐπίπεδον (Π). Δείξατε ὅτι διὰ τῆς (ε) διέρχεται ἓν μόνον ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ (Π).

805. Ἐὰν εὐθεῖα (ε) εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον (Π), δείξατε ὅτι πᾶν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε) εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π).

806. Ἐὰν ἓν ἐπίπεδον (Π) εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν τομὴν δύο ἐπιπέδων (Ρ) καὶ (Σ), δείξατε ὅτι τὸ (Π) εἶναι κάθετον ἐπὶ τὰ (Ρ) καὶ (Σ).

807. Ἐὰν εὐθεῖα (ε) εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον (Π), δείξατε ὅτι ἡ προβολή της ἐπὶ ἐπίπεδον (Ρ), τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ (Π), εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν τῶν δύο ἐπιπέδων.

Β΄.

808. Ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ πλευρᾶς α ἡ πλευρὰ ΒΓ εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον (Π). Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου σχηματίζῃ μὲ τὸ ἐπίπεδον (Π) γωνίαν 60^o, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀρθῆς προβολῆς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π).

809. Νὰ ἐξετασθῇ τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, ἐὰν ἡ σχηματιζομένη δίεδρος γωνία εἶναι 45^o ἢ 30^o.

810. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἰσαπέχουν ἀπὸ δύο παραλλήλους εὐθείας.

811. Δείξατε ὅτι, ἐὰν ἓν στερεὸν ἔχῃ δύο ἐπίπεδα συμμετρίας κάθετα μεταξύ των ἔχει καὶ ἄξονα συμμετρίας τὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων.

812. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), δύο σημεῖα Β καὶ Γ αὐτοῦ καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτοῦ. Ἐὰν Α΄ εἶναι ἡ ὀρθὴ προβολὴ τοῦ σημείου Α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π), δείξατε ὅτι εἶναι (Α΄ΒΓ) = (ΑΒΓ)·συνφ, ὅπου φ εἶναι ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει τὸ ἐπίπεδον (Π) μετὰ τοῦ ἐπιπέδου (ΑΒΓ).

813. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δοθέντα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) ἔχουν λόγον μ : ν.

814. Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι ἐξ ἴσου κεκλιμένη πρὸς τὰς ἕδρας διέδρου γωνίας, δείξατε ὅτι τὰ ἴχνη της ἐπὶ τῶν ἑδρῶν τῆς διέδρου ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὴν ἀκμὴν καὶ ἀντιστρόφως.

815. Δίδονται δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) τεμνόμενα καθέτως. Δείξατε ὅτι, ἵνα μία εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π) εἶναι ὀρθογώνιος ὡς πρὸς μίαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου (Ρ), πρέπει καὶ ἀρκεῖ μία τοὐλάχιστον τῶν εὐθειῶν τούτων νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν xy τῶν δύο ἐπιπέδων.

816. Εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ ἔχει τὰ ἄκρα του Α καὶ Β ἐπὶ τῶν ἑδρῶν δοθείσης διέδρου γωνίας. Τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον τῆς διέδρου τέμνει τὸ τμῆμα ΑΒ εἰς σημεῖον Γ. Δείξατε ὅτι ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου Γ ἀπὸ τὰ Α καὶ Β εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀποστάσεων τῶν Α καὶ Β ἀπὸ τὴν ἀκμὴν τῆς διέδρου.

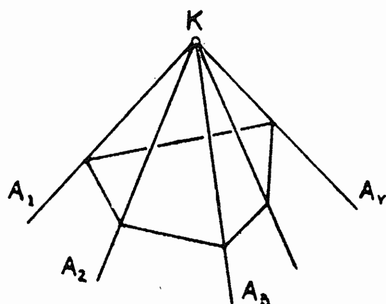
817. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ τρία ἐπίπεδα, ἀνὰ δύο κάθετα, ἰσοῦται πρὸς τὸ διπλάσιον τετράγωνον τοῦ δοθέντος τμήματος.

ΣΤΕΡΕΑΙ ΓΩΝΙΑΙ

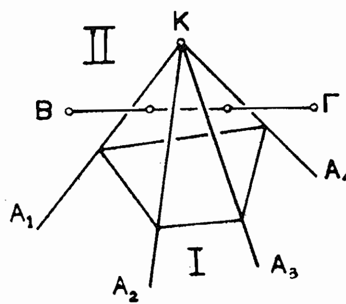
479. Ὁρισμός. Μὲ ἀρχὴν σημεῖον Κ θεωροῦμεν μίαν διαδοχὴν ἡμιευθειῶν $ΚΑ_1$, $ΚΑ_2$, $ΚΑ_3$,...,$ΚΑ_ν$, $ΚΑ_1$, $ν \geqq 3$, αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἀνὰ τρεῖς διαδοχικαὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (σχ. 475). Τὸ σύνολον τῶν (ἐπιπέδων) γωνιῶν μὲ πλευρὰς δύο διαδοχικὰς ἡμιευθείας ἀπαρτίζει ἓν στερεὸν σχῆμα, τὸ ὁποῖον καλεῖται ν - εδρος στερεὰ γωνία.

Τὸ σημεῖον Κ καλεῖται **κορυφὴ** τῆς στερεᾶς γωνίας, αἱ ἡμιευθεῖαι KA_1, KA_2, KA_3,..., KA_ν καλοῦνται **ἀκμαὶ** της καὶ αἱ γωνίαι $A_1\widehat{K}A_2, A_2\widehat{K}A_3, \ldots, A_\nu\widehat{K}A_1$ **ἕδραι** αὐτῆς.

Τὰ κύρια στοιχεῖα μιᾶς ν- έδρου στερεᾶς γωνίας εἶναι αἱ ν ἕδραι της (ἐπίπε-



Σχ. 475



Σχ. 476

δοι γωνίαι) καὶ αἱ ν δίεδροι αὐτῆς μὲ ἀκμὰς τὰς ἀκμὰς τῆς στερεᾶς γωνίας. **Διαγώνιον** ἐπίπεδον καλεῖται κάθε ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ δύο μὴ διαδοχικὰς ἀκμάς. Τὰ διαγώνια ἐπίπεδα μιᾶς ν - έδρου γωνίας εἶναι τόσα, ὅσαι καὶ αἱ διαγώνιοι ἑνὸς ν - γώνου, τὸ ὁποῖον προκύπτει μὲ ἐπίπεδον τομὴν τῆς διέδρου, ἤτοι $\frac{\nu(\nu-3)}{2}$.

Μία ν - εδρος στερεὰ γωνία καλεῖται κανονική, ἐὰν ἔχῃ ὅλας τὰς ἕδρας της ἴσας καὶ ὅλας τὰς διέδρους της ἐπίσης ἴσας.

480. Κυρτὴ στερεὰ γωνία. Μία στερεὰ γωνία καλεῖται κυρτή, ἐὰν εἶναι δυνατὸν ὅλαι αἱ ἕδραι της νὰ τμηθοῦν ὑπὸ ἐπιπέδου καὶ ἡ τομὴ νὰ εἶναι κυρτὸν πολύγωνον (σχ. 476).

Μία κυρτὴ στερεὰ γωνία διαιρεῖ τὸν χῶρον εἰς δύο περιοχὰς I καὶ II. Ἐξ αὐτῶν ἡ περιοχὴ I ἔχει τὴν ἑξῆς ἰδιότητα : Διὰ κάθε ζεῦγος σημείων της, τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα μὲ ἄκρα τὰ σημεῖα ταῦτα, ἀνήκει εἰς τὴν περιοχήν. Ἡ περιοχὴ αὕτη καλεῖται κυρτὴ περιοχὴ τοῦ χώρου καὶ ἀποτελεῖ τὸ ἐσωτερικὸν τῆς κυρτῆς στερεᾶς γωνίας. Ἡ ἄλλη περιοχὴ II, ὅπου ὑπάρχει ἓν τοὐλάχιστον ζεῦγος σημείων {Β, Γ} τοιοῦτον, ὥστε τὸ τμῆμα ΒΓ δὲν ἀνήκει ἐξ ὁλοκλήρου εἰς τὴν περιοχὴν II, καλεῖται μὴ κυρτὴ περιοχὴ καὶ ἀποτελεῖ τὸ ἐξωτερικὸν τῆς κυρτῆς στερεᾶς γωνίας.

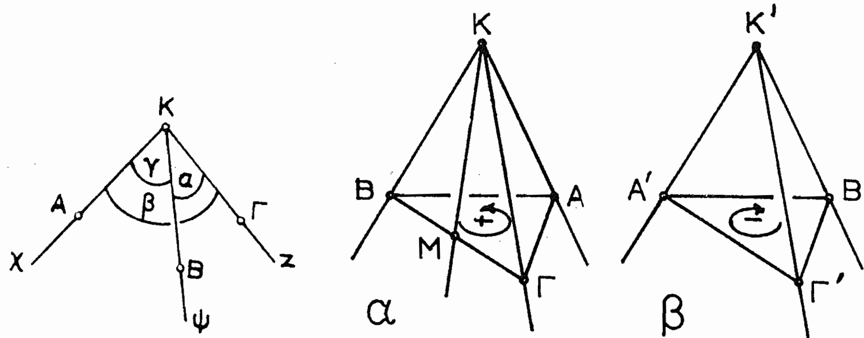
Αἱ δύο περιοχαί, εἰς τὰς ὁποίας μία μὴ κυρτὴ στερεὰ γωνία διαιρεῖ τὸν χῶρον, εἶναι μὴ κυρταὶ περιοχαί.

481. Τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι. Εἶναι αἱ ἁπλούστεραι, ἀλλὰ καὶ αἱ βασικώτεραι ἐκ τῶν στερεῶν (πολυέδρων) γωνιῶν, διότι πᾶσα πολύεδρος γωνία δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς τριέδρους, μὲ διαγώνια ἐπίπεδα ἐκ μιᾶς ἀκμῆς της.

Ἔστω Κ.xyz μία τρίεδρος στερεὰ γωνία (σχ. 477). Ἂν τοποθετήσωμεν ἐπὶ τῶν ἀκμῶν της τρία σημεῖα Α,Β καὶ Γ, τότε τὰ ἓξ κύρια στοιχεῖα της τὰ συμβολίζομεν, ὡς ἑξῆς. Τὰς διέδρους γωνίας της μὲ $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{\Gamma}$ καὶ τὰς ἕδρας της μὲ $\widehat{\alpha}$, τὴν εὑρισκομένην ἀπέναντι τῆς διέδρου $\widehat{A}$, μὲ $\widehat{\beta}$ καὶ $\widehat{\gamma}$ ἀντιστοίχως τὰς ἄλλας.

Τὰ θεωρήματα, τὰ ὁποῖα ἀφοροῦν τὰς τριέδρους γωνίας, εἶναι ἀντίστοιχα ἐκείνων, τὰ ὁποῖα ἀφοροῦν τὰ τρίγωνα, ὡς θὰ φανῇ εἰς τὰ ἑπόμενα καὶ αὐτὸ διευκολύνει εἰς τὴν ἀπομνημόνευσιν.

482. Προσανατολισμὸς τριέδρου στερεᾶς γωνίας. Ἂς θεωρήσωμεν τρίεδρον στερεὰν γωνίαν μὲ κορυφὴν Κ (σχ. 478α). Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν της λαμβάνομεν τρία σημεῖα Α, Β, Γ καὶ θεωροῦμεν κινητὸν σημεῖον Μ, διαγράφον τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κατὰ μίαν ὡρισμένην φορὰν διαγραφῆς,



Σχ. 477 Σχ. 478

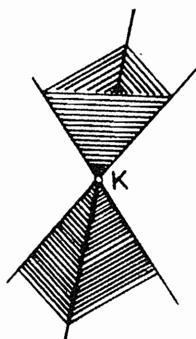
ἔστω τὴν ΑΒΓΑ. Τότε ἡ τρίεδρος στερεὰ γωνία Κ θεωρεῖται προσανατολισμένη, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι διαγράφεται ὑπὸ τῆς ἡμιευθείας ΚΜ κατὰ τὴν φορὰν ΑΒΓΑ. Εἶναι φανερὸν ὅτι δύο εἶναι αἱ δυναταὶ φοραὶ διαγραφῆς τῆς στερεᾶς γωνίας Κ, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ΑΒΓΑ ἢ ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ΑΓΒΑ. Μία ἐξ αὐτῶν, αὐθαιρέτως ἐκλεγεῖσα, καλεῖται θετικὴ καὶ ἡ ἄλλη (ἀντίθετος τῆς πρώτης) ἀρνητική. Αὐτό, ποὺ κυρίως μᾶς ἐνδιαφέρει, εἶναι δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι ἐὰν εἶναι ὁμοιοστρόφως ἢ ἑτεροστρόφως προσανατολισμέναι, δηλαδὴ τοῦ αὐτοῦ ἢ ἀντιθέτου προσανατολισμοῦ. Εἰς τὸ σχῆμα 478 αἱ δύο στερεαὶ γωνίαι Κ.ΑΒΓ καὶ Κ′.Α′Β′Γ′ εἶναι ἑτεροστρόφως προσανατολισμέναι.

483. Κατὰ κορυφὴν στερεαὶ γωνίαι καλοῦνται δύο στερεαὶ γωνίαι μὲ κοινὴν κορυφὴν Κ καὶ συμμετρικαὶ μεταξύ των ὡς πρὸς τὴν κοινὴν κορυφήν των (σχ. 479).

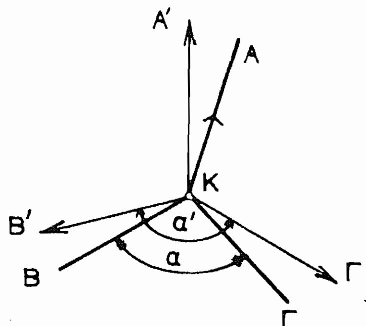
Δύο κατὰ κορυφὴν στερεαὶ γωνίαι ἔχουν τὰς ἕδρας των ἀντιστοίχως ἴσας καὶ τὰς διέδρους των ἐπίσης ἴσας, ἀλλὰ αἱ στερεαὶ γωνίαι δὲν εἶναι ἴσαι (ὑπὸ τὴν ἔννοιαν μὴ ἐφαρμόσιμοι), διότι εἶναι ἀντιθέτου προσανατολισμοῦ (§ 461)

484. Παραπληρωματικὴ τριέδρου στερεᾶς γωνίας. Ἔστω Κ.ΑΒΓ

μία τρίεδρος στερεὰ γωνία (σχ. 480). Φέρομεν ἡμιευθεῖαν ΚΑ′ κάθετον ἐπὶ τὴν ἕδραν ΒΚΓ καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς ἀκμῆς ΚΑ. Ὁμοίως φέρομεν ΚΒ′ ⊥ ΑΚΓ καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς ΚΒ, ὡς ἐπίσης καὶ ΚΓ′ ⊥ ΑΚΒ καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς ΚΓ. Αἱ τρεῖς ἡμιευθεῖαι ΚΑ′, ΚΒ′ καὶ ΚΓ′ ὁρίζουν τρίεδρον στερεὰν γωνίαν, ἡ ὁποία καλεῖται παραπληρωματικὴ τῆς τριέδρου Κ.ΑΒΓ.



Σχ. 479



Σχ. 480

Ἀπὸ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν τῆς παραπληρωματικῆς τριέδρου μιᾶς δοθείσης τριέδρου στερεᾶς γωνίας ἕπονται τὰ ἑξῆς :

i) Ἡ παραπληρωματικὴ Κ.Α′Β′Γ′ τῆς Κ.ΑΒΓ ὁρίζεται κατὰ ἕνα μόνον τρόπον καὶ ἑπομένως εἶναι μοναδική.

ii) Ἑκάστη ἕδρα τῆς Κ.Α′Β′Γ′ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἀντιστοίχου διέδρου τῆς Κ.ΑΒΓ, ἤτοι εἶναι $\widehat{\alpha'} + \widehat{A} = 2^{L}$, $\widehat{\beta'} + \widehat{B} = 2^{L}$, $\widehat{\gamma'} + \widehat{\Gamma} = 2^{L}$ (διατί ;) (§ 472).

iii) Ἡ τρίεδρος Κ.ΑΒΓ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς Κ.Α′Β′Γ′. Πράγματι, εἶναι ΚΒ′ ⊥ ΑΚΓ ⇒ ΚΒ′ ⊥ ΚΑ (1) καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς ΚΒ καὶ ΚΓ′ ⊥ ΑΚΒ ⇒ ΚΓ′ ⊥ ΚΑ (2) καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς ΚΓ. Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἕπεται ΚΑ ⊥ Β′ΚΓ′καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς ΚΑ′. Ὁμοίως εἶναι ΚΒ ⊥ Α′ΚΓ′ καὶ ΚΓ ⊥ Α′ΚΒ′ καὶ πρὸς τὸ μέρος τῶν ΚΒ′ καὶ ΚΓ′ ἀντιστοίχως. Ἄρα ἡ Κ.ΑΒΓ εἶναι ἡ παραπληρωματικὴ τῆς Κ.Α′Β′Γ′ (ἄρα ἡ ἔννοια τῆς παραπληρωματικῆς γωνίας εἶναι συμμετρικὴ καὶ διὰ τὰς τριέδρους).

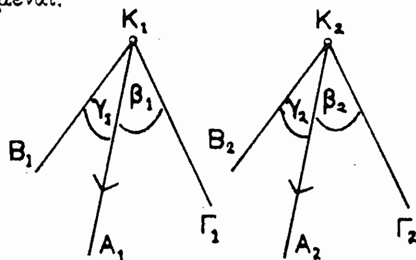
iv) Ἡ τρίεδρος Κ.ΑΒΓ, ὡς παραπληρωματικὴ τῆς Κ.Α′Β′Γ′, εἶναι τοιαύτη, ὥστε : $\widehat{\alpha} + \widehat{A'} = 2^{L}$, $\widehat{\beta} + \widehat{B'} = 2^{L}$, $\widehat{\gamma} + \widehat{\Gamma'} = 2^{L}$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΕΙΣ ΤΑΣ ΤΡΙΕΔΡΟΥΣ ΣΤΕΡΕΑΣ

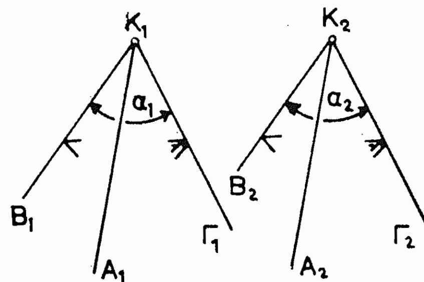
485. Θεώρημα. Ἐὰν δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι ἔχουν δύο ἕδρας ἀντιστοίχως ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων ἑδρῶν περιεχομένας διέδρους ἴσας, αἱ στεραὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι ἢ ἡ μία ἰσοῦται πρὸς τὴν κατὰ κορυ-

φὴν τῆς ἄλλης, ἀναλόγως τοῦ ἐὰν εἶναι ὁμοιοστρόφως ἢ ἑτεροστρόφως προσανατολισμέναι.

'Απόδειξις. Ἔστωσαν $K_1.A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $K_2.A_2B_2\Gamma_2$ δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι μὲ $\widehat{\beta_1}=\widehat{\beta_2}$, $\widehat{\gamma_1}=\widehat{\gamma_2}$, $\widehat{A_1}=\widehat{A_2}$ καὶ ἐπὶ πλέον τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ (σχ. 481). Αἱ δύο τρίεδροι προφανῶς δύνανται νὰ ταυτισθοῦν μὲ μετατόπισιν τοιαύτην, ὥστε νὰ συμπέσουν αἱ δύο ἴσαι δίεδροι $\widehat{A_1}$ καὶ $\widehat{A_2}$. Διότι αὐτὸ θὰ ἔχῃ ὡς συνέπειαν νὰ συμπέσουν καὶ αἱ ἑκατέρωθεν αὐτῶν ἴσαι ἕδραι $\widehat{\beta_1}$, $\widehat{\beta_2}$ καὶ $\widehat{\gamma_1}$, $\widehat{\gamma_2}$. Ἄρα αἱ τρίεδροι εἶναι ἴσαι. 'Εὰν αἱ στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἀντιθέτου προσανατολισμοῦ, τότε ἡ μία ἰσοῦται πρὸς τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ἄλλης, διότι δύο κατὰ κορυφὴν στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμέναι.



Σχ. 481



Σχ. 482

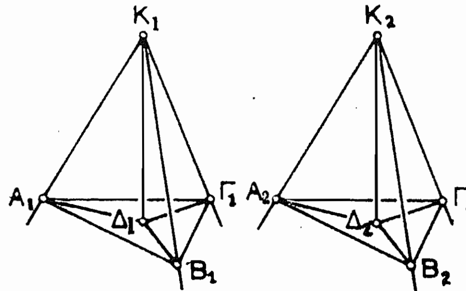
486. Θεώρημα. 'Εὰν δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι ἔχουν μίαν ἕδραν ἀντιστοίχως ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς τὴν ἴσην ἕδραν διέδρους γωνίας ἀντιστοίχως ἴσας, αἱ στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι ἢ ἡ μία ἰσοῦται πρὸς τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ἄλλης, ἀναλόγως τοῦ ἐὰν εἶναι ὁμοιοστρόφως ἢ ἑτεροστρόφως προσανατολισμέναι.

'Απόδειξις. Ἔστωσαν $K_1.A_1B_1\Gamma_1$, καὶ $K_2.A_2B_2\Gamma_2$ αἱ δύο τρίεδροι μὲ $\widehat{\alpha_1}=\widehat{\alpha_2}$, $\widehat{B_1}=\widehat{B_2}$, $\widehat{\Gamma_1}=\widehat{\Gamma_2}$ καὶ ἐπὶ πλέον τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ (σχ. 482). Αἱ δύο τρίεδροι προφανῶς δύνανται νὰ ταυτισθοῦν μὲ μετατόπισιν τοιαύτην, ὥστε νὰ συμπέσουν αἱ ἴσαι ἕδραι $\widehat{\alpha_1}$, καὶ $\widehat{\alpha_2}$. Διότι αὐτὸ θὰ ἔχῃ ὡς συνέπειαν νὰ συμπέσουν καὶ αἱ ἑκατέρωθεν αὐτῶν ἴσαι δίεδροι $\widehat{B_1}$, $\widehat{B_2}$ καὶ $\widehat{\Gamma_1}$, $\widehat{\Gamma_2}$. Ἄρα αἱ τρίεδροι εἶναι ἴσαι. 'Εὰν αἱ δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι ἦσαν ἀντιθέτου προσανατολισμοῦ, τότε ἡ μία θὰ ἦτο ἴση μὲ τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ἄλλης.

487. Θεώρημα. 'Εὰν δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι ἔχουν τὰς τρεῖς ἕδρας των ἀντιστοίχως ἴσας, αἱ τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι ἢ ἡ μία ἰσοῦται πρὸς τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ἄλλης, ἀναλόγως τοῦ ἐὰν εἶναι ὁμοιοστρόφως ἢ ἑτεροστρόφως προσανατολισμέναι.

'Απόδειξις. Ἔστωσαν $K_1.A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $K_2.A_2B_2\Gamma_2$ αἱ τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι μὲ $\widehat{\alpha_1}=\widehat{\alpha_2}$, $\widehat{\beta_1}=\widehat{\beta_2}$ καὶ $\widehat{\gamma_1}=\widehat{\gamma_2}$ (σχ. 483). Δὲν βλάπτεται ἡ γενικό-

της, ἐὰν ἐπὶ πλέον ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι $K_1A_1 = K_1B_1 = K_1\Gamma_1 = K_2A_2 = K_2B_2 = K_2\Gamma_2$. Τότε εἶναι προφανῶς $A_1\overset{\Delta}{K_1}B_1 = A_2\overset{\Delta}{K_2}B_2$, $B_1\overset{\Delta}{K_1}\Gamma_1 = B_2\overset{\Delta}{K_2}\Gamma_2$, $\Gamma_1\overset{\Delta}{K_1}A_1 = \Gamma_2\overset{\Delta}{K_2}A_2$ ὡς ἔχοντα δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν περιεχομένην ὑπ' αὐτῶν γωνίαν ἴσην. Ἄρα $A_1B_1 = A_2B_2$, $B_1\Gamma_1 = B_2\Gamma_2$, $\Gamma_1A_1 = \Gamma_2A_2 \Rightarrow A_1\overset{\Delta}{B_1}\Gamma_1 = A_2\overset{\Delta}{B_2}\Gamma_2$. Φέρομεν $K_1\Delta_1 \perp (A_1B_1\Gamma_1) \Rightarrow$ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $K_1A_1\Delta_1$, $K_1B_1\Delta_1$, $K_1\Gamma_1\Delta_1$ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα ἴσας ὑποτεινούσας καὶ τὴν $K_1\Delta_1$ κοινὴν $\Rightarrow \Delta_1A_1 = \Delta_1B_1 = \Delta_1\Gamma_1$, ἤτοι τὸ Δ_1 εἶναι περίκεντρον τοῦ τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$. Ὁμοίως φέρομεν τὴν $K_2\Delta_2 \perp (A_2B_2\Gamma_2)$ καὶ τὸ Δ_2 θὰ εἶναι τὸ περίκεντρον τοῦ τριγώνου $A_2B_2\Gamma_2$. Ἐξ αὐτοῦ ἔπεται ὅτι μετατοπίζοντες τὴν $K_1.A_1B_1\Gamma_1$ εἰς τρόπον, ὥστε τὸ τρίγωνον $A_1B_1\Gamma_1$ νὰ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ ἴσου του $A_2B_2\Gamma_2$ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σημεῖον Δ_1 θὰ συμπέσῃ μετὰ τοῦ Δ_2. Ἐπὶ πλέον ἀπὸ τὴν παρατήρησιν ὅτι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $K_1A_1\Delta_1$ καὶ $K_2A_2\Delta_2$ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα $K_1A_1 = K_2A_2$ καὶ $\Delta_1A_1 = \Delta_2A_2$, ἔπεται ὅτι $\Delta_1K_1 = \Delta_2K_2$. Ἄρα εἰς τὴν μετατόπισιν ἡ κορυφὴ K_1 θὰ συμπέσῃ μετὰ τῆς K_2. Ἑπομένως, αἱ τρίεδροι εἶναι ἴσαι, ἐφ' ὅσον δύνανται νὰ ταυτισθοῦν. Ἐὰν αἱ δύο τρίεδροι εἶναι ἀντιθέτου προσανατολισμοῦ, τότε ἡ μία ἰσοῦται πρὸς τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ἄλλης.



Σχ. 483

488. Θεώρημα. Ἐὰν δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι ἔχουν τὰς τρεῖς διέδρους των ἀντιστοίχως ἴσας, εἶναι ἴσαι ἢ ἡ μία ἰσοῦται πρὸς τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ἄλλης, ἀναλόγως τοῦ ἐὰν εἶναι ὁμοιοστρόφως ἢ ἑτεροστρόφως προσανατολισμέναι.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν $K_1.A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $K_2.A_2B_2\Gamma_2$ αἱ δύο τρίεδροι στεραιαὶ γωνίαι μὲ $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$, $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$, $\widehat{\Gamma_1} = \widehat{\Gamma_2}$ (σχ. 483). Φανταζόμεθα τὰς παραπληρωματικὰς αὐτῶν τριέδρους (§ 484), αἱ ὁποῖαι κατ' ἀνάγκην θὰ ἔχουν τὰς ἕδρας των ἴσας, ἐφ' ὅσον αἱ ἀρχικαὶ ἔχουν τὰς διέδρους των ἴσας καὶ ἑπομένως, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, θὰ εἶναι ἴσαι. Τότε ὅμως καὶ αἱ τρίεδροι $K_1.A_1B_1\Gamma_1$, $K_2.A_2B_2\Gamma_2$ θὰ εἶναι ἴσαι ὡς παραπληρωματικαὶ ἴσων τριέδρων. Ἐὰν αἱ δύο τρίεδροι εἶναι ἀντιθέτου προσανατολισμοῦ, τότε ἡ μία ἰσοῦται πρὸς τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ἄλλης.

ΑΝΙΣΟΤΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΙΣ ΣΤΕΡΕΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

489. Θεώρημα. Εἰς πᾶσαν τρίεδρον στερεὰν γωνίαν ἑκάστη ἕδρα εἶναι : i) Μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

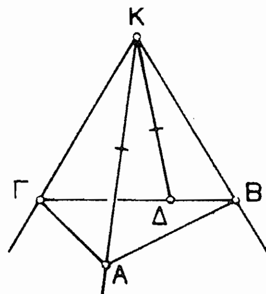
ii) Μεγαλυτέρα τῆς ἀπολύτου διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων.

'Απόδειξις. i) Τὸ θεώρημα ἔχει προφανῶς ἀνάγκην ἀποδείξεως μόνον διὰ τὴν μεγαλυτέραν ἕδραν (σχ. 484). Ἂς θεωρήσωμεν ὅτι εἶναι: $\widehat{\alpha} \geqq \widehat{\beta}$ καὶ $\widehat{\alpha} \geqq \widehat{\gamma}$. 'Εντὸς τῆς ἕδρας $\widehat{\alpha}$ λαμβάνομεν ἡμιευθεῖαν ΚΔ, τοιαύτην ὥστε νὰ εἶναι: $\widehat{\Gamma K \Delta} = \widehat{\Gamma K A} = \widehat{\beta} \Rightarrow \widehat{BK\Delta} = \widehat{\alpha} - \widehat{\beta}$ (1). Δὲν βλάπτεται ἡ γενικότης, ἐὰν θεωρήσωμεν ὅτι εἶναι ΚΑ = ΚΔ καὶ ὅτι τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ εἶναι συνεπίπεδα. Τότε εἶναι τριγ. ΓΚΑ = τριγ.ΓΚΔ, ὡς ἔχοντα τὴν ΓΚ κοινήν, ΚΑ = ΚΔ καὶ $\widehat{\Gamma K A} = \widehat{\Gamma K \Delta}$. Ἄρα ΓΑ = ΓΔ ⇒ ΔΒ = ΓΒ — ΓΑ (2). 'Εκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν : ΑΒ > ΓΒ — ΓΑ (3). Ἡ σχέσις (3), λόγῳ τῆς (2) γράφεται ΑΒ > ΒΔ ⇒ $\widehat{BKA} > \widehat{BK\Delta}$, διότι τὰ τρίγωνα ΒΚΑ καὶ ΒΚΔ ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὰς τρίτας πλευρὰς των ἀνίσους. Ἄρα $\widehat{\gamma} > \widehat{BK\Delta}$ καὶ λόγῳ τῆς σχέσεως (1) ⇒ $\widehat{\gamma} > \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} \Rightarrow \widehat{\alpha} < \widehat{\beta} + \widehat{\gamma}$. 'Επίσης εἶναι $\widehat{\beta} < \widehat{\alpha} + \widehat{\gamma}$ καὶ $\widehat{\gamma} < \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}$.

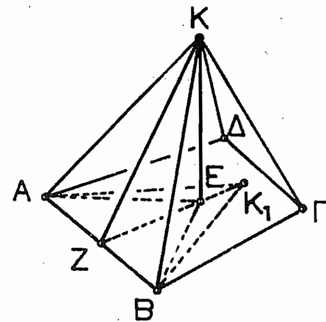
ii) 'Απεδείχθη ὅτι εἶναι $\widehat{\beta} < \widehat{\alpha} + \widehat{\gamma} \Rightarrow \widehat{\alpha} > \widehat{\beta} - \widehat{\gamma}$ (4) καὶ $\widehat{\gamma} < \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} \Rightarrow \widehat{\alpha} > \widehat{\gamma} - \widehat{\beta}$ (5). 'Εκ τῶν σχέσεων (4) καὶ (5) ἕπεται ὅτι $\widehat{\alpha} > |\widehat{\beta} - \widehat{\gamma}|$. Ὁμοίως εἶναι $\widehat{\beta} > |\widehat{\alpha} - \widehat{\gamma}|$ καὶ $\widehat{\gamma} > |\widehat{\alpha} - \widehat{\beta}|$.

Αἱ ἀνωτέρω ἓξ ἀνισοτικαὶ σχέσεις δύνανται νὰ συγχωνευθοῦν εἰς τὴν διπλῆν ἀνισοτικὴν σχέσιν : $|\widehat{\beta} - \widehat{\gamma}| < \widehat{\alpha} < \widehat{\beta} + \widehat{\gamma}$.

490. Θεώρημα. Πάσης πολυέδρου κυρτῆς στερεᾶς γωνίας, τὸ ἄθροισμα τῶν ἑδρῶν της εἶναι μικρότερον τῶν 4L.



Σχ. 484



Σχ. 485

Ἔστω ἡ κυρτὴ στερεὰ γωνία Κ.ΑΒΓΔ. Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι εἶναι :

$$\widehat{AKB} + \widehat{BK\Gamma} + \widehat{\Gamma K\Delta} + \widehat{\Delta KA} < 4L$$

'Απόδειξις. 'Εντὸς τῆς στερεᾶς γωνίας λαμβάνομεν ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα ΚΕ καὶ ἐκ τοῦ Ε φέρομεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΚΕ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς ἀκμὰς εἰς τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ (σχ. 485) καὶ οὕτω σχηματίζεται τὸ κυρτὸν πολύγωνον ΑΒΓΔ. (Τὴν θέσιν τῆς ΚΕ τὴν ἐκλέγομεν, ὥστε τὸ

ἐκ τοῦ Ε ἀγόμενον κάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ τὴν ΚΕ νὰ τέμνῃ ὅλας τὰς ἀκμὰς τῆς στερεᾶς γωνίας). Φέρομεν $EZ \perp AB$ καὶ ἄρα $KZ \perp AB$. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΕΚΖ ἔχομεν $ZE < ZK$. Ἂν περιστρέψωμεν τὸ τρίγωνον ΚΑΒ περὶ τὴν ΑΒ οὕτως, ὥστε τὸ ἐπίπεδόν του νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓΔ, τότε ἡ ΖΚ, μένουσα κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΖΕ καί, ἐπειδὴ εἶναι $ZE < ZK$, ἄρα τὸ Κ θὰ πέσῃ εἰς τὴν προέκτασιν τῆς ΖΕ, ἔστω εἰς τὸ σημεῖον K_1. Φέρομεν καὶ τὰς ΕΑ καὶ ΕΒ. Ἔχομεν (§ 116).

$$A\widehat{K_1}Z < A\widehat{E}Z, \quad Z\widehat{K_1}B < Z\widehat{E}B.$$

Καὶ διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

(1) $\quad A\widehat{K_1}B < A\widehat{E}B$, ἤτοι $A\widehat{K}B < A\widehat{E}B$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι εἶναι :

(2) $\quad B\widehat{K}\Gamma < B\widehat{E}\Gamma, \quad \Gamma\widehat{K}\Delta < \Gamma\widehat{E}\Delta, \quad \Delta\widehat{K}A < \Delta\widehat{E}A.$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ὁμοιομόρφους ἀνισότητας (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν :

(3) $\quad A\widehat{K}B + B\widehat{K}\Gamma + \Gamma\widehat{K}\Delta + \Delta\widehat{K}A < A\widehat{E}B + B\widehat{E}\Gamma + \Gamma\widehat{E}\Delta + \Delta\widehat{E}A$

καί, ἐπειδὴ αἱ περὶ τὸ Ε γωνίαι ἔχουν ἄθροισμα ἴσον πρὸς 4 ὀρθὰς γωνίας, ἡ (3) γίνεται :

$$A\widehat{K}B + B\widehat{K}\Gamma + \Gamma\widehat{K}\Delta + \Delta\widehat{K}A < 4^{L}$$

★ **491.** Εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν τὸ θεώρημα δύναται νὰ ἀποδειχθῇ, ὡς ἀκολούθως :

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἡ κυρτὴ στερεὰ γωνία $KA_1A_2 \ldots A_\nu$ (σχ. 486), ὅπου τὰ σημεῖα $A_1, A_2, \ldots A_\nu$ εὑρίσκονται ἐπὶ ἐπιπέδου τομῆς. Θὰ συμβολίσωμεν μὲ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ τὰς ἕδρας τῆς στερεᾶς γωνίας καὶ μὲ $\widehat{A_1}, \widehat{A_2}, \ldots \widehat{A_\nu}$ τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου $A_1A_2A_3 \ldots A_\nu$ ἀντιστοίχως. Τότε, ἀπὸ τὰ τρίγωνα KA_1A_2, KA_2A_3, …, $KA_\nu A_1$, ἔχομεν :

$\widehat{\alpha_1} = 2^{L} - (K\widehat{A_1}A_2 + K\widehat{A_2}A_1)$, $\widehat{\alpha_2} = 2^{L} - (K\widehat{A_2}A_3 + K\widehat{A_3}A_2)$, …, $\widehat{\alpha_\nu} = 2^{L} - (K\widehat{A_\nu}A_1 + K\widehat{A_1}A_\nu)$. Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς ἀνωτέρω ν ἰσότητας καὶ λαμβάνομεν :

$\widehat{\alpha_1} + \widehat{\alpha_2} + \ldots + \widehat{\alpha_\nu} = 2\nu^{L} - (K\widehat{A_1}A_2 + K\widehat{A_2}A_1 + K\widehat{A_2}A_3 + K\widehat{A_3}A_2 + \ldots + K\widehat{A_\nu}A_1 + K\widehat{A_1}A_\nu)$ (1).

Τὰ σημεῖα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ εἶναι κορυφαὶ τριέδρων στερεῶν γωνιῶν καὶ ἐπομένως (§ 489) θὰ εἶναι :

$$\widehat{A_1} < K\widehat{A_1}A_\nu + K\widehat{A_1}A_2, \quad \widehat{A_2} < K\widehat{A_2}A_1 + K\widehat{A_2}A_3, \quad \ldots, \quad \widehat{A_\nu} < K\widehat{A_\nu}A_{\nu-1} + K\widehat{A_\nu}A_1.$$

Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς ἀνωτέρω ν ἀνισότητας καὶ λαμβάνομεν :

$\widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \ldots + \widehat{A_\nu} < K\widehat{A_1}A_2 + K\widehat{A_2}A_1 + K\widehat{A_2}A_3 + K\widehat{A_3}A_2 + \ldots + K\widehat{A_\nu}A_1 + K\widehat{A_1}A_\nu$.

Γνωρίζομεν ὅτι $A_1 + A_2 + \ldots + A_\nu = (2\nu - 4)^{L}$ καὶ ἐπομένως ἡ τελευταία ἀνισότης γράφεται :

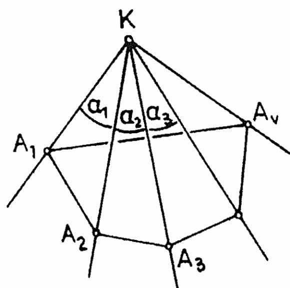
$$(2\nu - 4)^{L} < K\widehat{A_1}A_2 + K\widehat{A_2}A_1 + K\widehat{A_2}A_3 + K\widehat{A_3}A_2 + \ldots + K\widehat{A_\nu}A_1 + K\widehat{A_1}A_\nu \qquad (2)$$

Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) καὶ λαμβάνομεν :

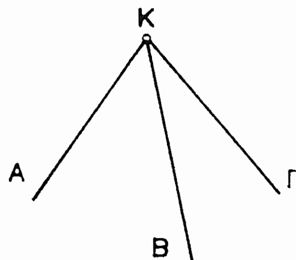
$$\widehat{\alpha_1} + \widehat{\alpha_2} + \ldots + \widehat{\alpha_\nu} + (2\nu - 4)^{L} < 2\nu^{L} \Rightarrow \widehat{\alpha_1} + \widehat{\alpha_2} + \widehat{\alpha_3} + \ldots + \widehat{\alpha_\nu} < 4^{L}.$$

492. Θεώρημα. Εἰς πᾶσαν τρίεδρον στερεὰν γωνίαν τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων γωνιῶν της εὑρίσκεται μεταξὺ 2 καὶ 6 ὀρθῶν γωνιῶν, ἑκάστη δὲ αὐξανομένη κατὰ 2^L ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων διέδρων.

'Απόδειξις. Ἔστω Κ.ΑΒΓ μία τρίεδρος στερεὰ γωνία (σχ. 487). Ἂς



Σχ. 486



Σχ. 487

φαντασθῶμεν τὴν παραπληρωματικήν της Κ.Α'Β'Γ' (§ 484), τῆς ὁποίας αἱ ἕδραι εἶναι $\widehat{\alpha'}, \widehat{\beta'}, \widehat{\gamma'}$. Γνωρίζομεν ὅτι $\widehat{A} + \widehat{\alpha'} = 2^L$, $\widehat{B} + \widehat{\beta'} = 2^L$, $\widehat{\Gamma} + \widehat{\gamma'} = 2^L \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{\alpha'} + \widehat{B} + \widehat{\beta'} + \widehat{\Gamma} + \widehat{\gamma'} = 6^L$ (1) $\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} < 6^L$ (2). 'Απὸ τὸ προηγούμενον θεώρημα γνωρίζομεν ὅτι εἶναι $\widehat{\alpha'} + \widehat{\beta'} + \widehat{\gamma'} < 4^L \Rightarrow 4^L > \widehat{\alpha'} + \widehat{\beta'} + \widehat{\gamma'}$ (3). Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς σχέσεις (1) καὶ (3) καὶ λαμβάνομεν : $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} + \widehat{\alpha'} + \widehat{\beta'} + \widehat{\gamma'} + 4^L > 6^L + \widehat{\alpha'} + \widehat{\beta'} + \widehat{\gamma'} \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} > 2^L$. Αἱ ἀνισότητες (2) καὶ (4) συγχωνεύονται εἰς τὴν διπλῆν ἀνισότητα $2^L < \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} < 6^L$.

'Επίσης εἶναι (§ 489) $\widehat{\beta'} + \widehat{\gamma'} > \widehat{\alpha'} \Rightarrow 2^L - \widehat{B} + 2^L - \widehat{\Gamma} > 2^L - \widehat{A} \Rightarrow \widehat{A} + 2^L > \widehat{B} + \widehat{\Gamma}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν $\widehat{B} + 2^L > \widehat{A} + \widehat{\Gamma}$ καὶ $\widehat{\Gamma} + 2^L > \widehat{A} + \widehat{B}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

818. Εἰς κάθε τρίεδρον στερεὰν γωνίαν δείξατε ὅτι μία τοὐλάχιστον ἕδρα εἶναι μικροτέρα τῶν 120^0.

819. Εἰς κάθε τρίεδρον στερεὰν γωνίαν δείξατε ὅτι μία τοὐλάχιστον δίεδρος εἶναι μεγαλυτέρα τῶν 60^0.

820. 'Επὶ τῶν ἀκμῶν τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας (μὲ τὰς ἕδρας της ὀρθὰς) λαμβάνομεν τμήματα ΚΑ = ΚΒ = ΚΓ = α. Δείξατε ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς α.

821. Τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας αἱ ἀκμαὶ τέμνονται δι' ἐπιπέδου εἰς τὰ σημεῖα Α,Β,Γ. 'Εὰν εἶναι ΚΑ = 3α, ΚΒ = 4α, ΚΓ = 5α, ὅπου Κ εἶναι ἡ κορυφὴ τῆς στερεᾶς γωνίας, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

822. Τέμνομεν τὰς ἀκμὰς τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας Κ δι' ἐπιπέδου εἰς τὰ

σημεῖα Α,Β,Γ. Δείξατε ὅτι ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς Κ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ συμπίπτει μὲ τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

823. Εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, ἐὰν Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, δείξατε ὅτι :

α) $(\text{ΚΑΒ})^2 = (\text{ΓΑΒ})(\text{ΗΑΒ})$, β) $(\text{ΚΑΒ})^2 + (\text{ΚΒΓ})^2 + (\text{ΚΓΑ})^2 = (\text{ΑΒΓ})^2$.

824. Τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία τέμνεται δι' ἐπιπέδου εἰς τὰ σημεῖα Α,Β,Γ. Ἐὰν α,β,γ εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ὑπολογισθοῦν ἐξ αὐτῶν τὰ τμήματα ΚΑ,ΚΒ,ΚΓ, ὅπου Κ εἶναι ἡ κορυφὴ τῆς τρισορθογωνίου.

825. Ἐὰν αἱ ἕδραι μιᾶς στερεᾶς γωνίας εἶναι 60^0 ἑκάστη, πόσας τὸ πολὺ ἕδρας δύναται νὰ ἔχῃ ἡ στερεὰ γωνία ;

826. Τὸ αὐτὸ νὰ ἐξετασθῇ, ἐὰν αἱ ἕδραι της εἶναι 90^0 ἑκάστη.

827. Μιᾶς τριέδρου στερεᾶς γωνίας αἱ δύο ἕδραι εἶναι 70^0 καὶ 90^0. Ποῖαι εἶναι αἱ δυναταὶ τιμαὶ διὰ τὴν τρίτην ἕδραν αὐτῆς ;

Β΄.

828. Εἰς πᾶσαν τρίεδρον στερεὰν γωνίαν δείξατε ὅτι τὰ τρία διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τῶν διέδρων της διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

829. Δείξατε ὅτι τὰ τρία ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀνὰ ἓν ἀπὸ τὰς ἀκμὰς μιᾶς τριέδρου στερεᾶς γωνίας καὶ ἀπὸ τὰς διχοτόμους τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν, τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

830. Δείξατε ὅτι, ἐὰν δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι ἔχουν τὰς διέδρους γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν, τότε αἱ παραπληρωματικαὶ αὐτῶν θὰ ἔχουν τὰς ἕδρας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ ἀντιστρόφως.

831. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Κ δοθείσης τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας φέρομεν τυχοῦσαν ἡμιευθεῖαν Κx εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς στερεᾶς γωνίας. Δείξατε ὅτι αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ Κx μὲ τὰς τρεῖς ἀκμὰς καὶ μὲ τὰς τρεῖς ἕδρας τῆς στερεᾶς γωνίας, ἔχουν ἄθροισμα σταθερόν.

832. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς στρεβλοῦ τετραπλεύρου εἶναι μικρότερον τῶν 4 ὀρθῶν γωνιῶν.

833. Ἐὰν δύο ἕδραι μιᾶς τριέδρου στερεᾶς γωνίας εἶναι ἴσαι, δείξατε ὅτι καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν δίεδροι εἶναι ἴσαι καὶ ἀντιστρόφως.

834. Ἐὰν μία τρίεδρος στερεὰ γωνία ἔχῃ τὰς τρεῖς ἕδρας της ἴσας, δείξατε ὅτι θὰ ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς διέδρους της ἴσας καὶ ἀντιστρόφως.

835. Ἐὰν μία τρίεδρος στερεὰ γωνία ἔχῃ δύο ἴσας διέδρους, δείξατε ὅτι τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον τῆς τρίτης διέδρου εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἀπέναντι ἕδραν.

836. Δίδεται κυρτὴ τετράεδρος στερεὰ γωνία καὶ σημεῖον Σ. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου Σ ἐπίπεδον (Π), τὸ ὁποῖον νὰ τέμνῃ τὴν δοθεῖσαν στερεὰν γωνίαν κατὰ παραλληλόγραμμον.

837. Δείξατε ὅτι εἰς πᾶσαν τρίεδρον στερεὰν γωνίαν ἀπέναντι μεγαλυτέρας διέδρου κεῖται μεγαλυτέρα ἕδρα καὶ ἀντιστρόφως.

838. Δίδεται τρίεδρος στερεὰ γωνία Κ.ΑΒΓ. Φέρομεν ἡμιευθεῖαν ΚΧ ἐντὸς τῆς στερεᾶς γωνίας. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι $\widehat{\text{ΧΚΑ}} + \widehat{\text{ΧΚΒ}} < \widehat{\text{ΓΚΑ}} + \widehat{\text{ΓΚΒ}}$.

839. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων γωνιῶν μιᾶς κυρτῆς στερεᾶς γωνίας μὲ ν ἀκμὰς περιέχεται μεταξὺ 2ν - 4 καὶ 6ν - 12 ὀρθῶν γωνιῶν.

840. Δίδεται τετράεδρος στερεὰ γωνία κορυφῆς Κ καὶ δύο σταθερὰ σημεῖα Α καὶ Β ἐπὶ δύο διαδοχικῶν ἀκμῶν της. Μεταβλητὸν ἐπίπεδον διέρχεται πάντοτε διὰ τῶν Α καὶ Β καὶ τέμνει τὰς ἄλλας δύο ἀκμάς της εἰς τὰ Μ καὶ Ν. i) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΜΝ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου. ii) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῆς τομῆς τῶν ΑΜ καὶ ΒΝ. iii) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῆς τομῆς τῶν ΑΝ καὶ ΒΜ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΚΤΟΝ

ΠΟΛΥΕΔΡΑ

493. Ὁρισμός. Πολύεδρον καλεῖται τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον περατοῦται πανταχόθεν εἰς ἐπίπεδα τμήματα.

Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα τμήματα εἶναι κατ' ἀνάγκην πολύγωνα καὶ καλοῦνται **ἕδραι** τοῦ πολυέδρου (σχ. 488). Αἱ πλευραὶ τῶν πολυγώνων ἑδρῶν καλοῦνται **ἀκμαὶ** τοῦ πολυέδρου καὶ εἶναι αἱ τομαὶ δύο προσκειμένων ἑδρῶν. Αἱ κορυφαὶ τῶν πολυγώνων ἑδρῶν καλοῦνται **κορυφαὶ** τοῦ πολυέδρου. Αὗται ἀνήκουν εἰς τρεῖς τοὐλάχιστον ἕδρας καὶ εἶναι σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα συμβάλλουν τρεῖς τοὐλάχιστον ἀκμαί. Ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα μὲ ἄκρα δύο κορυφάς, αἱ ὁποῖαι δὲν ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν ἕδραν, καλεῖται **διαγώνιος** τοῦ πολυέδρου. Διαγώνιοι δὲν ὑπάρχουν εἰς ὅλα τὰ πολύεδρα.

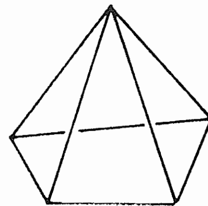
Ἓν πολύεδρον καλεῖται **κυρτόν,** ἐὰν τὸ ἐπίπεδον τῆς οἱασδήποτε ἕδρας του ἀφήνει πρὸς τὴν αὐτὴν περιοχὴν τοῦ χώρου ὁλόκληρον τὸ πολύεδρον.

Παντὸς κυρτοῦ πολυέδρου αἱ ἕδραι εἶναι κυρτὰ πολύγωνα καὶ ἀντιστρόφως.

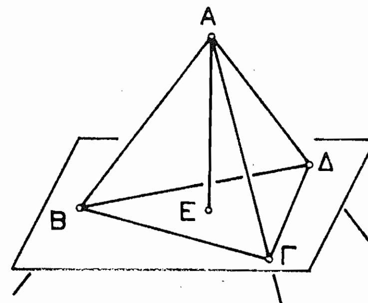
Ἡ τομὴ κυρτοῦ πολυέδρου μὲ ἐπίπεδον εἶναι κυρτὸν πολύγωνον, ἐνῷ μία εὐθεῖα, μὴ ἀνήκουσα εἰς ἕδραν, ἔχει τὸ πολὺ δύο κοινὰ σημεῖα μὲ τὴν πολυεδρικὴν ἐπιφάνειαν.

ΤΟ ΤΕΤΡΑΕΔΡΟΝ

494. Τὰ στοιχεῖα τοῦ τετραέδρου. Τὸ τετράεδρον εἶναι τὸ ἁπλούστερον ἐκ τῶν πολυέδρων. Ἔχει τέσσαρας τριγωνικὰς ἕδρας, τέσσαρας κορυφὰς καὶ ἓξ ἀκμάς. Τετράεδρον δυνάμεθα νὰ λάβωμεν, ἐὰν τμήσωμεν τὰς ἀκμὰς τριέδρου στερεᾶς γωνίας δι' ἐπιπέδου (σχ. 489).



Σχ. 488



Σχ. 489

Κάθε τετράεδρον εἶναι κυρτὸν πολύεδρον, ἔχει ἓξ διέδρους γωνίας, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς ἓξ ἀκμάς του καὶ τέσσαρας τριέδρους στερεάς, γωνίας αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς τέσσαρας κορυφάς του.

Ὕψος τετραέδρου καλεῖται τὸ κάθετον τμῆμα, τὸ ὁποῖον ἄγεται ἐξ ἑκάστης κορυφῆς πρὸς τὴν ἀπέναντι ἕδραν (σχ. 489). Τὸ τετράεδρον ἐπομένως ἔχει τέσσαρα ὕψη. Τὰ ὕψη ἑνὸς τετραέδρου ἐν γένει δὲν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Διάμεσος τετραέδρου καλεῖται τὸ τμῆμα μὲ ἄκρα μίαν κορυφήν, καὶ τὸ κέντρον βάρους τῆς ἀπέναντι ἕδρας. Τὸ τετράεδρον ἐπομένως ἔχει τέσσαρας διαμέσους.

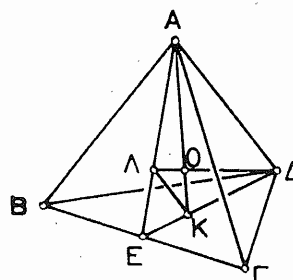
495. Εἴδη τετραέδρων. Εἰς τὸ σύνολον τῶν τυχόντων τετραέδρων ἀξιοσημείωτα εἶναι τὰ κανονικὰ καὶ τὰ ὀρθοκεντρικὰ τετράεδρα.

Κανονικὸν τετράεδρον καλεῖται ἓν τετράεδρον, τὸ ὁποῖον ἔχει καὶ τὰς ἓξ ἀκμάς του ἴσας. Αἱ ἕδραι ἑνὸς κανονικοῦ τετραέδρου εἶναι ἴσα ἰσόπλευρα τρίγωνα.

Ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον καλεῖται ἓν τετράεδρον, τοῦ ὁποίου τὰ τέσσαρα ὕψη διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ὑψῶν του καλεῖται **ὀρθόκεντρον** τοῦ τετραέδρου. Εἰς τὰ ὀρθοκεντρικὰ μόνον τετράεδρα καὶ τὰ τρία ζεύγη τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν του εἶναι ὀρθογώνια (βλ. ἄσκ. 846).

496. Θεώρημα. Εἰς κάθε τετράεδρον αἱ τέσσαρες διάμεσοι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον καλεῖται κέντρον βάρους τοῦ τετραέδρου καὶ ἀπέχει ἐξ ἑκάστης κορυφῆς ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου τοῦ τετραέδρου.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τὸ τετράεδρον ΑΒΓΔ καὶ Κ,Λ τὰ κέντρα βάρους τῶν ἑδρῶν του ΒΓΔ, ΑΒΓ ἀντιστοίχως (σχ. 490). Τὸ σημεῖον Κ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς διαμέσου ΔΕ τῆς ἕδρας ΒΓΔ καὶ τὸ σημεῖον Λ ἐπὶ τῆς διαμέσου ΑΕ τῆς ἕδρας ΑΒΓ. Ἐπομένως αἱ διάμεσοι ΑΚ καὶ ΔΛ τοῦ τρεταέδρου τέμνονται εἰς σημεῖον Ο, διότι εἶναι ἐσωτερικὰ τμήματα τοῦ τριγώνου ΑΔΕ.



Σχ. 490

Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Κ καὶ Λ εἶναι κέντρα βάρους ἑδρῶν, ἕπεται ὅτι

$$\frac{ΕΔ}{ΕΚ} = \frac{ΕΑ}{ΕΛ} = \frac{3}{1} \Rightarrow ΔΑ//ΚΛ \Rightarrow \text{τριγ. } ΕΔΑ \approx \text{τριγ. } ΕΚΛ \Rightarrow \frac{ΔΑ}{ΚΛ} = \frac{3}{1}.$$

Ἐπίσης, ἀπὸ τὴν παραλληλίαν τῶν τμημάτων ΔΛ καὶ ΚΛ, ἕπεται ὅτι $\overset{\Delta}{ΟΑΔ} \approx$

$$\overset{\Delta}{\mathrm{OK\Lambda}} \Rightarrow \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OK}} = \frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{K\Lambda}} = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{\mathrm{OA}}{\Theta\mathrm{K}} = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{AO}+\mathrm{OK}} = \frac{3}{3+1}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{AK}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \mathrm{AO} = \frac{3}{4}\,\mathrm{AK}.$$

'Ομοίως ἀποδεικνύεται ἡ αὐτὴ σχέσις καὶ διὰ τὰς ἄλλας διαμέσους τοῦ τετραέδρου, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο.

'Η ὀνομασία **κέντρον βάρους τοῦ τετραέδρου** διὰ τὸ σημεῖον Ο ἔχει ληφθῇ ἐκ τῆς φυσικῆς, διότι συμπίπτει μὲ τὸ κέντρον βάρους τετραέδρου ἐξ ὁμογενοῦς ὑλικοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Β΄.

841. Εἰς κάθε τετράεδρον : α) Δείξατε ὅτι τὰ τμήματα μὲ ἄκρα τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. β) 'Εὰν αἱ ἀπέναντι ἀκμαὶ εἶναι ἀνὰ δύο ἴσαι, τὰ τμήματα ταῦτα εἶναι κάθετα ἐπὶ τὰς ἀπέναντι ἀκμὰς καὶ ἐπὶ πλέον εἶναι ἀκμαὶ τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας.

842. Εἰς κανονικὸν τετράεδρον δείξατε ὅτι τὰ μεσοκάθετα ἐπίπεδα τῶν ἓξ ἀκμῶν του εἶναι ἐπίπεδα συμμετρίας καὶ αἱ κοιναὶ κάθετοι τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν του εἶναι ἄξονες συμμετρίας.

843. Περίκεντρον τετραέδρου. Εἰς πᾶν τετράεδρον δείξατε ὅτι αἱ κάθετοι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐπὶ τὰς ἕδρας του εἰς τὰ περίκεντρα αὐτῶν, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται περίκεντρον τοῦ τετραέδρου καὶ ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς κορυφάς του.

844. 'Εγκεντρον τετραέδρου. Εἰς πᾶν τετράεδρον δείξατε ὅτι τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τῶν ἓξ διέδρων γωνιῶν του διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται ἔγκεντρον τοῦ τετραέδρου καὶ ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς ἕδρας του.

845. Παράκεντρον τετραέδρου. Εἰς πᾶν τετράεδρον δείξατε ὅτι ἐντὸς ἑκάστης στερεᾶς γωνίας του καὶ ἐκτὸς τοῦ τετραέδρου ὑπάρχει σημεῖον, ἀπὸ τὸ ὁποῖον διέρχονται τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τῶν τριῶν διέδρων, τῶν ὁποίων αἱ ἀκμαὶ συγκλίνουν εἰς τὴν κορυφὴν τῆς ἐν λόγῳ στερεᾶς γωνίας, καὶ τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τῶν ὑπολοίπων τριῶν ἐξωτερικῶν διέδρων. Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται παράκεντρον τοῦ τετραέδρου καὶ ἰσαπέχει ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα τῶν ἑδρῶν τοῦ στερεοῦ. Κάθε τετράεδρον ἔχει τέσσαρα παράκεντρα.

846. Δείξατε ὅτι, ἐὰν ἓν τετράεδρον εἶναι ὀρθοκεντρικόν, αἱ ἀπέναντι ἀκμαί του εἶναι ὀρθογώνιοι καὶ ἀντιστρόφως.

847. Δείξατε ὅτι εἰς πᾶν ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον τὰ ἴχνη τῶν τεσσάρων ὑψῶν του εἶναι ὀρθόκεντρα τῶν ἑδρῶν του.

848. Δείξατε ὅτι αἱ κοιναὶ κάθετοι τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ὀρθοκεντρικοῦ τετραέδρου διέρχονται διὰ τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τετραέδρου.

849. Δίδεται τετράεδρον ΑΒΓΔ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ, διὰ τὸ ὁποῖον τὸ ἄθροισμα $\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 + \mathrm{M\Gamma}^2 + \mathrm{M\Delta}^2$ εἶναι ἐλάχιστον.

850. Δείξατε ὅτι τὰ ἓξ μεσοκάθετα ἐπίπεδα τῶν ἀκμῶν τετραέδρου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

851. 'Εὰν τετραέδρου ΚΑΒΓ ἡ στερεὰ γωνία Κ εἶναι τρισορθογώνιος, δείξατε ὅτι τὸ ὕψος ΚΗ πληροῖ τὴν σχέσιν : $\frac{1}{\mathrm{KH}^2} = \frac{1}{\mathrm{KA}^2} + \frac{1}{\mathrm{KB}^2} + \frac{1}{\mathrm{K\Gamma}^2}$.

852. Εἰς κάθε τετράεδρον δείξατε ὅτι τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁριζόμενα ὑπὸ ἑκάστης ἀκμῆς καὶ τοῦ μέσου τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

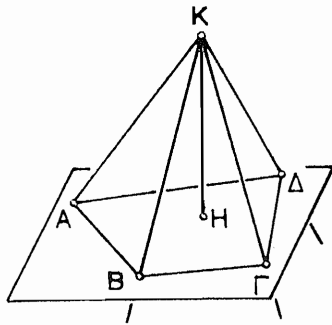
853. Δίδεται τετράεδρον ΑΒΓΔ. Ἐπίπεδον παραμένει παράλληλον πρὸς τὴν ἕδραν ΒΓΔ καὶ τέμνει τὸ τετράεδρον κατὰ τὸ τρίγωνον Β'Γ'Δ'. Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι, αἱ συνδέουσαι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου Β'Γ'Δ' μὲ τὰς ἀπέναντι αὐτῶν κορυφὰς τοῦ τετραέδρου, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Η ΠΥΡΑΜΙΣ

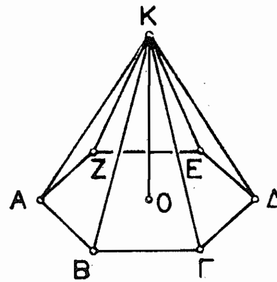
497. Ὁρισμοί. Πυραμὶς καλεῖται τὸ πολύεδρον, τοῦ ὁποίου ἡ μία ἕδρα εἶναι τυχὸν πολύγωνον, τὸ ὁποῖον καλεῖται βάσις τῆς πυραμίδος, αἱ δὲ λοιπαὶ ἕδραι εἶναι τρίγωνα μὲ κοινὴν κορυφὴν ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον καλεῖται κορυφὴ τῆς πυραμίδος.

Πυραμίδα δυνάμεθα νὰ λάβωμεν, ἐὰν τμήσωμεν τὰς ἀκμὰς στερεᾶς γωνίας κορυφῆς Κ δι' ἐπιπέδου εἰς τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,... (σχ. 491).

Μία πυραμὶς εἶναι κυρτὴ ἢ μὴ κυρτή, ἀναλόγως τοῦ ἐὰν ἡ βάσις της ΑΒΓΔ εἶναι κυρτὸν ἢ μὴ κυρτὸν πολύγωνον ἀντιστοίχως. Αἱ τριγωνικαὶ ἕδραι ΚΑΒ, ΚΒΓ,... καλοῦνται **παράπλευροι ἕδραι** τῆς πυραμίδος, αἱ δὲ ἀκμαὶ ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ,..., αἱ ὁποῖαι συγκλίνουν εἰς τὴν κορυφὴν Κ τῆς πυραμίδος, καλοῦνται **παράπλευροι ἀκμαί.**



Σχ. 491



Σχ. 492

Μία πυραμὶς χαρακτηρίζεται ὡς τριγωνική, τετραπλευρική, πενταγωνική κλπ., ἀναλόγως τοῦ πλήθους τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου τῆς βάσεώς της.

Ὕψος τῆς πυραμίδος καλεῖται τὸ κάθετον τμῆμα ΚΗ ἐκ τῆς κορυφῆς της Κ πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως.

Κανονικὴ καλεῖται κάθε πυραμίς, ἡ ὁποία ἔχει ὡς βάσιν κανονικὸν πολύγωνον, ἡ δὲ κορυφή της προβάλλεται ὀρθῶς εἰς τὸ κέντρον τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως (σχ. 492).

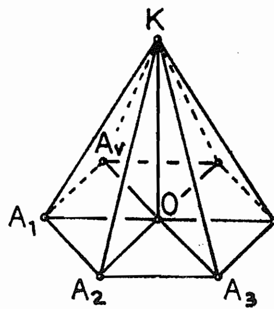
498. Θεώρημα. Κάθε κανονικῆς πυραμίδος αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα.

Ἀπόδειξις. Ἂς θεωρήσωμεν κανονικὴν πυραμίδα $K.A_1A_2...A_\nu$ (σχ. 493). Φέρομεν τὸ ὕψος ΚΟ, ὅπου τὸ Ο εἶναι κέντρον τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως, ἑπομένως εἶναι $OA_1 = OA_2$. Τότε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα KOA_1 καὶ KOA_2 εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὴν ΚΟ κοινὴν καὶ $OA_1 = OA_2$. Ἄρα $KA_1 = KA_2$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι $KA_1 = KA_2 = ... = KA_\nu$. Ἐπειδὴ ἐπὶ πλέον εἶναι $A_1A_2 = A_2A_3 = ... = A_{\nu-1}A_\nu$, ἕπεται ὅτι τὰ παράπλευρα τρίγωνα εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ.

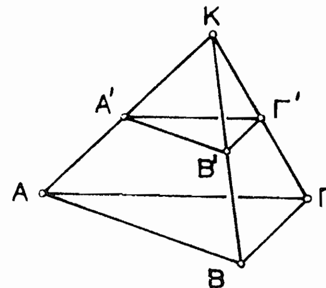
Ἀντιστρόφως. Ἔστω ὅτι εἰς τὴν πυραμίδα $K.A_1A_2...A_\nu$ εἶναι $KA_1 = KA_2 = ... = KA_\nu$ καὶ $A_1A_2 = A_2A_3 = ... = A_{\nu-1}A_\nu$. Φέρομεν πάλιν τὸ ὕψος ΚΟ $\Rightarrow \overset{\Delta}{KOA_1} = \overset{\Delta}{KOA_2} = ... = \overset{\Delta}{KOA_\nu}$ ὡς ὀρθογώνια μὲ ἴσας τὰς ὑποτεινούσας καὶ τὴν ΚΟ κοινήν. Ἄρα $OA_1 = OA_2 = ... = OA_\nu$. Τότε τὰ τρίγωνα OA_1A_2, OA_2A_3,..., $OA_\nu A_1$ εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ καὶ ἑπομένως τὸ πολύγωνον $A_1A_2...A_\nu$ εἶναι κανονικὸν μὲ κέντρον τὴν προβολὴν Ο τοῦ Α ἐπὶ αὐτό. Ἄρα ἡ πυραμὶς εἶναι κανονική.

499. Θεώρημα. Ἐὰν πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν της, ἡ τομὴ εἶναι πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ πολύγωνον τῆς βάσεως.

Ἀπόδειξις. Τὸ θεώρημα θὰ ἀποδειχθῇ κατ' ἀρχὰς διὰ τριγωνικὴν πυραμίδα Κ.ΑΒΓ (σχ. 494). Ἐὰν Α'Β'Γ' εἶναι ἡ παράλληλος τομὴ πρὸς τὴν



Σχ. 493



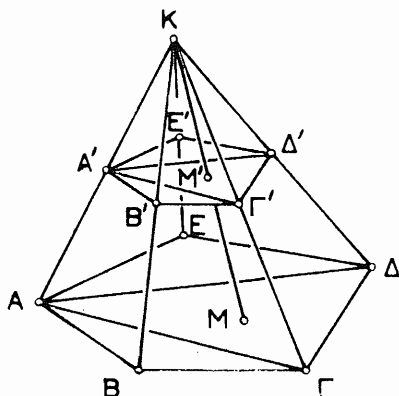
Σχ. 494

βάσιν ΑΒΓ, παρατηροῦμεν ὅτι Α'Β'//ΑΒ, Β'Γ'//ΒΓ καὶ Γ'Α'//ΓΑ, ὡς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου. Ἄρα εἶναι τριγ. Α'Β'Γ' $\approx$ τριγ. ΑΒΓ, ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς των παραλλήλους (τὸ σχετικὸν θεώρημα τῆς ἐπιπεδομετρίας ἰσχύει αὐτούσιον καὶ εἰς τὸν χῶρον, ὡς ἕπεται ἐκ τῆς § 433).

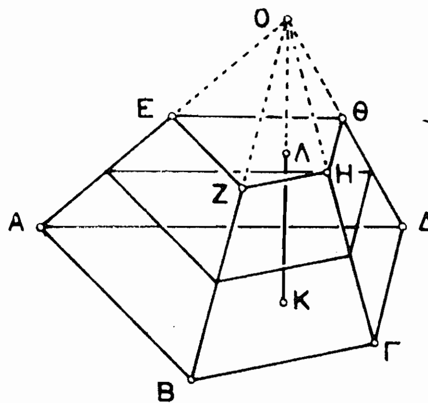
Ἂς θεωρήσωμεν τώρα τυχοῦσαν πυραμίδα Κ.ΑΒΓΔΕ καὶ τὴν τομὴν Α'Β'Γ'Δ'Ε' παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν (σχ. 495). Μὲ τὰ ἐπίπεδα ΑΚΓ, ΑΚΔ, τὰ ὁποῖα τέμνουν τὴν βάσιν καὶ τὴν παράλληλον τομὴν κατὰ διαγωνίους διαιρεῖται ἡ πυραμὶς εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας. Ἄρα εἶναι Α'Β'Γ' $\approx$ ΑΒΓ, Α'Γ'Δ' $\approx$ ΑΓΔ, Α'Δ'Ε' $\approx$ ΑΔΕ καὶ ἑπομένως Α'Β'Γ'Δ'Ε' $\approx$ ΑΒΓΔΕ.

Παρατηρήσεις:

i) Ὁ λόγος ὁμοιότητος $\frac{A'B'}{AB}$ τῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον $\frac{KA'}{KA}$, διότι εἶναι $KA'B' \approx KAB$. Ὁ ἴδιος λόγος μεταφέρεται καὶ ἐπὶ τοῦ τυχόντος τμήματος ΚΜ΄Μ, μὲ τὰ Μ΄ καὶ Μ ἐπὶ τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων καὶ ἀσφαλῶς καὶ ἐπὶ τῶν ὑπολοίπων παραπλεύρων ἀκμῶν ΚΒ΄Β, ΚΓ΄Γ, κλπ. Τοῦτο ἕπεται ἐκ τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλοῦ.



Σχ. 495



Σχ. 496

ii) Τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων ἔχουν λόγον ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου ὁμοιότητος, ἤτοι $\frac{(A'B'\Gamma'\Delta'E')}{(AB\Gamma\Delta E)} = \left(\frac{A'B'}{AB}\right)^2 = \left(\frac{KM'}{KM}\right)^2$.

ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΠΥΡΑΜΙΣ

500. Ὁρισμοί. Κόλουρος πυραμὶς καλεῖται τὸ μέρος μιᾶς πυραμίδος, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ μιᾶς παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν τομῆς τῆς πυραμίδος.

Μία κόλουρος πυραμὶς ΑΒΓΔ.ΕΖΗΘ (σχ. 496) ἔχει τὰς ἕδρας της ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ παραλλήλους. Αὐταὶ καλοῦνται **βάσεις** τῆς πυραμίδος καὶ εἶναι ὅμοια πολύγωνα (§ 499). Αἱ παράπλευροι ἕδραι της εἶναι τραπέζια.

Ἡ ἀπόστασις ΚΛ τῶν δύο παραλλήλων βάσεων καλεῖται **ὕψος** τῆς κολούρου πυραμίδος.

Μία κόλουρος πυραμίς, καλεῖται **κανονική**, ἐὰν ἔχῃ προκύψει ἀπὸ κανονικήν, πυραμίδα. Ἄρα μία κανονικὴ κόλουρος πυραμὶς ἔχει ὡς βάσεις κανονικὰ ὅμοια πολύγωνα, τό δὲ τμῆμα, μὲ ἄκρα τὰ κέντρα βάρους τῶν δύο βάσεων, εἶναι κάθετον ἐπ' αὐτάς.

Μεσαία τομή ἡ μέση τομὴ τῆς κολούρου πυραμίδος καλεῖται ἡ τομὴ αὐτῆς ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις της καὶ ἰσαπέχοντος ἀπ' αὐτάς. Ἡ μεσαία τομὴ εἶναι πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὰς βάσεις καὶ διχοτομεῖ τὰς παραπλεύρους ἀκμάς της κολούρου πυραμίδος, ὡς καὶ τὸ ὕψος της, καὶ γενικῶς κάθε τμῆμα μὲ τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν βάσεων.

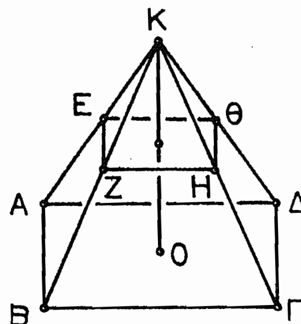
501. Θεώρημα. Κάθε κολούρου κανονικῆς πυραμίδος αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ τραπέζια καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Ἂς θεωρήσωμεν μίαν κόλουρον κανονικὴν πυραμίδα ΑΒΓΔ. ΕΖΗΘ (σχ. 497). Αὕτη ἔχει προκύψει ἀπὸ κανονικὴν πυραμίδα Κ.ΑΒΓΔ δι' ἐπιπέδου τομῆς ΕΖΗΘ παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν. Τότε συμβαίνουν τὰ ἑξῆς :

i) Τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔ εἶναι κανονικὸν ⇒ ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΑ.

ii) Τὸ πολύγωνον ΕΖΗΘ, ὡς ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓΔ, εἶναι κανονικὸν ⇒ ΕΖ = ΖΗ = ΗΘ = ΘΕ.

iii) Αἱ γωνίαι τῶν τραπεζίων εἰς τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ, Δ εἶναι ἴσαι, ὡς παρὰ τὰς βάσεις γωνίαι ἴσων ἰσοσκελῶν τριγώνων. Ἄρα τὰ παράπλευρα τραπέζια εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ.



Σχ. 497

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν ἡ κόλουρος πυραμὶς ΑΒΓΔ.ΕΖΗΘ ἔχῃ τὰ παράπλευρα τραπέζια ἴσα ἰσοσκελῆ, εἶναι κανονική. Πράγματι κατ' ἀρχὴν παρατηροῦμεν ὅτι αἱ παράπλευροι ἕδραι συγκλίνουν εἰς σημεῖον Κ, διότι κάθε κόλουρος πυραμὶς ἔχει προκύψει ἀπὸ πυραμίδα. Ἀρκεῖ ἑπομένως νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ πυραμὶς Κ.ΑΒΓΔ εἶναι κανονική. Τοῦτο ὅμως συμβαίνει, διότι τὰ τρίγωνα ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΔ, ΚΔΑ, ὡς ἔχοντα ἐξ ὑποθέσεως ἴσας βάσεις ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΑ καὶ τὰς παρὰ τὰς βάσεις των γωνίας ἴσας (ἐκ τῶν ἴσων ἰσοσκελῶν τραπεζίων), ἕπεται ὅτι εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα ⇒ ἡ Κ.ΑΒΓΔ εἶναι κανονικὴ ⇒ ἡ κόλουρος πυραμὶς ΑΒΓΔ.ΕΖΗΘ εἶναι κανονική.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

854. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὕψη ἑνὸς κανονικοῦ τετραέδρου ἐκ τῆς ἀκμῆς α αὐτοῦ. Συμπεράνατε ὅτι ταῦτα εἶναι ἴσα.

855. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ κανονικὸν τετράεδρον εἶναι κανονικὴ τριγωνικὴ πυραμίς. Κατὰ τί διαφέρει τὸ κανονικὸν τετράεδρον ἀπὸ μίαν κανονικὴν τριγωνικὴν πυραμίδα ;

856. Πυραμὶς ἔχει ἐμβαδὸν βάσεως Ε. Τέμνομεν αὐτὴν δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν καὶ διερχομένου ἀπὸ τὸ μέσον μιᾶς παραπλεύρου ἀκμῆς. Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ Ε τῆς βάσεως.

857. Πυραμὶς ἔχει ἐμβαδὸν βάσεως Ε καὶ ὕψος υ. Τέμνομεν αὐτὴν δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν εἰς ἀπόστασιν α ἀπὸ τῆς κορυφῆς ($\alpha < \upsilon$). Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς ἐκ τῶν Ε, α καὶ υ.

858. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος μιᾶς τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος ἐκ τῆς ἀκμῆς α τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους $\upsilon = \frac{\alpha\sqrt{7}}{2}$.

859. Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ κανονικὴ πυραμὶς εἶναι α) τριγωνική, β) ἑξαγωνική.

860. Κολούρου πυραμίδος δύο ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν βάσεων ἔχουν λόγον 1/3 καὶ τὰ ἐμβαδὰ τῶν βάσεων εἶναι E_1 καὶ E_2. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεσαίας τομῆς. Νὰ γίνῃ ἐφαρμογή, ἐὰν αἱ βάσεις εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα μὲ πλευρὰς α καὶ 3α ἀντιστοίχως.

Β΄.

861. Δείξατε ὅτι τὸ κανονικὸν τετράεδρον εἶναι ὀρθοκεντρικόν.

862. Κανονικὴ τετραγωνικὴ πυραμὶς ἔχει ἀκμὴν βάσεως 2α καὶ ὕψος $\frac{4\alpha}{3}$. Τέμνομεν αὐτὴν δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ μιᾶς ἀκμῆς τῆς βάσεως καὶ σχηματίζοντος γωνίαν 45^0 μὲ τὴν βάσιν. α) Δείξατε ὅτι ἡ τομὴ εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον. β) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς.

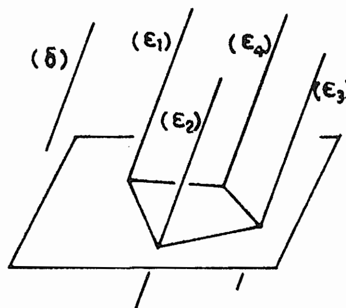
863. Δείξατε ὅτι τὰ τμήματα, μὲ ἄκρα τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τῆς μιᾶς βάσεως κολούρου τριγωνικῆς πυραμίδος καὶ τὰς ἀπέναντι κορυφὰς τῆς ἄλλης βάσεως, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

864. Κόλουρος πυραμὶς ἔχει ἐμβαδὰ βάσεων E_1 καὶ E_2. Τέμνομεν αὐτὴν δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὸ ὕψος εἰς δύο τμήματα μὲ λόγον μ/ν. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς.

865. Εἰς κανονικὸν τετράεδρον ΑΒΓΔ δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὸ μέσον Ε τοῦ ὕψους ΑΗ μὲ τὰς κορυφὰς Β, Γ καὶ Δ, εἶναι ἀκμαὶ τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας.

ΤΟ ΠΡΙΣΜΑ

502. Πρισματικὴ ἐπιφάνεια. Θεωροῦμεν μίαν διαδοχὴν εὐθειῶν (ε_1), (ε_2), (ε_3),..., (ε_ν) παραλλήλων πρὸς μίαν διεύθυνσιν (δ) (σχ. 498). Ἀνὰ δύο, διαδοχικαὶ σχηματίζουν ἐπιπέδους ζώνας, τὸ σύνολον τῶν ὁποίων ἀπαρτίζει μίαν ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία καλεῖται **πρισματική.** Αἱ ἐπίπεδοι ζῶναι καλοῦνται **ἕδραι** τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας καὶ αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι καλοῦνται **ἀκμαὶ** αὐτῆς. Ἡ πρισματικὴ ἐπιφάνεια καλεῖται **κυρτή,** ἐὰν ἡ τομή της ὑπὸ τυχόντος ἐπιπέδου εἶναι κυρτὸν πολύγωνον, ἄλλως ἡ πρισματικὴ ἐπιφάνεια καλεῖται **μὴ κυρτή.**



Σχ. 498

Κάθετος τομὴ πρισματικῆς ἐπιφανείας καλεῖται ἡ τομὴ αὐτῆς ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὰς ἀκμάς της. Ἡ κάθετος τομὴ εἶναι πολύγωνον.

503. Πρῖσμα. Ἐὰν πρισματικὴ ἐπιφάνεια τμηθῇ ὑπὸ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) (σχ. 499), ἀποκόπτεται στερεόν, τὸ ὁποῖον καλεῖται πρῖσμα.

Αἱ παράλληλοι τομαὶ εἶναι πολύγωνα (ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ), τὰ ὁποῖα καλοῦνται **βάσεις** τοῦ πρίσματος, ἐνῷ αἱ λοιπαὶ ἕδραι τοῦ στερεοῦ καλοῦνται **παράπλευροι ἕδραι.**

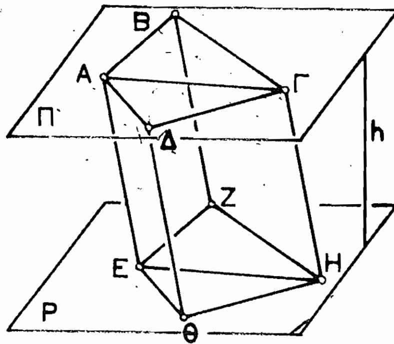
Κάθετος τομὴ πρίσματος καλεῖται ἡ κάθετος τομὴ τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας, ἐκ τῆς ὁποίας προῆλθεν τὸ πρῖσμα.

Αἱ ἀκμαὶ τοῦ πρίσματος (ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ καὶ ΔΘ), αἱ ὁποῖαι δὲν ἀνήκουν εἰς τὰς βάσεις του, καλοῦνται **παράπλευροι ἀκμαί.**

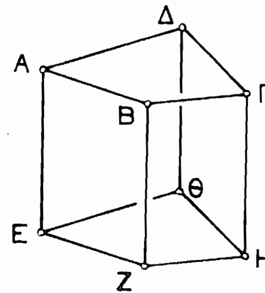
Ὕψος τοῦ πρίσματος καλεῖται ἡ ἀπόστασις h τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ.

Ἕν πρῖσμα χαρακτηρίζεται ὡς τριγωνικόν, τετραπλευτικόν,πενταγωνικὸν κλπ. ἀναλόγως τοῦ πλήθους τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων αὐτοῦ.

Διαγώνιον ἐπίπεδον καλεῖται ἓν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον καθορίζεται ἀπὸ δύο παραπλεύρους ἀκμὰς (ΑΕ καὶ ΓΗ), μὴ κειμένας ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἕδρας. Ἕν διαγώνιον ἐπίπεδον τέμνει τὰς βάσεις τοῦ πρίσματος κατὰ διαγωνίους. Τὰ τριγωνικὰ πρίσματα δὲν ἔχουν οὐδένα διαγώνιον ἐπίπεδον.



Σχ. 499



Σχ. 500

Ὀρθὸν καλεῖται ἓν πρῖσμα, ἐὰν αἱ παράπλευροι ἀκμαί του εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις του. Εἰς τὰ ὀρθὰ μόνον πρίσματα τὸ ὕψος εἶναι ἴσον μὲ ἑκάστην παράπλευρον ἀκμὴν καὶ ἡ κάθετος τομὴ ἴση πρὸς ἑκάστην βάσιν του.

Κανονικὸν καλεῖται ἓν **ὀρθὸν** πρῖσμα, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι κανονικὰ πολύγωνα.

504. Θεώρημα. Αἱ παράπλευροι ἕδραι κάθε πρίσματος εἶναι παραλληλόγραμμα.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τυχὸν πρῖσμα ΑΒΓΔ.ΕΖΗΘ (σχ. 500). Ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι ΑΕ//ΒΖ//ΓΗ//ΔΘ. Ἐπὶ πλέον εἶναι ΑΒ//ΕΖ, ὡς τομαὶ παραλλή-

λων ἐπιπέδων (τῶν βάσεων) ὑπὸ τρίτου. Ἄρα τὸ τετράπλευρον ΑΒΖΕ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ὁμοίως καὶ αἱ λοιπαὶ παράπλευροι ἕδραι του εἶναι παραλληλόγραμμα.

Πόρισμα Ι. Αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ κάθε πρίσματος εἶναι ἴσαι.

Πόρισμα ΙΙ. Αἱ παράπλευροι ἕδραι ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ὀρθογώνια.

Πόρισμα ΙΙΙ. Αἱ παράπλευροι ἕδραι κανονικοῦ πρίσματος εἶναι ἴσα ὀρθογώνια.

505. Θεώρημα. Αἱ βάσεις κάθε πρίσματος εἶναι ἴσα πολύγωνα.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τυχὸν πρῖσμα ΑΒΓΔ.ΕΖΗΘ (σχ. 500). Ἐπειδὴ αἱ παράπλευροι ἀκμαί του εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, ἕπεται ὅτι, ἐὰν ἡ βάσις ΑΒΓΔ μετατοπισθῇ κατὰ τὸν δείκτην $\overrightarrow{ΑΕ}$, θὰ συμπέσῃ μετὰ τῆς ἄλλης βάσεως ΕΖΗΘ. Ἄρα αἱ βάσεις εἶναι ἴσαι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

866. Ἐὰν πρῖσμα τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς παραπλεύρους ἀκμάς του, δείξατε ὅτι ἡ τομὴ εἶναι παραλληλόγραμμον.

867. Δείξατε ὅτι ἡ τομὴ δύο διαγωνίων ἐπιπέδων πρίσματος εἶναι παράλληλος καὶ ἴση πρὸς τὰς παραπλεύρους ἀκμάς του.

868. Κανονικὸν τριγωνικὸν πρῖσμα τέμνεται δι' ἐπιπέδου, διερχομένου διὰ μιᾶς ἀκμῆς τῆς βάσεως καὶ διὰ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς τῆς ἄνω βάσεως. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος ἐκ τῆς ἀκμῆς α τῆς βάσεως αὐτοῦ, ἐὰν τὸ ἐπίπεδον τομῆς σχηματίζῃ μὲ τὴν βάσιν γωνίαν 60°.

869. Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν τὸ ἐπίπεδον τομῆς σχηματίζῃ γωνία 45° μὲ τὴν βάσιν.

870. Κανονικὸν τριγωνικὸν πρῖσμα ἔχει ἀκμὴν βάσεως α καὶ ὕψος α. Τέμνομεν αὐτὸ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ μιᾶς ἀκμῆς τῆς βάσεως καὶ σχηματίζοντος γωνίαν 60° μὲ τὴν βάσιν. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ τομὴ εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν του ἐκ τῆς ἀκμῆς α.

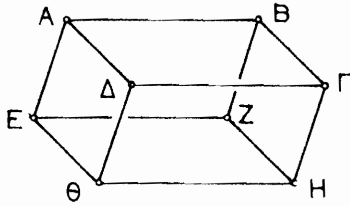
871. Δίδεται τριγωνικὸν πρῖσμα ΑΒΓ.ΔΕΖ. Τέμνομεν αὐτὸ δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν ἕδραν ΒΓΖΕ. Δείξατε ὅτι α) ἡ τομὴ εἶναι παραλληλόγραμμον β) ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς τομῆς πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραλλήλου ἕδρας ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀποστάσεων τῆς ἀκμῆς ΑΔ ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον τομῆς καὶ τῆς παραλλήλου ἕδρας.

506. Παραλληλεπίπεδον καλεῖται ἓν πρῖσμα, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι παραλληλόγραμμα (σχ. 501).

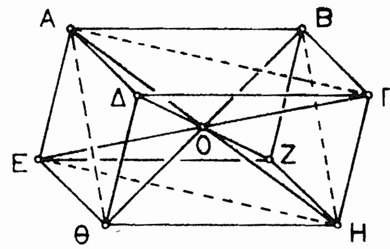
Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἕπεται ὅτι ὅλαι αἱ ἕδραι τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι παραλληλόγραμμα. Ἄρα τὸ παραλληλεπίπεδον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὑπὸ τριπλῆν ἔννοιαν πρῖσμα μὲ βάσεις δύο οἱασδήποτε ἀπέναντι ἕδρας του. Ἑπομένως αἱ ἀπέναντι ἕδραι του εἶναι ἴσα παραλληλόγραμμα καὶ αἱ ἀκμαί του ἀποτελοῦν τρεῖς ὁμάδας ἐκ τεσσάρων παραλλήλων καὶ ἴσων ἀκμῶν. Τὸ παραλληλεπίπεδον ἔχει τρία ὕψη.

507. Θεώρημα. Αἱ διαγώνιοι κάθε παραλληλεπιπέδου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον καλεῖται κέντρον βάρους τοῦ παραλληλεπιπέδου.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ΑΒΓΔ.ΕΖΗΘ τυχὸν παραλληλεπίπεδον (σχ. 502).



Σχ. 501



Σχ. 502

Αἱ ἀκμαί του ΑΕ καὶ ΓΗ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι καὶ ἑπομένως τὸ τετράπλευρον ΑΕΗΓ εἶναι παραλληλόγραμμον ⇒ αἱ διαγώνιοι ΑΗ καὶ ΓΕ τέμνονται εἰς σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον μάλιστα εἶναι καὶ μέσον ἑκάστης.

Ὁμοίως ἐκ τῶν παραλληλογράμμων ΑΒΗΘ καὶ ΑΖΗΔ ἕπεται ὅτι καὶ αἱ διαγώνιοι ΒΘ καὶ ΔΖ ἀντιστοίχως διέρχονται ἀπὸ τὸ μέσον Ο τῆς διαγωνίου ΑΗ. Ἄρα αἱ τέσσαρες διαγώνιοι τοῦ παραλληλεπιπέδου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο, τὸ ὁποῖον καλεῖται **κέντρον βάρους** τοῦ παραλληλεπιπέδου.

Παρατήρησις. Τὸ σημεῖον Ο, ὡς μέσον τῆς κάθε διαγωνίου τοῦ παραλληλεπιπέδου, εἶναι καὶ κέντρον συμμετρίας τοῦ στερεοῦ, ἐξ οὗ καὶ καλεῖται ἁπλῶς κέντρον αὐτοῦ.

508. Ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον καλεῖται τὸ παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου αἱ ἕδραι εἶναι ὀρθογώνια (σχ. 503).

Αἱ στερεαὶ γωνίαι ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι τρισορθογώνιοι καὶ τὰ τρία ὕψη του εἶναι ἴσα πρὸς τρεῖς ἀκμάς του, αἱ ὁποῖαι συντρέχουν εἰς τὴν αὐτὴν στερεὰν γωνίαν, καλοῦνται δὲ καὶ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

509. Θεώρημα. Αἱ διαγώνιοι ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι.

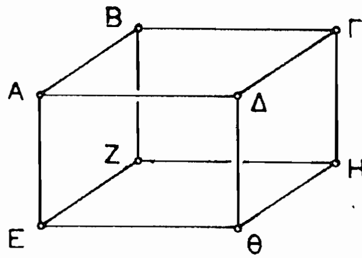
Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν α, β, γ αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου (σχ. 504) καὶ ΑΗ $= \delta$ ἡ τυχοῦσα διαγώνιος αὐτοῦ. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΕΗ λαμβάνομεν : $\delta^2 = ΕΗ^2 + \gamma^2$ (1). Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΕΘΗ λαμβάνομεν : $ΕΗ^2 = \alpha^2 + \beta^2$ (2). Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἕπεται :

$$\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \Rightarrow \delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

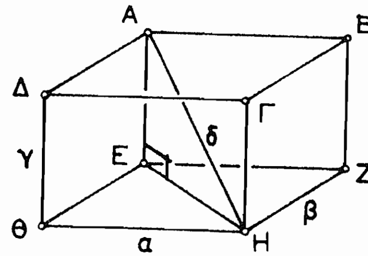
Τὸ αὐτὸ ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τὰς λοιπὰς διαγωνίους. Ἄρα αἱ τέσσαρες διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου παραλληπιπέδου εἶναι ἴσαι.

510. Κύβος καλεῖται τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου αἱ ἕδραι εἶναι τετράγωνα.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἕπεται ὅτι αἱ τρεῖς διαστάσεις τοῦ κύβου εἶναι ἴσαι.



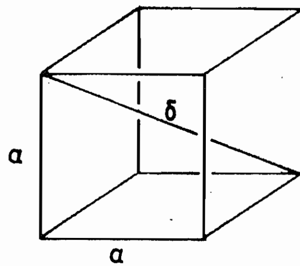
Σχ. 503



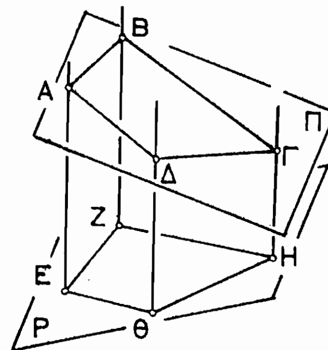
Σχ. 504

Ἐὰν α εἶναι ἡ ἀκμὴ τοῦ κύβου (σχ. 505) καὶ δ ἡ διαγώνιος αὐτοῦ, ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος ἕπεται ὅτι $\delta = \alpha\sqrt{3}$.

511. Κολοβὸν πρῖσμα. Ἐὰν πρισματικὴ ἐπιφάνεια τμηθῇ ὑπὸ δύο μὴ παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) (σχ. 506), ἀποκόπτεται στερεόν, τὸ ὁποῖον καλεῖται κολοβὸν πρῖσμα.



Σχ. 505

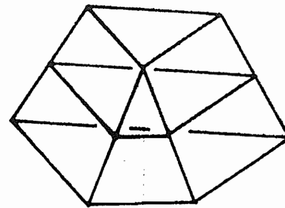


Σχ. 506

Αἱ τομαὶ ὑπὸ τῶν δύο ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) εἶναι πολύγωνα (ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ ὄχι ἴσα), τὰ ὁποῖα καλοῦνται **βάσεις** τοῦ κολοβοῦ πρίσματος. Αἱ λοιπαὶ ἕδραι καλοῦνται παράπλευροι ἕδραι καὶ εἶναι ἐν γένει τραπέζια. Ὕψος εἰς τὸ κολοβὸν πρῖσμα δὲν ὁρίζεται.

512. Πρισματοειδὲς καλεῖται τὸ πολύεδρον, τὸ ὁποῖον ἔχει δύο παραλλήλους ἕδρας, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται βάσεις καὶ δὲν ἔχει ἄλλας κορυφὰς ἐκτὸς ἀπὸ τὰς κορυφὰς τῶν βάσεων (σχ. 507).

Αἱ λοιπαὶ ἕδραι, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται παράπλευροι, εἶναι τρίγωνα ἢ τραπέζια. Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο βάσεων καλεῖται ὕψος τοῦ πρισματοειδοῦς.



Σχ. 507

Μεσαία τομὴ καλεῖται ἡ τομὴ τοῦ στερεοῦ ὑπὸ τοῦ μεσοπαραλλήλου ἐπιπέδου τῶν βάσεων αὐτοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

872. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν παραλληλεπιπέδου ἀπὸ ἐπίπεδον, μὴ τέμνον αὐτό, ἰσοῦται πρὸς τὸ ὀκταπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου βάρους τοῦ παραλληλεπιπέδου ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον.

+ **873.** Ἐὰν αἱ διαγώνιοι παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι, δείξατε ὅτι τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.

874. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων διαγωνίων ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δώδεκα ἀκμῶν του.

875. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι κάθε ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει τρία ἐπίπεδα συμμετρίας.

876. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ κύβος ἔχει κέντρον συμμετρίας τὴν τομὴν τῶν διαγωνίων του.

877. Δίδεται τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία Οxyz καὶ ἐντὸς τῆς γωνίας τυχὸν τμῆμα ΟΑ μήκους δ. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν τοῦ τμήματος ἐπὶ τὰς τρεῖς ἕδρας τῆς τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας παραμένει σταθερόν.

878. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου ἀπὸ τὰς ὀκτὼ κορυφὰς ἑνὸς παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται πρὸς τὸ ὀκταπλάσιον τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως αὐτοῦ ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ παραλληλεπιπέδου, ηὐξημένον κατὰ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων του.

879. Διὰ μιᾶς ἀκμῆς παραλληλεπιπέδου θεωροῦμεν τυχὸν ἐπίπεδον μὴ τέμνον τὸ στερεὸν καὶ ἐπ' αὐτοῦ φέρομεν καθέτους ἀπὸ τὰς ὑπολοίπους ἓξ κορυφὰς τοῦ παραλληλεπιπέδου. Δείξατε ὅτι ἐκ τῶν ἓξ καθέτων τμημάτων τὰ δύο μεγαλύτερα ἔχουν ἄθροισμα ἴσον πρὸς τὰ τέσσαρα ὑπόλοιπα κάθετα τμήματα.

880. Δείξατε ὅτι εἰς κάθε κύβον ἡ προβολὴ μιᾶς ἀκμῆς [redacted] μίαν διαγώνιον ἰσοῦται πρὸς τὸ 1/3 τῆς διαγωνίου.

881. Ἐὰν εἰς ἓν παραλληλεπίπεδον δύο προσκείμεναι ἕδραι εἶναι ἰσοδύναμοι, δείξατε ὅτι ἡ τομὴ τοῦ παραλληλεπιπέδου ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν κοινὴν ἀκμὴν τῶν ἰσοδυνάμων ἑδρῶν εἶναι ρόμβος.

882. Κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος δίδονται τὰ μήκη α, β, γ τῶν τριῶν παραπλεύρων ἀκμῶν του. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν βαρυκέντρων τῶν βάσεων αὐτοῦ.

Β΄.

883. Δίδονται τρεῖς ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι (ε_1), (ε_2), (ε_3) καὶ μεταβλητὸν κατὰ θέσιν εὐθύγραμμον τμῆμα σταθεροῦ μήκους δ. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν του ἐπὶ τὰς τρεῖς ἀσυμβάτους εὐθείας παραμένει σταθερόν.

884. Δίδεται κύβος ἀκμῆς α. Τέμνομεν αὐτὸν διὰ τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου μιᾶς τῶν διαγωνίων του. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ τομὴ εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν του ἐκ τῆς ἀκμῆς α τοῦ κύβου.

885. Δίδεται παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔ.ΕΖΗΘ. Δείξατε ὅτι ἡ διαγώνιος ΑΗ τριχοτομεῖται ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων ΒΔΕ καὶ ΓΖΘ.

886. Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου τρεῖς ἄκραι νὰ εὑρίσκονται ἐπὶ τριῶν δοθεισῶν ἀσυμβάτων εὐθειῶν.

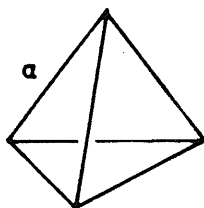
ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

513. Μέτρησις τῆς ἐπιφανείας πολυέδρου. Διὰ τὴν μέτρησιν τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς τυχόντος πολυέδρου, μετρῶμεν τὰς ἐπιφανείας τῶν ἑδρῶν του (ἐμβαδὰ ἐπιπέδων πολυγώνων) καὶ ἀθροίζομεν. Ἡ ἐργασία αὕτη ὅμως, εἰς εἰδικάς τινας περιπτώσεις τυποποιεῖται καὶ συνεπῶς ἀπλουστεύεται, ὡς θὰ φανῇ εἰς τὰ ἑπόμενα.

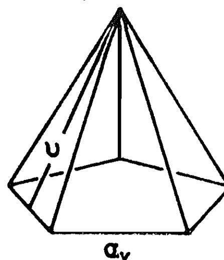
514. Ἐπιφάνεια κανονικοῦ τετραέδρου ἀκμῆς α. Ἀποτελεῖται ἀπὸ τέσσαρα ἰσόπλευρα τρίγωνα πλευρᾶς α (σχ. 508). Τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου ἐξ αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς $\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$ καὶ ἑπομένως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κανονικοῦ τετραέδρου εἶναι $4 \cdot \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} = \alpha^2\sqrt{3}$, ἤτοι

$$\mathbf{E} = \alpha^2\sqrt{3}$$

515. Ἐπιφάνεια κανονικῆς πυραμίδος. Εἰς κανονικὴν πυραμίδα, ὅπου ὅλαι αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα, ὑπολογίζομεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς μόνον τριγώνου καὶ ἐν συνεχείᾳ τὸ πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸ



Σχ. 508



Σχ. 509

πλῆθος ν τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν. Ἐὰν α_ν εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως καὶ υ εἶναι τὸ παράπλευρον ὕψος (σχ. 509), μία παράπλευρος ἕδρα ἔχει ἐμβαδὸν $\frac{1}{2}\alpha_\nu \upsilon$ καὶ ἑπομένως ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια εἶναι $\nu\frac{1}{2}\alpha_\nu\upsilon = \frac{\nu\alpha_\nu}{2}\upsilon = \frac{P_\nu}{2}\upsilon$, ὅπου P_ν εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως. Ἄρα ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια κανονικῆς πυραμίδος δίδεται ἐκ τοῦ τύπου :

$$\mathbf{E}_\pi = \frac{\mathbf{P}_\nu}{\mathbf{2}}\upsilon$$

Ἐὰν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτὴν προσθέσωμεν καὶ τὸ ἐμβαδὸν E_ν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως, λαμβάνομεν τὸν τύπον :

$$\mathbf{E}_{o\lambda.} = \frac{\mathbf{P}_\nu}{\mathbf{2}}\upsilon + \mathbf{E}_\nu$$

τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τῆς κανονικῆς πυραμίδος.

516. Ἐπιφάνεια κολούρου κανονικῆς πυραμίδος. Αἱ παράπλευροι ἕδραι μιᾶς κολούρου κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ τραπέζια. Ἐὰν α_ν, β_ν καὶ υ εἶναι αἱ βάσεις καὶ τὸ ὕψος ἀντιστοίχως ἑνὸς ἐξ αὐτῶν (σχ. 510), τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι $\frac{\alpha_\nu + \beta_\nu}{2} \cdot \upsilon$ καὶ ἑπομένως ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι : $\nu \cdot \frac{\alpha_\nu + \beta_\nu}{2} \cdot \upsilon = \frac{\nu\alpha_\nu + \nu\beta_\nu}{2} \cdot \upsilon = \frac{P_\nu + p_\nu}{2}\,\upsilon$, ὅπου P_ν καὶ p_ν εἶναι αἱ περίμετροι τῶν κανονικῶν πολυγώνων τῶν βάσεων. Ἄρα ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια κανονικῆς κολούρου πυραμίδος δίδεται ἐκ τοῦ τύπου :

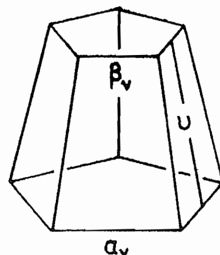
$$E_\pi = \frac{P_\nu + p_\nu}{2} \cdot \upsilon$$

Ἐὰν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτὴν προσθέσωμεν καὶ τὰ ἐμβαδὰ E_ν καὶ ε_ν τῶν δύο βάσεων, λαμβάνομεν τὸν τύπον :

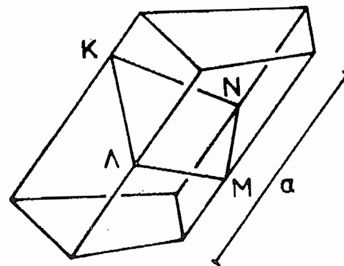
$$E_{o\lambda} = \frac{P_\nu + p_\nu}{2}\,\upsilon + E_\nu + \varepsilon_\nu$$

τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ στερεοῦ.

517. Πρισματικὴ ἐπιφάνεια. Αἱ παράπλευροι ἕδραι κάθε πρίσματος εἶναι παραλληλόγραμμα, τῶν ὁποίων ἡ μία πλευρὰ ἔχει μῆκος α ἴσον πρὸς τὴν παράπλευρον ἀκμὴν τοῦ πρίσματος (σχ. 511). Φέρομεν μίαν κάθετον τομὴν ΚΛΜΝ καὶ εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου ΚΛΜΝ εἶναι ὕψη



Σχ. 510



Σχ. 511

διὰ τὰς παραπλεύρους ἕδρας τοῦ πρίσματος. Τότε ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια, ὡς ἄθροισμα τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν, ἰσοῦται πρὸς α·ΚΛ + α·ΛΜ + α·ΜΝ + α·ΝΚ = α(ΚΛ + ΛΜ + ΜΝ + ΝΚ) = α.Ρ. Ἄρα ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια παντὸς πρίσματος δίδεται ἐκ τοῦ τύπου :

$$E_\pi = \alpha \cdot P$$

ὅπου α εἶναι ἡ παράπλευρος ἀκμὴ τοῦ πρίσματος καὶ Ρ ἡ περίμετρος τῆς καθέτου τομῆς του.

Ἐὰν εἰς τὴν προηγουμένην ἐπιφάνειαν προσθέσωμεν καὶ τὰς δύο ἴσας βάσεις B τοῦ πρίσματος, λαμβάνομεν τὸν τύπον :

$$E_{ολ} = \alpha \cdot P + 2B$$

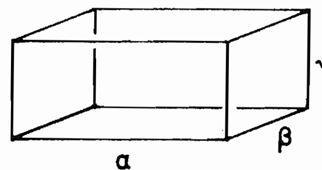
τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος.

518. Ἐπιφάνεια ὀρθοῦ πρίσματος. Οἱ τύποι τῆς προηγουμένης παραγράφου ἰσχύουν βεβαίως καὶ διὰ τὰ ὀρθὰ πρίσματα, ὅπου ὅμως ἡ περίμετρος P τῆς καθέτου τομῆς εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν περίμετρον τῆς βάσεως, ἐνῷ τὸ μῆκος α τῆς παραπλεύρου ἀκμῆς δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ μὲ τὸ ὕψος h τοῦ πρίσματος. Οὕτω λαμβάνομεν :

$$E_{\pi} = P \cdot h \quad \text{καὶ} \quad E_{ολ} = P \cdot h + 2B$$

519. Ἐπιφάνεια ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Ἐὰν αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι α, β, γ (σχ. 512), ὁ τύπος τῆς προηγουμένης παραγράφου διὰ τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ γίνεται : $E_{ολ} = (2\alpha + 2\beta)\gamma + 2\alpha\beta = 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$, ἤτοι :

$$E_{ολ} = 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$$



Σχ. 512

Πόρισμα. Ἡ ἐπιφάνεια κύβου ἀκμῆς α ἰσοῦται πρὸς 6α².

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

887. Κανονικὴ ἑξαγωνικὴ πυραμὶς ἔχει ἀκμὴν βάσεως 5α καὶ ὕψος 6α. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς.

888. Κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος τὸ παράπλευρον ὕψος ἰσοῦται πρὸς τὰ 5/6 τῆς ἀκμῆς τῆς βάσεως. Ἐὰν ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια αὐτῆς εἶναι $384 cm^2$, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκμὴ τῆς βάσεως καὶ τὸ ὕψος της.

889. Κανονικὴ τετραγωνικὴ πυραμὶς ἔχει βάσιν πλευρᾶς α καὶ αἱ παράπλευροι ἕδραι της σχηματίζουν μετὰ τῆς βάσεως γωνίας 30^0. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς.

890. Κανονικὴ τετραγωνικὴ πυραμὶς ἔχει ἀκμὴν βάσεως α καὶ παράπλευρον ἀκμὴν α. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια αὐτῆς.

891. Τετραέδρου ΑΒΓΔ αἱ ἕδραι ΑΒΓ καὶ ΔΒΓ εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα πλευρᾶς α καὶ ἡ δίεδρος $\widehat{ΒΓ}$ εἶναι 60^0. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ.

892. Ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ἡ βάσις εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ καθέτους πλευρὰς 9α καὶ 12α. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος, ἐὰν τὸ ὕψος του ἰσοῦται πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν τῆς τριγωνικῆς βάσεως.

893. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια ὀρθοῦ πρίσματος μὲ ὕψος 2α, ὅταν ἡ βάσις του εἶναι κανονικὸν α) τρίγωνον, β) τετράγωνον, γ) ἑξάγωνον, ἐγγεγραμμένα εἰς κύκλον ἀκτῖνος α.

894. Ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς

α καὶ τὸ ὕψος εἶναι 2α τέμνεται δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῶν ἄκρων τῶν ἀκμῶν τῆς αὐτῆς στερεᾶς γωνίας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τῆς ἀποκοπτομένης πυραμίδος.

895. Αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 1,3,4 καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ εἶναι $342 cm^2$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις του.

896. Ἡ διαγώνιος κύβου εἶναι $\frac{12}{\sqrt{3}}$ cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνειά του.

B'.

897. Τρίεδρος στερεὰ γωνία μὲ κορυφὴν Κ ἔχει τὰς ἕδρας της 60^0 ἑκάστην. Ἐπὶ μιᾶς ἀκμῆς της λαμβάνομεν τμῆμα ΚΑ = α καὶ φέρομεν ἐπίπεδον (ΑΒΓ) ⊥ ΚΑ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς ἄλλας ἀκμὰς τῆς τριέδρου εἰς τὰ Β καὶ Γ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τετραέδρου ΚΑΒΓ.

898. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν δύο κανονικῶν πρισμάτων, τῶν ὁποίων αἱ βάσεις εἶναι τετράγωνον τοῦ ἑνός, ἑξαγώνου τοῦ ἄλλου, ἐγγεγραμμένα εἰς ἴσους κύκλους ἀκτῖνος R καὶ τὰ ὕψη των εἶναι ἴσα πρὸς τὰ ἀποστήματα τῶν βάσεων ἀντιστοίχως.

899. Τέμνομεν κύβον δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῶν ἄκρων τριῶν ἀκμῶν, συντρεχουσῶν εἰς τὴν αὐτὴν στερεὰν γωνίαν. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν τῶν στερεῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ὁ κύβος.

900. Ὀρθὸν κολοβὸν πρῖσμα ἔχει βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α. Αἱ δύο παράπλευροι ἀκμαί του εἶναι $\alpha(1+\sqrt{3})$ καὶ ἡ τρίτη α. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ στερεοῦ.

901. Δείξατε ὅτι τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον μιᾶς διέδρου ἑνὸς τετραέδρου διαιρεῖ τὴν ἀπέναντι ἀκμὴν εἰς δύο μέρη ἀνάλογα τῶν ἐμβαδῶν τῶν προσκειμένων εἰς αὐτὰ ἑδρῶν.

ΟΓΚΟΙ ΤΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

520. Θεώρημα. Εἰς κάθε τετράεδρον τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς ἕδρας του ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον αὐτῆς ὕψος εἶναι τὸ αὐτὸ δι' ὅλας τὰς ἕδρας.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ΑΒΓΔ τυχὸν τετράεδρον. Φέρομεν τὰ ὕψη ΑΕ, ΒΖ (σχ. 513) καὶ ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι (ΒΓΔ) · ΑΕ = (ΑΓΔ) · ΒΖ.

Φέρομεν ΑΗ ⊥ ΓΔ καὶ ΒΘ ⊥ ΓΔ ⇒ ΕΗ ⊥ ΓΔ καὶ ΖΘ ⊥ ΓΔ (θεώρ. τριῶν καθέτων). Ἄρα αἱ γωνίαι $\widehat{AHE}$ καὶ $\widehat{B\Theta Z}$ εἶναι ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι τῆς διέδρου ΓΔ, ⇒ $\widehat{AHE} = \widehat{B\Theta Z}$. Τότε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΗΕ καὶ ΒΘΖ εἶναι ὅμοια ⇒

$$(1)\qquad \frac{AE}{BZ} = \frac{AH}{B\Theta}.$$

Τὰ τρίγωνα ΑΓΔ καὶ ΒΓΔ ἔχουν τὴν ΓΔ κοινήν. Ἄρα

$$(2)\qquad \frac{(A\Gamma\Delta)}{(B\Gamma\Delta)} = \frac{AH}{B\Theta}.$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἕπεται : $\frac{AE}{BZ} = \frac{(A\Gamma\Delta)}{(B\Gamma\Delta)} \Rightarrow (B\Gamma\Delta)\cdot AE = (A\Gamma\Delta)\cdot BZ$.

521. Ὁρισμός. Ὄγκος τετραέδρου καλεῖται τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς ἐκ τῶν ἑδρῶν του ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον αὐτῆς ὕψος, ἐπὶ σταθερόν τινα συντελεστὴν k, ἐξαρτώμενον ἀπὸ τὴν αὐθαίρετον ἐκλογὴν τῆς μονάδος μετρήσεως τῶν ὄγκων *.

Ὁ ὄγκος τετραέδρου ΑΒΓΔ συμβολίζεται μὲ (ΑΒΓΔ) ἢ $V_{(ΑΒΓΔ)}$ ἤ, ἁπλῶς μὲ V, ὅταν προηγουμένως ἔχῃ μνημονευθῇ τὸ τετράεδρον εἰς τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται ὁ ὄγκος. Οἱ αὐτοὶ συμβολισμοὶ ἐπεκτείνονται καὶ διὰ τὸν ὄγκον τυχόντος πολυέδρου.

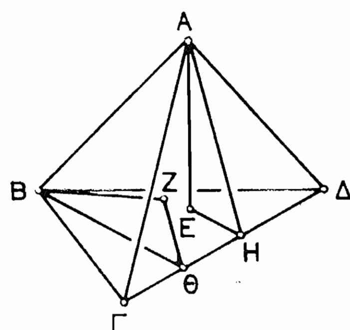
Δύο τετράεδρα ἢ ἐν γένει δύο στερεὰ μὲ ἴσους ὄγκους καλοῦνται ἰσοδύναμα.

Πόρισμα Ι. Δύο τετράεδρα, μὲ ἰσεμβαδικὰς βάσεις καὶ ἴσα ὕψη, εἶναι ἰσοδύναμα.

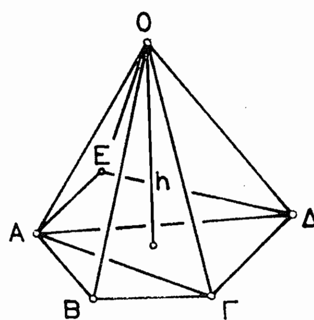
Πόρισμα ΙΙ. Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο τετραέδρων μὲ ἰσεμβαδικὰς βάσεις εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς μονάδος μετρήσεως (τοῦ συντελεστοῦ k) καὶ ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων πρὸς τὰς βάσεις ὑψῶν.

Πόρισμα ΙΙΙ. Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο τετραέδρων, μὲ ἴσα ὕψη, ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων πρὸς αὐτὰ βάσεων.

522. Θεώρημα. Ὁ ὄγκος πυραμίδος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον k·B·h, ὅπου B ἡ βάσις καὶ h τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος.



Σχ. 513



Σχ. 514

Ἀπόδειξις. Ἔστω Ο.ΑΒΓΔΕ τυχοῦσα πυραμὶς μὲ ὕψος h (σχ. 514). Τὴν διαιροῦμεν εἰς τετράεδρα μὲ τὰ ἐπίπεδα ΟΑΓ, ΟΑΔ. Τότε ἔχομεν :

(1) $$(Ο.ΑΒΓΔΕ) = (Ο.ΑΒΓ) + (Ο.ΑΓΔ) + (Ο.ΑΔΕ).$$

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν ὅμως (§ 521) εἶναι : $(Ο.ΑΒΓ) = k(ΑΒΓ)h$, $(Ο.ΑΓΔ) = k(ΑΓΔ)h$, $(Ο.ΑΔΕ) = k(ΑΔΕ)h$ καὶ ἑπομένως ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$(Ο.ΑΒΓΔΕ) = k\ \{(ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) + (ΑΔΕ)\}h = k\ (ΑΒΓΔΕ)h \Rightarrow (Ο.ΑΒΓΔΕ) = kB.h$$

(*) Ἡ τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ k ὁρίζεται κατωτέρω (§ 525) ἀφοῦ προηγουμένως ὁρισθῇ ἡ μονὰς μετρήσεως τῶν ὄγκων.

523. Θεώρημα. Κάθε τριγωνικὸν πρῖσμα δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς τρία ἰσοδύναμα τετράεδρα.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ΑΒΓ.ΔΕΖ τυχὸν τριγωνικὸν πρῖσμα (σχ. 515). Διαιροῦμεν αὐτὸ εἰς τρία τετράεδρα :

(1) $(ΑΒΓ.ΔΕΖ) = (Δ.ΑΒΓ) + (Γ.ΔΕΖ) + (Δ.ΒΓΕ)$

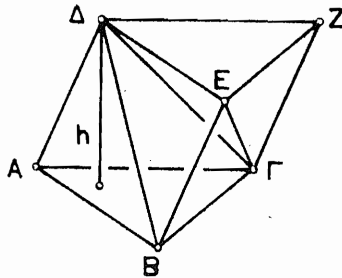
Παρατηροῦμεν ὅτι $(Δ.ΑΒΓ) = (Γ.ΔΕΖ)$, διότι ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη. Ἐπίσης εἶναι $(Γ.ΔΕΖ) = (Δ.ΒΓΕ)$, διότι ἔχουν ἴσας βάσεις τὰς ΓΕΖ καὶ ΓΕΒ καὶ ἴσα ὕψη ἐκ τῆς κοινῆς κορυφῆς των Δ. Ἄρα τὸ τριγωνικὸν πρῖσμα διαιρεῖται εἰς τρία ἰσοδύναμα τετράεδρα καὶ ἑπομένως ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$(ΑΒΓ.ΔΕΖ) = 3(Δ.ΑΒΓ)$$

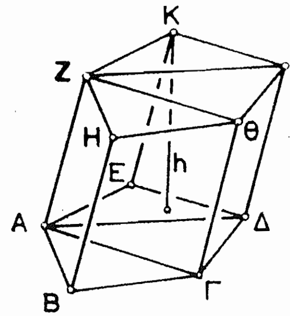
Πόρισμα. Ὁ ὄγκος τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρὸς 3k·B·h, ὅπου B ἡ βάσις του καὶ h τὸ ὕψος του.

224. Θεώρημα. Ὁ ὄγκος τυχόντος πρίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ, ἐπὶ τὸν σταθερὸν συντελεστὴν 3k.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ΑΒΓΔΕ.ΖΗΘΙΚ τυχὸν πρῖσμα μὲ ὕψος h (σχ. 516). Διὰ μιᾶς παραπλεύρου ἀκμῆς του τῆς ΑΖ φέρομεν ὅλα τὰ διαγώνια ἐπίπεδα καὶ τὸ πρῖσμα διαιρεῖται εἰς τριγωνικὰ πρίσματα.



Σχ. 515



Σχ. 516

Τότε ἔχομεν : $(ΑΒΓ...Κ) = 3k(ΑΒΓ)h + 3k(ΑΓΔ)h + 3k(ΑΔΕ)h = 3k(ΑΒΓΔΕ)h$. Ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον 3kBh, ὅπου B ἡ βάσις τοῦ πρίσματος.

Πόρισμα. Ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ διαστάσεις α, β, γ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον 3.kαβγ.

525. Μονὰς μετρήσεως τῶν ὄγκων. Προσδιορισμὸς συντελεστοῦ k. Πρακτικοὶ λόγοι ἔχουν ἐπιβάλει ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν ὄγκων τὴν κυβικήν, ἤτοι ἕνα κύβον μὲ ἀκμὴν τὴν μονάδα μετρήσεως τῶν μηκῶν. Ὁ ὄγκος

τῆς μονάδος μετρήσεως, κατὰ τὸ προηγούμενον πόρισμα, ἰσοῦται πρὸς $3k \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ καὶ βεβαίως πρέπει νὰ εἶναι $3k \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$. Ἄρα :

$$k = \frac{1}{3}$$

Πόρισμα. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα ἕπεται ὅτι :

i) Ὁ ὄγκος πυραμίδος δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον $V = \frac{1}{3}$ Bh.

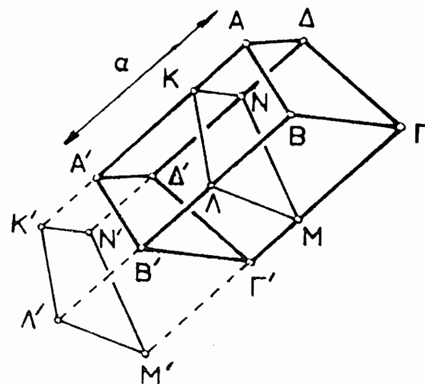
ii) Ὁ ὄγκος πρίσματος δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον V = Bh, ὅπου B εἶναι ἡ βάσις τοῦ στερεοῦ καὶ h τὸ ὕψος του.

iii) Ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ διαστάσεις α, β, γ δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον V = αβγ.

iv) Ὁ ὄγκος τοῦ κύβου ἀκμῆς α δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον $V = \alpha^3$

526. Θεώρημα. Κάθε πρῖσμα εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθὸν πρῖσμα μὲ βάσιν τὴν κάθετον τομὴν καὶ ὕψος τὴν παράπλευρον ἀκμήν του.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ΑΒΓΔ.Α′Β′Γ′Δ′ ἓν (πλάγιον) πρῖσμα μὲ παράπλευρον ἀκμὴν ΑΑ′ = α καὶ ΚΛΜΝ μία κάθετος τομὴ αὐτοῦ (σχ. 517). Προεκτείνοντες τὰς παραπλεύρους ἀκμάς του κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν λαμβάνομεν τμήματα Α′Κ′ = ΑΚ, Β′Λ′ = ΒΛ, Γ′Μ′ = ΓΜ καὶ Δ′Ν′ = ΔΝ. Τότε παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι ΚΚ′ = ΑΑ′ = α, διότι ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὸ κοινὸν τμῆμα ΚΑ′ καὶ ἀπὸ τὰ ἴσα τμήματα ΑΚ καὶ Α′Κ′ ἀντιστοίχως. Ὁμοίως εἶναι ΛΛ′ = ΜΜ′ = ΝΝ′ = α. Ἄρα δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὅτι τὸ στερεὸν τμῆμα ΑΒΓΔ.ΚΛΜΝ ἔχει μετατοπισθῆ κατὰ τὸν δεθκτην $\overrightarrow{AA'}$ εἰς τὴν θέσιν Α′Β′Γ′Δ′.Κ′Λ′Μ′Ν′ καὶ ἐπομένως εἶναι : (ΑΒΓΔ.Α′Β′Γ′Δ′) = (ΚΛΜΝ.Κ′Λ′Μ′Ν′) (1). Ἀλλὰ τὸ ΚΛΜΝ.Κ′Λ′Μ′Ν′ εἶναι ὀρθὸν πρῖσμα, μὲ βάσιν τὴν κάθετον τομὴν (ΚΛΜΝ) = Β καὶ ὕψος τὴν ἀκμὴν ΚΚ′ = α. Ἐπομένως εἶναι (ΚΛΜΝ.Κ′Λ′Μ′Ν′) = Β·α καὶ τότε ἡ σχέσις (1) γράφεται : (ΑΒΓΔ.Α′Β′Γ′Δ′) = Β·α.



Σχ. 517

227. Θεώρημα. Ἐὰν δύο τετράεδρα ἔχουν μίαν στερεὰν γωνίαν ἴσην, ὁ λόγος τῶν ὄγκων των εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν ἀκμῶν τῶν περιεχουσῶν τὰς ἴσας στερεὰς γωνίας.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ΑΒΓΔ καὶ Α'Β'Γ'Δ' τὰ δύο τετράεδρα (χ. 518) τοποθετημένα εἰς τρόπον, ὥστε νὰ συμπίπτουν αἱ ἴσαι στερεαὶ γωνία εἰς τὸ Α. Φέρομεν ΒΕ $\perp$ (ΑΓΔ) καὶ Β'Ε' $\perp$ (ΑΓ'Δ'). Τότε θὰ εἶναι :

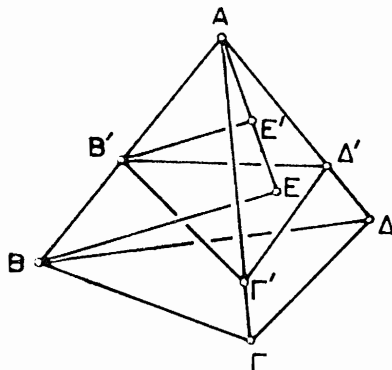
$$(1) \qquad \frac{(\text{ΑΒΓΔ})}{(\text{ΑΒ'Γ'Δ'})} = \frac{{}^1/_3\,(\text{ΑΓΔ})\,\text{ΒΕ}}{{}^1/_3\,(\text{ΑΓ'Δ'})\,\text{Β'Ε'}} = \frac{(\text{ΑΓΔ})\,\text{ΒΕ}}{(\text{ΑΓ'Δ'})\,\text{Β'Ε'}}$$

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΓΔ καὶ ΑΓ'Δ' ἔχουν κοινὴν τὴν γωνίαν $\widehat{\text{Α}}$, ἔχομεν $\frac{(\text{ΑΓΔ})}{(\text{ΑΓ'Δ'})} = \frac{\text{ΑΓ}\cdot\text{ΑΔ}}{\text{ΑΓ'}\cdot\text{ΑΔ'}}$, ἐνῷ ἀπὸ τὰ ὅμοια ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΒ'Ε' λαμβάνομεν $\frac{\text{ΒΕ}}{\text{Β'Ε'}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΒ'}}$. Τότε ἡ σχέσις (1) γράφεται :

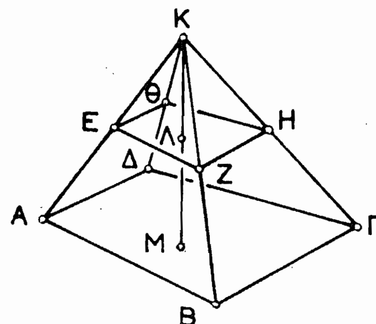
$$\frac{(\text{ΑΒΓΔ})}{(\text{ΑΒ'Γ'Δ'})} = \frac{\text{ΑΓ}\cdot\text{ΑΔ}}{\text{ΑΓ'}\cdot\text{ΑΔ'}}\cdot\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΒ'}} \Rightarrow \frac{(\text{ΑΒΓΔ})}{(\text{ΑΒ'Γ'Δ'})} = \frac{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}\cdot\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ'}\cdot\text{ΑΓ'}\cdot\text{ΑΔ'}}.$$

528. Θεώρημα. Ὁ ὄγκος κολούρου πυραμίδος δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον :

$$\mathbf{V = \frac{1}{3}(B + \sqrt{B\beta} + \beta)h.}$$



Σχ. 518



Σχ. 519

Ἀπόδειξις. Ἔστω ΑΒΓΔ·ΕΖΗΘ μία κόλουρος πυραμὶς μὲ βάσεις τὰ ὅμοια πολύγωνα (ΑΒΓΔ) = Β, (ΕΖΗΘ) = β καὶ ὕψος h (σχ. 519).

Θεωροῦμεν τὸ σημεῖον Κ, εἰς τὸ ὁποῖον τέμνονται αἱ παράπλευροι ἀκμαί της, καὶ τὸ κάθετον τμῆμα ΚΛΜ ἐπὶ τὰς βάσεις τῆς κολούρου πυραμίδος. Ὁ ὄγκος V αὐτῆς ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ὄγκων τῶν δύο πυραμίδων Κ.ΑΒΓΔ καὶ Κ.ΕΖΗΘ, ἤτοι εἶναι

$$(1) \qquad \text{V} = \frac{1}{3}\,\text{Β}\cdot\text{ΚΜ} - \frac{1}{3}\,\beta\cdot\text{ΚΛ}$$

Γνωρίζομεν ὅτι (§ 499) $\frac{\text{Β}}{\beta} = \frac{\text{ΚΜ}^2}{\text{ΚΛ}^2} \Rightarrow$

(2) $$\frac{KM}{K\Lambda} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{\beta}}.$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν (2) λαμβάνομεν ἀφ' ἑνὸς μὲν $\frac{KM}{KM - K\Lambda} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{\beta}} \Rightarrow$

$\frac{KM}{h} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{\beta}} \Rightarrow KM = \frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{\beta}}$, ἀφ' ἑτέρου δὲ $\frac{KM - K\Lambda}{K\Lambda} =$

$\frac{\sqrt{B} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}} \Rightarrow \frac{h}{K\Lambda} = \frac{\sqrt{B} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}} \Rightarrow K\Lambda = \frac{h\sqrt{\beta}}{\sqrt{B} - \sqrt{\beta}}$. Ἀντικαθιστῶμεν ἐξ αὐτῶν τὰς τιμὰς τῶν KM καὶ KΛ εἰς τὴν σχέσιν (1) καὶ λαμβάνομεν :

$$V = \frac{1}{3}\left[B\frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{\beta}} - \beta\frac{h\sqrt{\beta}}{\sqrt{B} - \sqrt{\beta}}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{\sqrt{B^3} - \sqrt{\beta^3}}{\sqrt{B} - \sqrt{\beta}}\right]h =$$

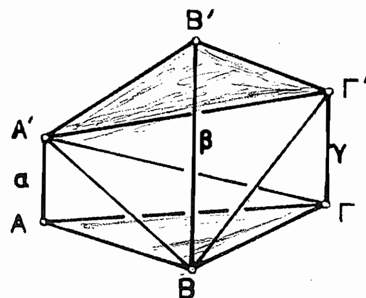
$\frac{1}{3}(\sqrt{B^2} + \sqrt{B\beta} + \sqrt{\beta^2})\,h = \frac{1}{3}(B + \sqrt{B\beta} + \beta)\,h$, ἤτοι :

$$\mathbf{V = \frac{1}{3}(B + \sqrt{B\beta} + \beta)h}$$

529. Θεώρημα. Ὁ ὄγκος κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος δίδεται ἐκ τοῦ τύπου :

$$\mathbf{V = \frac{1}{3}B(\alpha + \beta + \gamma),}$$

ὅπου B εἶναι ἡ κάθετος τομὴ αὐτοῦ καὶ α, β, γ αἱ παράπλευροι ἀκμαί του.



Σχ. 520

Ἀπόδειξις. i) Ἔστω ὅτι τὸ κολοβὸν τριγωνικὸν πρῖσμα ΑΒΓ.Α′Β′Γ′ (σχ. 520) εἶναι ὀρθόν. Τότε ἡ βάσις του (ΑΒΓ) = B εἶναι καὶ κάθετος τομὴ αὐτοῦ καὶ ὁ ὄγκος του V ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα τῶν ὄγκων τριῶν πυραμίδων, ὡς ἑξῆς :

(1) $$V = (A'.AB\Gamma) + (A'.BB'\Gamma') + (A'.B\Gamma\Gamma').$$

Ἐκτελοῦμεν τοὺς ἑξῆς προφανεῖς μετασχηματισμοὺς (§ 521 πόρ. I): $(A'.BB'\Gamma') = (A.BB'\Gamma') = (\Gamma'.ABB') = (\Gamma.ABB') = (B'.AB\Gamma) = \frac{1}{3}B\beta$ καὶ $(A'B\Gamma\Gamma') = (A.B\Gamma\Gamma') = (\Gamma'.AB\Gamma) = \frac{1}{3}B\gamma$. Ἐπειδὴ ἐπὶ πλέον εἶναι

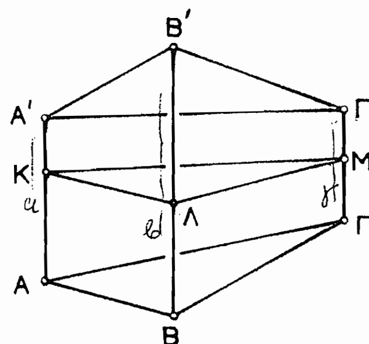
$(Α'.ΑΒΓ) = \frac{1}{3}Βα$, ἡ σχέσις (1) γράφεται: $V = \frac{1}{3}Βα + \frac{1}{3}Ββ + \frac{1}{3}Βγ \Rightarrow$

$V = \frac{1}{3}Β(α+β+γ)$.

ii) Ἔστω ὅτι τὸ τριγωνικὸν κολοβὸν πρῖσμα δὲν εἶναι ὀρθὸν (σχ. 521). Φέρομεν μίαν κάθετον τομὴν $(ΚΛΜ) = Β$ αὐτοῦ καὶ τότε τὸ στερεὸν ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα δύο ὀρθῶν κολοβῶν τριγωνικῶν πρισμάτων μὲ κοινὴν βάσιν τὴν $(ΚΛΜ) = Β$, ἤτοι:

(2) $V = (ΚΛΜ.ΑΒΓ) + (ΚΛΜ.Α'Β'Γ')$.

Κατὰ τὸ προηγούμενον θὰ ἔχωμεν:



Σχ. 521

$$(ΚΛΜ.ΑΒΓ) = \frac{1}{3}Β(ΚΑ+ΛΒ+ΜΓ)$$

καὶ $(ΚΛΜ.Α'Β'Γ') = \frac{1}{3}Β(ΚΑ' + ΛΒ' + ΜΓ')$, ἑπομένως ἡ σχέσις (2) γράφεται:

$$V = \frac{1}{3}Β(ΚΑ + ΛΒ + ΜΓ) + \frac{1}{3}Β(ΚΑ' + ΛΒ' + ΜΓ') = \frac{1}{3}Β(ΑΑ' + ΒΒ' + ΓΓ') = \frac{1}{3}Β(α + β + γ),$$ ἤτοι

$$\mathbf{V = \frac{1}{3}B(\alpha + \beta + \gamma)}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

902. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κανονικοῦ τετραέδρου ἀκμῆς α.

903. Κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος ἡ ἀκμὴ τῆς βάσεως εἶναι α καὶ αἱ παράπλευροι ἕδραι της σχηματίζουν γωνίας 45^o μὲ τὴν βάσιν. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος της.

904. Δίδονται τρεῖς παράλληλοι εὐθεῖαι $(ε_1)$, $(ε_2)$, $(ε_3)$, ὄχι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἐπὶ τῆς $(ε_1)$ ὀλισθαίνει τμῆμα **ΑΒ** σταθεροῦ μήκους καὶ ἐπὶ τῶν $(ε_2)$ καὶ $(ε_3)$ δύο σημεῖα Γ καὶ Δ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ μεταβλητοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ εἶναι σταθερός.

905. Ὁ ὄγκος κανονικοῦ τετραέδρου νὰ ἐκφρασθῇ α) ἐκ τοῦ ὕψους του h, β) ἐκ τῆς ἐπιφανείας του Ε.

906. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος καὶ ἡ ἐπιφάνεια κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος τῆς ὁποίας ἡ ἀκμὴ τῆς βάσεως εἶναι α καὶ ἡ παράπλευρος ἀκμὴ εἶναι $\frac{α\sqrt{17}}{2}$.

907. Κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος ἡ ἀκμὴ τῆς βάσεως εἶναι α καὶ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια εἶναι διπλασία τῆς βάσεως. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος.

Β'.

908. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος τετραέδρου ἰσοῦται πρὸς τὸ 1/3 τοῦ γινομένου μιᾶς ἀκμῆς του ἐπὶ τὴν προβολὴν τοῦ στερεοῦ εἰς ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ταύτην.

909. Ἐὰν τετραέδρου αἱ δύο ἀπέναντι ἀκμαὶ εἶναι ὀρθογώνιοι, δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος του ἰσοῦται πρὸς 1/6 τοῦ γινομένου τῶν ἀκμῶν τούτων, ἐπὶ τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν αὐτῶν.

910. Ἐὰν τετραέδρου ἡ μία κορυφὴ προβάλλεται ἐπὶ τὴν ἀπέναντι ἕδραν εἰς τὸ ὀρθόκεντρον αὐτῆς, δείξατε ὅτι τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἀκμῶν τοῦ τετραέδρου ἐπὶ τὴν κοινὴν κάθετον αὐτῶν εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς ἐκλογῆς τῶν ἀκμῶν τούτων.

911. Τετραέδρου ΑΒΓΔ αἱ ἕδραι ΑΒΓ καὶ ΔΒΓ εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα, ἡ ἀκμὴ ΑΔ = α καὶ ἡ δίεδρος $\widehat{ΒΓ}$ εἶναι 60°. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος του.

912. Ἐντὸς τετραέδρου νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Κ τοιοῦτον, ὥστε τὰ τετράεδρα μὲ κορυφὴν τὸ Κ καὶ βάσεις τὰς ἕδρας τοῦ τετραέδρου, νὰ εἶναι ἰσοδύναμα.

913. Πυραμίδος Κ.ΑΒΓΔ ἡ βάσις ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος της ἰσοῦται πρὸς τὰ 2/3 τῆς ἕδρας ΚΑΒ ἐπὶ τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν τῶν ἀκμῶν ΚΑ καὶ ΓΔ.

914. Κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος ἡ ἀκμὴ τῆς βάσεως εἶναι 2α καὶ αἱ παράπλευροι ἕδραι σχηματίζουν μὲ τὴν βάσιν γωνίας 15°. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος της.

915. Δίδεται τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α. Ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α καὶ Γ φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραγώνου πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος του καὶ ἐπ' αὐτῶν λαμβάνομεν τμήματα ΑΕ = ΑΓ καὶ ΓΖ = ΑΒ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ ΑΒΓΔΕΖ.

916. Δίδεται τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α. Ἀπὸ τὰς κορυφάς του Β καὶ Δ φέρομεν κάθετα τμήματα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραγώνου ΒΕ = 3α, ΔΖ = 2α καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ΑΓΕΖ.

917. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κανονικῆς ἑξαγωνικῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια εἶναι $12α^2$ καὶ αἱ παράπλευροι ἕδραι σχηματίζουν διέδρους γωνίας 30° μὲ τὴν βάσιν.

918. Τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία Κ τέμνεται δι' ἐπιπέδου εἰς τὰ Α, Β καὶ Γ. Ἐὰν ΚΑ = 2α, ΚΒ = 3α καὶ ΚΓ = 4α, νὰ ὑπολογισθῇ i) τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς καὶ ii) τὸ ὕψος ΚΗ τοῦ τετραέδρου ΚΑΒΓ.

Α'.

919. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος πρίσματος, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι κανονικὸν α) τρίγωνον, β) τετράγωνον, γ) ἑξάγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον ἀκτῖνος R καὶ ἔχει ὕψος διπλάσιον τῆς ἀκμῆς τῆς βάσεως.

920. Ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ἡ βάσις εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ καθέτους πλευρὰς 20α καὶ 15α, τὸ δὲ ὕψος του ἰσοῦται μὲ τὴν ὑποτείνουσαν τῆς τριγωνικῆς βάσεως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος αὐτοῦ.

921. Τριγωνικὸν πρῖσμα ἔχει βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α καὶ αἱ παράπλευροι ἀκμαί του εἶναι κεκλιμέναι κατὰ 60° πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς καθέτου τομῆς του.

922. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας του, ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς ἀπ' αὐτήν.

923. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο πρισμάτων, τῶν ὁποίων αἱ βάσεις εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον τοῦ ἑνός, τρίγωνον τοῦ ἄλλου, ἐγγεγραμμένα εἰς ἴσους κύκλους ἀκτῖνος R, τὰ δὲ ὕψη των ἴσα πρὸς τὰ ἀποστήματα τῶν βάσεων ἀντιστοίχως.

924. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν δύο πυραμίδων, μὲ κοινὴν κορυφὴν τυχὸν σημεῖον ἐσωτερικὸν δοθέντος πρίσματος καὶ βάσεις τὰς βάσεις τοῦ πρίσματος, εἶναι σταθερόν.

925. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον μὲ ἄθροισμα 27cm καὶ τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια εἶναι $454 cm^2$.

926. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κύβου, τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια εἶναι $486 cm^2$.

927. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος κύβου α) ἐκ τῆς διαγωνίου του δ καὶ β) ἐκ τῆς ἐπιφανείας του Ε.

928. Αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 2,3,4 καὶ ὁ ὄγκος του εἶναι $648 cm^3$. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις του.

929. Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν τῶν συντρεχουσῶν εἰς τὴν αὐτὴν κορυφὴν Α κύβου ἀκμῆς α λαμβάνομεν τμήματα $AB' = A\Gamma' = A\Delta' = 2\alpha/3$. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τοῦ κύβου καὶ τοῦ τετραέδρου $AB'\Gamma'\Delta'$.

Β΄.

930. Ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου αἱ διαστάσεις εἶναι 3α, 4α, 5α. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος του, ἐὰν ὡς μονὰς μετρήσεως τῶν ὄγκων ληφθῇ ὁ ὄγκος κανονικοῦ τετραέδρου μὲ ἀκμὴν 2α.

931. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἐὰν ἡ διαγώνιος αὐτοῦ εἶναι 26cm, ἡ διαγώνιος μιᾶς ἕδρας του 10 cm καὶ ἡ ἐπιφάνειά του $768 cm^2$.

932. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων παραλληλεπιπέδου καὶ τοῦ τετραέδρου τοῦ ὁποίου τρεῖς ἀκμαὶ συντρέχουν εἰς μίαν κορυφὴν τοῦ παραλληλεπιπέδου.

933. Δοθὲν παραλληλεπίπεδον νὰ διαιρεθῇ εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη δι' ἐπιπέδων ἀγομένων ἐκ μιᾶς ἀκμῆς του.

934. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καὶ τοῦ ὀκταέδρου μὲ κορυφὰς τὰ κέντρα τῶν ἑδρῶν τοῦ παραλληλεπιπέδου.

935. Δείξατε ὅτι οἱ ὄγκοι δύο παραλληλεπιπέδων, μὲ μίαν στερεὰν γωνίαν κοινήν, εἶναι ὅπως τὰ γινόμενα τῶν ἀκμῶν τῶν περιεχουσῶν τὴν κοινὴν στερεὰν γωνίαν.

Α΄.

936. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος κολούρου πυραμίδος δίδεται ἐκ τοῦ τύπου $V = \frac{1}{3} B(1 + \lambda + \lambda^2)h$, ἔνθα λ εἶναι ὁ λόγος ὁμοιότητος τῶν δύο βάσεων.

937. Κανονικὴ τετραγωνικὴ πυραμίς, μὲ ἀκμὴν βάσεως 2α καὶ ὕψος $\alpha\sqrt{3}$, τέμνεται δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν καὶ διερχομένου ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ ὕψους. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τῆς σχηματιζομένης κολούρου πυραμίδος.

938. Ὀρθὸν κολοβὸν πρίσμα ἔχει βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α καὶ παραπλεύρους ἀκμὰς α, 2α, 3α. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος του.

939. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῆς καθέτου τομῆς του ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τῶν κ. βάρους τῶν βάσεων.

Β΄.

940. Κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος ἡ βάσις ἔχει πλευρὰν 2α καὶ αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ σχηματίζουν γωνίας 60^0 μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τὴν βάσιν πρέπει νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν οὕτως, ὥστε ἡ ἀποκοπτομένη κόλουρος πυραμὶς νὰ ἔχῃ ὄγκον $\frac{104\alpha^3\sqrt{3}}{81}$.

941. Τριγωνικοῦ πρίσματος αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ ἔχουν μῆκος 20cm. Ἐπὶ δύο παραπλεύρων ἀκμῶν λαμβάνομεν σημεῖα Η καὶ Θ, ἀπέχοντα ἀπὸ τὰς ἀντιστοίχους κορυφὰς τῆς αὐτῆς βάσεως ἀποστάσεις 12cm καὶ 15cm. Ἐπὶ τῆς τρίτης παραπλεύρου ἀκμῆς νὰ ὁρισθῇ σημεῖον Ι οὕτως, ὥστε τὸ ἐπίπεδον (ΗΘΙ) νὰ διαιρῇ τὸ πρῖσμα εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

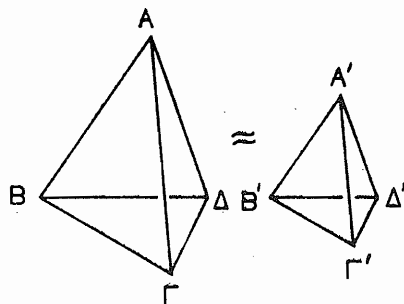
942. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος κολοβοῦ παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται πρὸς τὸ 1/4 τοῦ γινομένου τῆς καθέτου τομῆς ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν του.

943. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος κολοβοῦ παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῆς καθέτου τομῆς του ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τῶν κέντρων τῶν βάσεων αὐτοῦ.

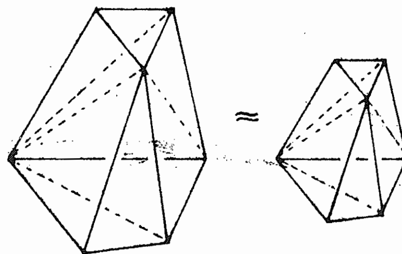
ΟΜΟΙΑ ΠΟΛΥΕΔΡΑ

530. Ὅμοια τετράεδρα. Ὁρισμός. Δύο τετράεδρα καλοῦνται ὅμοια, ὅταν ἔχουν τὰς ἕδρας των ὁμοίας μίαν πρὸς μίαν καὶ ὁμοίως τοποθετημένας (σχ. 522).

Ὁ λόγος ὁμοιότητος τῶν τριγωνικῶν ἑδρῶν εἶναι ὁ αὐτὸς δι' ὅλα τὰ ζεύγη τῶν ὁμοίων ἑδρῶν καὶ καλεῖται λόγος ὁμοιότητος τῶν τετραέδρων. Αἱ ἀντίστοιχοι στερεαί, ὡς καὶ αἱ δίεδροι γωνίαι τῶν δύο τετραέδρων, εἶναι ἴσαι.



Σχ. 522



Σχ. 523

531. Ὅμοια πολύεδρα. Ὁρισμός. Δύο πολύεδρα καλοῦνται ὅμοια, ἐὰν δύνανται νὰ διαιρεθοῦν δι' ἐπιπέδων ἀγομένων ἐκ μιᾶς κορυφῆς των ἀντιστοίχως εἰς ὅμοια τετράεδρα καὶ ὁμοίως τοποθετημένα (σχ. 523).

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα ἕπονται τὰ ἑξῆς :

i) Ὑπάρχει ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία ὅλων τῶν στοιχείων τοῦ

ἑνὸς πολυέδρου (ἕδραι, κορυφαί, ἀκμαί, γωνίαι κλπ.) πρὸς τὰ στοιχεῖα τοῦ ἄλλου. Δύο ἀντίστοιχα στοιχεῖα καλοῦνται **ὁμόλογα.**

ii) Αἱ ἀντίστοιχοι ἕδραι εἶναι ὅμοια πολύγωνα μὲ τὸν αὐτὸν λόγον ὁμοιότητος τῶν πολυέδρων.

iii) Αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι τῶν δύο πολυέδρων (ἐπίπεδοι, δίεδροι, στερεαὶ) εἶναι ἴσαι.

iv) Ἡ σχέσις τῆς ὁμοιότητος δύο πολυέδρων, ἡ ὁποία συμβολίζεται μὲ τὸ $\approx$, εἶναι σχέσις ἀνακλαστική, συμμετρική καὶ μεταβατική, ἤτοι :

α) $(\Sigma) \approx (\Sigma)$,

β) $(\Sigma_1) \approx (\Sigma_2) \Rightarrow (\Sigma_2) \approx (\Sigma_1)$,

γ) $(\Sigma_1) \approx (\Sigma_2) \wedge (\Sigma_2) \approx (\Sigma_3) \Rightarrow (\Sigma_1) \approx (\Sigma_3)$

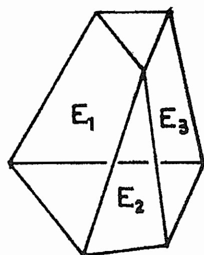
Ἄρα ἡ σχέσις τῆς ὁμοιότητος εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας.

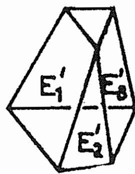
532. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν δύο ὁμοίων πολυέδρων ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου ὁμοιότητος αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἂς θεωρήσωμεν δύο ὅμοια πολύεδρα μὲ λόγον ὁμοιότητος λ (σχ. 524) καὶ τῶν ὁποίων αἱ ἕδραι ἔχουν ἐμβαδὰ $E_1, E_2, \ldots, E_\nu$ καὶ $E'_1, E'_2, \ldots, E'_\nu$ ἀντιστοίχως. Ἐπειδὴ αἱ ἀντίστοιχοι ἕδραι εἶναι ὅμοια πολύγωνα μὲ λόγον ὁμοιότητος λ, ἔχομεν :

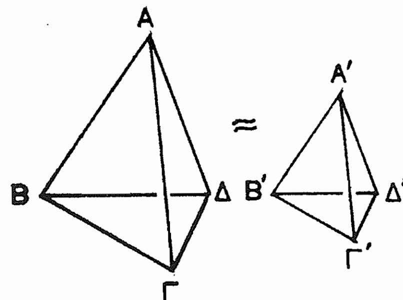
$$\frac{E_1}{E'_1} = \lambda^2, \frac{E_2}{E'_2} = \lambda^2, \ldots, \frac{E_\nu}{E'_\nu} = \lambda^2 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{E_1}{E'_1} = \frac{E_2}{E'_2} = \ldots = \frac{E_\nu}{E'_\nu} =$$

$$= \frac{E_1 + E_2 + \ldots + E_\nu}{E'_1 + E'_2 + \ldots + E'_\nu} = \frac{E}{E'},$$ ὅπου E καὶ E′ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν δύο πολυέδρων. Ἄρα εἶναι $\frac{E}{E'} = \lambda^2$.





Σχ. 524



Σχ. 525

533. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο ὁμοίων τετραέδρων ἰσοῦται πρὸς τὸν κύβον τοῦ λόγου ὁμοιότητος αὐτῶν.

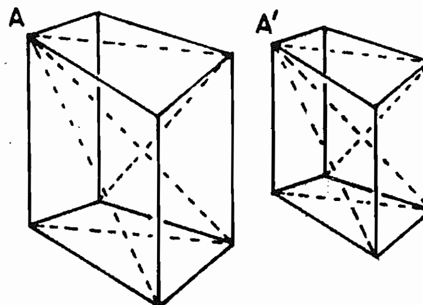
Ἀπόδειξις. Ἂς θεωρήσωμεν δύο ὅμοια τετράεδρα ΑΒΓΔ καὶ Α′Β′Γ′Δ′ (σχ. 525) καὶ ἔστω λ ὁ λόγος ὁμοιότητος αὐτῶν. Τότε θὰ εἶναι : $\frac{AB}{A'B'} =$

$= \dfrac{ΑΓ}{Α'Γ'} = \dfrac{ΑΔ}{Α'Δ'} = λ \Rightarrow ΑΒ = λΑ'Β',\ ΑΓ = λΑ'Γ',\ ΑΔ = λΑ'Δ'$. Ἐπειδὴ αἱ τρίεδροι γωνίαι $\widehat{Α}$ καὶ $\widehat{Α'}$ εἶναι ἴσαι, ἔπεται ὅτι (§ 527):

$$\frac{(ΑΒΓΔ)}{(Α'Β'Γ'Δ')} = \frac{ΑΒ \cdot ΑΓ \cdot ΑΔ}{Α'Β' \cdot Α'Γ' \cdot Α'Δ'} = \frac{λΑ'Β' \cdot λΑ'Γ' \cdot λΑ'Δ'}{Α'Β' \cdot Α'Γ' \cdot Α'Δ'} = λ^3.$$ Ἄρα

$$\frac{(ΑΒΓΔ)}{(Α'Β'Γ'Δ')} = λ^3.$$

534. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο ὁμοίων πολυέδρων ἰσοῦται πρὸς τὸν κύβον τοῦ λόγου ὁμοιότητος αὐτῶν.



Σχ. 526

Ἀπόδειξις. Ἂς θεωρήσωμεν δύο ὅμοια πολύεδρα (σχ. 526), τῶν ὁποίων οἱ ὄγκοι εἶναι V καὶ V'. Ἐκ δύο ὁμολόγων κορυφῶν Α καὶ Α' φέρομεν ἐπίπεδα καὶ διαιροῦμεν τὰ δύο στερεὰ εἰς ζεύγη ὁμοίων τετραέδρων μὲ τὸν αὐτὸν λόγον ὁμοιότητος λ, ἔστωσαν δὲ $V_1, V_2, \ldots, V_ν$ καὶ $V'_1, V_2', \ldots, V'_ν$ οἱ ὄγκοι αὐτῶν. Τότε θὰ εἶναι (§ 533):

$$\frac{V_1}{V'_1} = λ^3, \frac{V_2}{V'_2} = λ^3, \ldots, \frac{V_ν}{V'_ν} = λ^3 \Rightarrow λ^3 = \frac{V_1}{V'_1} = \frac{V_2}{V'_2} = \ldots = \frac{V_ν}{V'_ν} =$$

$$\frac{V_1 + V_2 + \ldots + V_ν}{V'_1 + V'_2 + \ldots + V'_ν} = \frac{V}{V'}.$$

Ἄρα εἶναι:

$$\frac{V}{V'} = λ^3.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

944. Δίδεται τετράεδρον ΑΒΓΔ καὶ ἔστωσαν Κ,Λ,Μ,Ν τὰ κέντρα βάρους τῶν ἑδρῶν του.

α) Δείξατε ὅτι ΑΒΓΔ $\approx$ ΚΛΜΝ.

β) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν καὶ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο τετραέδρων.

945. Δίδεται πυραμὶς Κ.ΑΒΓΔ. Τέμνομεν αὐτὴν δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν της καὶ διερχομένου ἀπὸ τὸ μέσον Α' τῆς ἀκμῆς ΚΑ.

α) Δείξατε ὅτι σχηματίζεται νέα πυραμὶς ὁμοία τῆς δοθείσης.

β) Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν καὶ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο πυραμίδων.

946. Ἡ βάσις πυραμίδος ἔχει ἐμβαδὸν $144cm^2$. Τέμνομεν μὲ ἐπίπεδον παράλληλον τῆς βάσεως εἰς ἀπόστασιν 4cm ἀπὸ τῆς κορυφῆς καὶ ἡ τομὴ ἔχει ἐμβαδὸν $64cm^2$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος.

947. Δύο ἰσοϋψεῖς πυραμίδες ἔχουν βάσεις 120cm² καὶ 180cm² ἀντιστοίχως. Τέμνομεν αὐτὰς δι' ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τὰς βάσεις των εἰς τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν ἀπ' αὐτῶν καὶ ἡ τομὴ τῆς πρώτης πυραμίδος εἶναι 70 cm². Νὰ εὑρεθῇ ἡ τομὴ τῆς δευτέρας πυραμίδος.

948. Δείξατε ὅτι οἱ κύβοι τῶν ἐπιφανειῶν δυο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι ὅπως τὰ τετράγωνα τῶν ὄγκων των.

Β'.

949. Δείξατε ὅτι τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν τετραέδρου εἶναι κορυφαὶ ὀκταέδρου τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ὄγκου τοῦ τετραέδρου.

950. Δίδεται πολύεδρον ΑΒΓ...Ν. Ἐπὶ τῶν ἡμιευθειῶν ΑΒ, ΑΓ,...,ΑΝ λαμβάνομεν σημεῖα Β', Γ',...,Ν' ἀντιστοίχως οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{AB'}{AB} = \frac{A\Gamma'}{A\Gamma} = \ldots = \frac{AN'}{AN} = \lambda$. Δείξατε ὅτι τὸ πολύεδρον ΑΒ'Γ'...Ν' εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ...Ν.

951. Δοθεῖσα κόλουρος πυραμὶς νὰ διαιρεθῇ δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις της εἰς δύο ὁμοίας κολούρους πυραμίδας.

952. Νὰ τμηθῇ πυραμὶς ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν οὕτως, ὥστε νὰ χωρισθῇ εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

953. Νὰ τμηθῇ πυραμὶς ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν οὕτως, ὥστε νὰ χωρισθῇ εἰς δύο στερεὰ μὲ δεδομένον λόγον μ/ν.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ

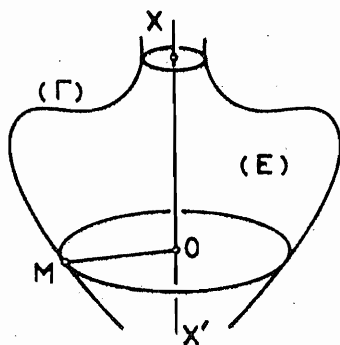
ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΙ ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΑ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

535. Ὁρισμοί.

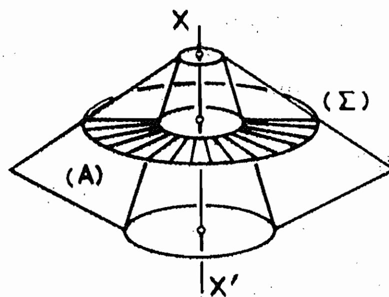
i) Κάθε γραμμὴ (Γ), περιστρεφομένη περὶ ἄξονα xx′ κατὰ μίαν πλήρη γωνίαν (360°), διαγράφει ἐπιφάνειαν Ε, ἡ ὁποία καλεῖται **ἐπιφένεια ἐκ περιστροφῆς** (σχ. 527).

ii) Κάθε σχῆμα (Α), στρεφόμενον περὶ ἄξονα xx′ κατὰ μίαν πλήρη γωνίαν, δημιουργεῖ στερεὸν (Σ), τὸ ὁποῖον καλεῖται **στερεὸν ἐκ περιστροφῆς** (σχ. 528).

Σημείωσις. Εἰς τὰ ἑπόμενα θὰ λέγωμεν χάριν συντομίας «σχῆμα στρέφεται περὶ ἄξονα» καὶ θὰ ἐννοοῦμεν «σχῆμα στρέφεται πλήρη στροφὴν περὶ ἄξονα».



Σχ. 527



Σχ. 528

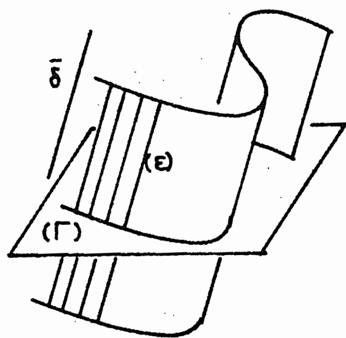
Πόρισμα Ι. Ἐκ τυχόντος σημείου Μ τῆς γραμμῆς (Γ) (σχ. 527) φέρομεν ΜΟ ⊥ xx′. Εἰς τὴν περιστροφὴν τὸ τμῆμα ΜΟ παραμένει σταθερὸν κατὰ μέγεθος, τὸ σημεῖον Ο σταθερὸν κατὰ θέσιν καὶ ἑπομένως τὸ σημεῖον Μ διαγράφει κύκλον (Ο,ΟΜ), τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα περιστροφῆς. Ἄρα ἡ **τομὴ ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα εἶναι κύκλος.**

Πόρισμα ΙΙ. Ἡ τομὴ στερεοῦ ἐκ περιστροφῆς, ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα περιστροφῆς (σχ. 528), εἶναι ἐν γένει κυκλικὸς δακτύλιος.

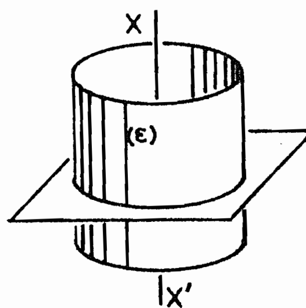
Πόρισμα ΙΙΙ. Κάθε ἐπιφάνεια ἢ κάθε στερεὸν ἐκ περιστροφῆς ἔχει ἄξονα συμμετρίας τὸν ἄξονα περιστροφῆς, ὁ ὁποῖος καλεῖται καὶ ἄξων τοῦ σχήματος.

ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

536. Γενική ἔννοια κυλινδρικῆς ἐπιφανείας. Κυλινδρική ἐπιφάνεια ἐν γένει καλεῖται κάθε εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια, τῆς ὁποίας ἡ εὐθεῖα (ε), ποὺ τὴν διαγράφει, παραμένει πάντοτε παράλληλος πρὸς δεδομένην διεύθυνσιν (δ) καὶ τέμνει σταθερὰν γραμμὴν (Γ) (σχ. 529). Ἡ γραμμὴ (Γ) καλεῖται **ὁδηγὸς** τῆς κινήσεως τῆς εὐθείας (ε). Ἡ κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ἐν γένει δὲν εἶναι ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια.



Σχ. 529



Σχ. 530

537. Ὀρθὴ κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια καλεῖται ἡ ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία διαγράφεται ἀπὸ εὐθεῖαν (ε), παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς xx' (σχ. 530).

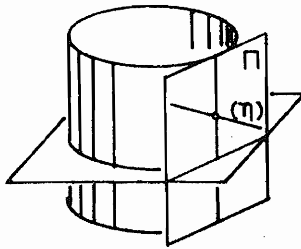
Αἱ διαδοχικαὶ θέσεις τῆς εὐθείας (ε) εἰς τὴν περιστροφὴν καλοῦνται **γενέτειραι** ἀκμαὶ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας καὶ εἶναι μεταξύ των παράλληλοι, ἐφ' ὅσον ἑκάστη εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς. Εἰς τὰ ἑπόμενα θὰ ἀσχοληθῶμεν μόνον μὲ ὀρθὰς κυλινδρικὰς ἐπιφανείας (ἐκ περιστροφῆς) καὶ ἐπομένως ὅταν θὰ λέγωμεν κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια, θὰ ἐννοοῦμεν ὀρθὴ κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς.

538. Ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον κυλινδρικῆς ἐπιφανείας καλεῖται κάθε ἐπίπεδον (Π), τὸ ὁποῖον ἔχει μετὰ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας κοινὴν μίαν μόνον γενέτειραν ἀκμὴν (σχ. 531). Κάθε εὐθεῖα (η) τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου (ἐξαιρέσει τῆς γενετείρας ἀκμῆς) καλεῖται ἐφαπτομένη εὐθεῖα τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας καὶ ἔχει ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν ἐπιφάνειαν.

539. Θεώρημα. Αἱ τομαὶ κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ὑπὸ ἐπιπέδων καθέτων πρὸς τὸν ἄξονα τῆς ἐπιφανείας εἶναι ἴσοι κύκλοι.

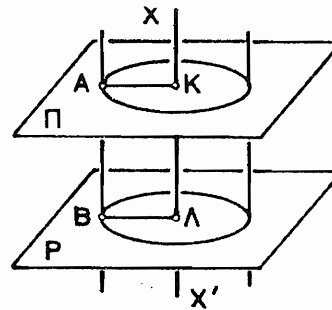
Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν δύο τομὰς μιᾶς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ὑπὸ ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) καθέτων πρὸς τὸν ἄξονα xx' τῆς ἐπιφανείας (σχ. 532). Αἱ τομαὶ εἶναι ὁπωσδήποτε κύκλοι, ἐφ' ὅσον ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἐκ περιστροφῆς (§ 535 πόρ. I) καὶ ἔστωσαν Κ καὶ Λ τὰ κέντρα των ἐπὶ τοῦ ἄξονος xx'. Μία γενέτειρα ἀκμὴ τέμνει τὰ ἐπίπεδα τομῆς εἰς τὰ Α καὶ Β. Τὸ τετράπλευρον

ΑΚΛΒ εἶναι ὀρθογώνιον, διότι ΑΒ // = ΚΛ καὶ ΚΛ ⊥ (Ρ). Ἄρα εἶναι ΚΑ = ΛΒ καὶ ἑπομένως οἱ δύο κύκλοι εἶναι ἴσοι.





Σχ. 531



Σχ. 532

540. Κύλινδρος. Ἐὰν κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ), καθέτων ἐπὶ τὸν ἄξονα xx′ (σχ. 532), τὸ ἀποκοπτόμενον στερεὸν μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων καλεῖται ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος.

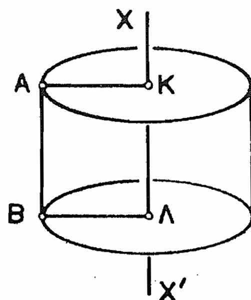
Οἱ ἴσοι κύκλοι, κατὰ τοὺς ὁποίους τὰ δύο ἐπίπεδα τέμνουν τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν, καλοῦνται **βάσεις** τοῦ κυλίνδρου καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο βάσεων καλεῖται **ὕψος** τοῦ στερεοῦ. Τὸ τμῆμα ΑΒ τῆς γενετείρας ἀκμῆς τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας καλεῖται γενέτειρα ἀκμὴ τοῦ κυλίνδρου. Ἡ γενέτειρα ἀκμὴ τοῦ κυλίνδρου, εἰς τὴν περιστροφήν της περὶ τὸν ἄξονα xx′, διαγράφει τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, ἡ ὁποία καλεῖται καὶ **κυρτὴ ἐπιφάνεια** τοῦ στερεοῦ.

Παρατήρησις. Ὡς ὁρισμὸν τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιοῦμεν καὶ τὴν ἀκόλουθον ἰσοδύναμον πρότασιν.

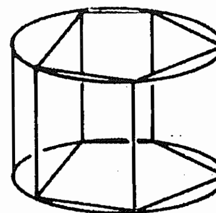
541. Ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος καλεῖται τὸ στερεὸν τὸ παραγόμενον ἀπὸ τὴν περιστροφὴν ὀρθογωνίου ΑΚΛΒ περὶ μίαν πλευράν του (σχ. 533). Εἰς τὰ ἑπόμενα ὁ ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος θὰ ἀναφέρεται ἁπλῶς ὡς κύλινδρος.

542. Ἐγγεγραμμένον καὶ περιγγεγραμμένον πρῖσμα εἰς κύλινδρον.

i) Ἓν πρῖσμα καλεῖται ἐγγεγραμμένον εἰς κύλινδρον (σχ. 534), ὅταν



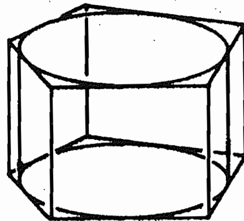
Σχ. 533



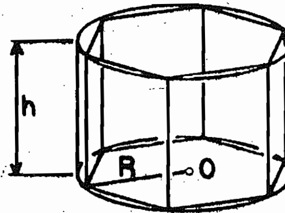
Σχ. 534

αἱ βάσεις του εἶναι πολύγωνα ἐγγεγραμμένα εἰς τοὺς κύκλους - βάσεις τοῦ κυλίνδρου. Αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ τοῦ πρίσματος εἶναι γενέτειραι ἀκμαὶ διὰ τὸν κύλινδρον.

ii) Ἓν πρῖσμα καλεῖται **περιγεγραμμένον** περὶ κύλινδρον (σχ. 535), ὅταν αἱ βάσεις του εἶναι πολύγωνα περιγεγραμμένα περὶ τοὺς κύκλους - βάσεις τοῦ κυλίνδρου. Αἱ παράπλευροι ἕδραι τοῦ πρίσματος εἶναι ἐφαπτόμεναι τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.



Σχ. 535



Σχ. 536

543. Μέτρησις κυλίνδρου. Ἂς θεωρήσωμεν ὀρθὸν κύλινδρον μὲ βάσιν κύκλον (O,R), ὕψος h καὶ ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτὸν κανονικὸν πρῖσμα (σχ. 536). Φανταζόμεθα τὸ πρῖσμα μεταβλητὸν οὕτως, ὥστε τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως αὐτοῦ, αὐξανόμενον συνεχῶς, νὰ τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον. Τότε τὸ πρῖσμα θὰ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ κυλίνδρου καὶ οἱ τύποι, ποὺ ἀφοροῦν εἰς τὰ πρίσματα, ἰσχύουν οὐσιαστικῶς καὶ διὰ τοὺς κυλίνδρους, μετασχηματιζόμενοι καταλλήλως.
Τότε :

i) Παράπλευρος ἐπιφάνεια ἢ κυρτὴ ἐπιφάνεια κυλίνδρου καλεῖται τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια μεταβλητοῦ κανονικοῦ πρίσματος μὲ ἀκτῖνα βάσεως R καὶ ὕψος h, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς του τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον.

Διὰ τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν ὀρθοῦ πρίσματος γνωρίζομε τὸν τύπον $E_\pi = P_\nu \cdot h$ (§ 518). Τότε ἡ κυρτὴ (παράπλευρος) ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται πρὸς $E_\kappa = \lim\limits_{\nu \to \infty} P_\nu \cdot h = 2\pi R h$ (περίμετρος βάσεως × ὕψος) ἤτοι εἶναι :

$$E_\kappa = 2\pi R h.$$

Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια εὑρίσκεται, ἐὰν εἰς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν προσθέσωμεν τὰς δύο βάσεις τοῦ κυλίνδρου, ἤτοι εἶναι :

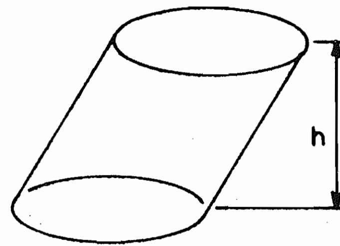
$$E_{o\lambda} = 2\pi R h + 2\pi R^2 = 2\pi R (h + R)$$

ii) Ὄγκος κυλίνδρου καλεῖται τὸ ὅριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ὁ ὄγκος μεταβλητοῦ κανονικοῦ πρίσματος μὲ ἀκτῖνα βάσεως R καὶ ὕψος h, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς του τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον.

Ὁ τύπος, ὁ ὁποῖος δίδει τὸν ὄγκον V κυλίνδρου, προέρχεται ἀπὸ τὸν τύπον $V = Bh$ τοῦ ὄγκου πρίσματος καὶ εἶναι : $V = \lim_{\nu \to \infty} E_\nu h = \pi R^2 h$, ὅπου E_ν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κανονικῆς βάσεως τοῦ ἐγγεγραμμένου πρίσματος. Ἄρα εἶναι :

$$V = \pi R^2 h.$$

Παρατήρησις. Ὁ προηγούμενος τύπος τοῦ ὄγκου ἰσχύει καὶ διὰ τοὺς πλαγίους κυκλικοὺς κυλίνδρους (σχ. 537), ἤτοι κυλίνδρους μὲ τὰς γενετείρας ἀκμάς των πλαγίας, ὡς πρὸς τὰς κυκλικὰς βάσεις των. Γενικῶς ἰσχύει ὁ τύπος **«Ὄγκος = Βάσις × Ὕψος»** διὰ κάθε κύλινδρον (ὀρθὸν ἢ πλάγιον), τοῦ ὁποίου ἡ βάσις δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην κύκλος καὶ τοῦτο, διότι δυνάμεθα, ὡς καὶ προηγουμένως, νὰ θεωρήσωμεν ὅτι ὁ κάθε κύλινδρος προέρχεται ἀπὸ κάποιο μεταβλητὸ ἐγγεγραμμένο πρῖσμα, ὅπου τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν του τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον, ταυτοχρόνως δὲ ἡ κάθε πλευρά του τείνει εἰς τὸ μηδέν.



Σχ. 537

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

954. Ἐὰν δύο ὀρθοὶ κύλινδροι ἔχουν ἴσας βάσεις, δείξατε ὅτι ὁ λόγος τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν των ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ὑψῶν των.

955. Ἐὰν δύο ὀρθοὶ κύλινδροι ἔχουν ἴσα ὕψη, δείξατε ὅτι ὁ λόγος τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν των εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων.

956. Ἡ περίμετρος τῆς βάσεως ὀρθοῦ κυλίνδρου εἶναι 31,4 cm καὶ τὸ ὕψος του 6 cm. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος του.

957. Ὀρθοῦ κυλίνδρου ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια εἶναι τριπλασία τῆς βάσεως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος του, ἐὰν ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι 4 cm.

958. Ἡ διάμετρος τῆς βάσεως ὀρθοῦ κυλίνδρου εἶναι 10 cm καὶ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ εἶναι 125,6 cm². Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος του.

959. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος ὀρθοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται πρὸς τὸ 1/2 τοῦ γινομένου τῆς ἀκτῖνος του ἐπὶ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειάν του.

960. Ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ διαστάσεων ΑΒ = 4α καὶ ΑΔ = 3α στρέφεται περὶ τὴν ΑΒ. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν του ΔΑ καὶ ΓΒ λαμβάνομεν τμήματα ΔΕ = ΓΖ = α. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, τοῦ διαγραφομένου ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον ΓΔΕΖ.

Β΄.

961. Ὁ ὄγκος κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος εἶναι $6\sqrt{3}$ cm³. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὸ κυλίνδρου.

962. Δίδεται κανονικὸν τετραγωνικὸν πρῖσμα μὲ ἀκμὴν βάσεως α καὶ ὕψος 2α. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τοῦ εἰς αὐτὸ α) ἐγγεγραμμένου κυλίνδρου, β) περιγεγραμμένου κυλίνδρου.

963. Ὀρθογωνίου αἱ διαστάσεις εἶναι α καὶ β μὲ $\alpha < \beta$. Περὶ ποίαν τῶν πλευρῶν του πρέπει νὰ στραφῇ τὸ ὀρθογώνιον ὥστε ὁ προκύπτων κύλινδρος νὰ ἔχῃ α) τὴν μεγαλυτέραν ἐπιφάνειαν, β) τὸν μεγαλύτερον ὄγκον.

964. Ἐὰν κύλινδρος τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου, παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα αὐτοῦ, δείξατε ὅτι ἡ τομὴ εἶναι ὀρθογώνιον.

965. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐπίπεδα συμμετρίας ἑνὸς ὀρθοῦ κυλίνδρου καὶ τὸ κέντρον συμμετρίας αὐτοῦ.

966. Διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ κυλίνδρου φέρομεν δύο ἡμιεπίπεδα σχηματίζοντα γωνίαν 60^o. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο στερεῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ὁ κύλινδρος.

967. Δίδεται ὀρθὸς κύλινδρος μὲ βάσιν κύκλον ἀκτῖνος R καὶ ὕψος h. Φέρομεν χορδὴν AB τῆς βάσεως ἴσην πρὸς τὴν πλευρὰν ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ διὰ τῆς AB ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν καὶ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο στερεῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ὁ κύλινδρος.

968. **Χορδὴ κυλινδρικῆς ἐπιφανείας** καλεῖται ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα μὲ τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας. Δείξατε ὅτι ἡ κοινὴ κάθετος τοῦ ἄξονος μιᾶς ὀρθῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας καὶ μιᾶς χορδῆς της διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς χορδῆς.

969. Ὀρθογώνιον στρέφεται περὶ ἄξονα τοῦ ἐπιπέδου του, παράλληλον μιᾶς πλευρᾶς του καὶ μὴ τέμνοντα τὸ ὀρθογώνιον. Δείξατε ὅτι α) Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ παραγομένου στερεοῦ ἰσοῦται πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ ὀρθογωνίου ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ κύκλου, τὸν ὁποῖον διαγράφει τὸ κέντρον τοῦ ὀρθογωνίου. β) Ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ κύκλου, τὸν ὁποῖον διαγράφει τὸ κέντρον τοῦ ὀρθογωνίου.

970. Δίδονται τρία ἐπίπεδα (Π), (Ρ), (Σ), τεμνόμενα ἀνὰ δύο καὶ παράλληλα πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (δ). Δείξατε ὅτι ὑπάρχουν τέσσαρες ὀρθαὶ κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἐφάπτεται καὶ εἰς τὰ τρία ἐπίπεδα.

971. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις ἀπὸ δοθεῖσαν εὐθεῖαν (ε) εἶναι α.

972. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν εὐθειῶν σταθερᾶς διευθύνσεως καὶ ἐφαπτομένων, δοθείσης ὀρθῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.

973. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς δύο εὐθείας εἶναι κ/λ.

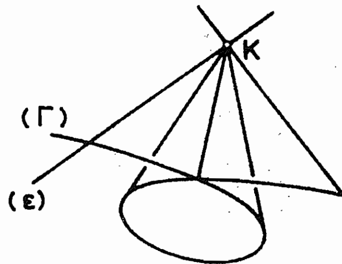
974. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς παραλλήλους εἶναι σταθερόν.

ΚΩΝΟΣ

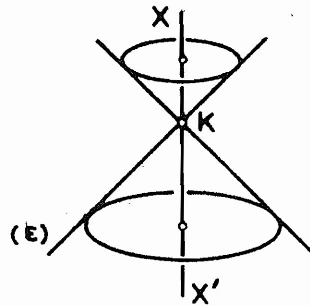
544. Γενικὴ ἔννοια κωνικῆς ἐπιφανείας. Κωνικὴ ἐπιφάνεια ἐν γένει καλεῖται κάθε εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια, ὅπου ἡ εὐθεῖα (ε), ποὺ τὴν διαγράφει, διέρχεται πάντοτε διὰ σταθεροῦ σημείου Κ καὶ τέμνει σταθερὰν γραμμὴν (Γ) (σχ. 538). Τὸ σημεῖον Κ καλεῖται **κορυφὴ** τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ ἡ γραμμὴ (Γ) **ὁδηγὸς** τῆς κινήσεως τῆς εὐθείας (ε). Ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἐν γένει, δὲν εἶναι ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια.

545. Ὀρθὴ κωνικὴ ἐπιφάνεια καλεῖται ἡ ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια ἡ διαγραφομένη ἀπὸ εὐθεῖαν (ε), τέμνουσαν τὸν ἄξονα περιστροφῆς xx′ εἰς σημεῖον Κ (σχ. 539).

Τὸ σημεῖον Κ καλεῖται **κορυφὴ** τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ αἱ διαδοχικαὶ θέσεις τῆς εὐθείας (ε) εἰς τὴν περιστροφήν της καλοῦνται **γενέτειραι ἀκμαὶ** τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. Εἰς τὰ ἑπόμενα θὰ ἀσχοληθῶμεν μόνον μὲ τὰς ὀρθὰς κωνικὰς ἐπιφανείας (ἐκ περιστροφῆς).

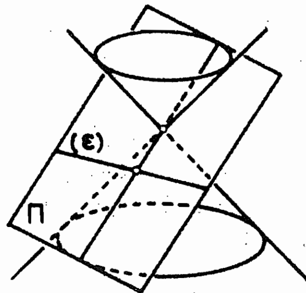


Σχ. 538

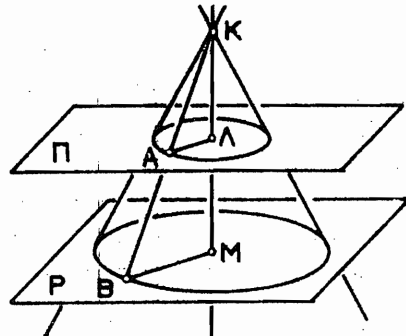


Σχ. 539

546. Ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον κωνικῆς ἐπιφανείας καλεῖται κάθε ἐπίπεδον (Π), τὸ ὁποῖον ἔχει μετὰ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας κοινὴν μίαν μόνον γενέτειραν ἀκμὴν (σχ. 540). Κάθε εὐθεῖα (ε) τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου (ἐξαιρέσει τῆς γενετείρας ἀκμῆς) ἔχει ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ καλεῖται **ἐφαπτομένη** εὐθεῖα τῆς ἐπιφανείας.



Σχ. 540

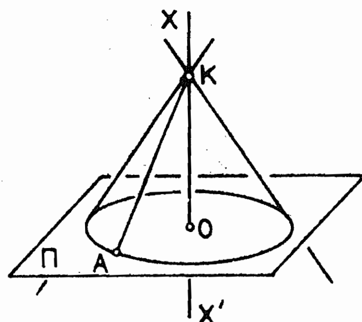


Σχ. 541

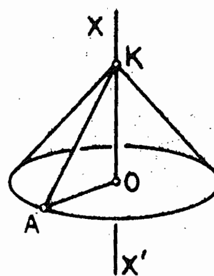
547. Θεώρημα. Αἱ τομαὶ κωνικῆς ἐπιφανείας ὑπὸ ἐπιπέδων καθέτων πρὸς τὸν ἄξονά της εἶναι κύκλοι καὶ ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων των εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀποστάσεών των ἀπὸ τὴν κορυφήν.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν δύο τομὰς μιᾶς κωνικῆς ἐπιφανείας ὑπὸ ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) καθέτων πρὸς τὸν ἄξονα xx' τῆς ἐπιφανείας (σχ. 541). Αἱ τομαὶ εἶναι ὁπωσδήποτε κύκλοι, ἐφ' ὅσον ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἐκ περιστροφῆς (§ 535) καὶ ἔστωσαν Λ καὶ Μ τὰ κέντρα των ἐπὶ τοῦ ἄξονος xx'. Μία γενέτειρα ἀκμὴ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τέμνει τὰ ἐπίπεδα τομῆς εἰς τὰ Α καὶ Β. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΚΛΑ καὶ ΚΜΒ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν κοινὴν τὴν γωνίαν των εἰς τὸ Κ. Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν : $\frac{ΛΑ}{ΜΒ} = \frac{ΚΛ}{ΚΜ} = \frac{ΚΑ}{ΚΒ}$.

548. 'Ορθὸς κυκλικὸς κῶνος. **'Εὰν κωνικὴ ἐπιφάνεια τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου (Π) καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα αὐτῆς xx′ (σχ. 542), τὸ στερεὸν τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῆς κορυφῆς Κ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ τῆς ἐπιπέδου τομῆς καλεῖται κῶνος.**



Σχ. 542



Σχ. 543

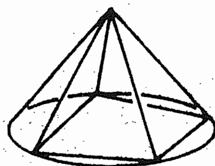
'Ο κύκλος, κατὰ τὸν ὁποῖον τέμνεται ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια καλεῖται **βάσις** τοῦ κώνου καὶ ἡ ἀπόστασις ΚΟ τῆς κορυφῆς Κ ἀπὸ τὴν βάσιν καλεῖται **ὕψος** τοῦ στερεοῦ. Γενέτειρα ἀκμὴ τοῦ κώνου καλεῖται τὸ τμῆμα ΚΑ ἀπὸ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου ἕως τὸν κύκλον τῆς βάσεως. 'Η Γενέτειρα ἀκμὴ ΚΑ τοῦ κώνου, εἰς τὴν περιστροφήν της περὶ τὸν ἄξονα xx′, διαγράφει τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου, ἡ ὁποία καλεῖται καὶ **κυρτὴ ἐπιφάνεια** τοῦ στερεοῦ. Εἰς τὰ ἑπόμενα θὰ ἀσχοληθῶμεν μόνον μὲ ὀρθοὺς κυκλικοὺς κώνους καὶ θὰ τοὺς ἀναφέρωμεν ἁπλῶς ὡς κώνους.

Παρατήρησις. 'Ως ὁρισμὸν τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν καὶ τὴν ἀκόλουθον ἰσοδύναμον πρότασιν : **Κῶνος καλεῖται τὸ στερεὸν τὸ παραγόμενον ἀπὸ τὴν περιστροφὴν ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΚΑ περὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν του (σχ. 543).**

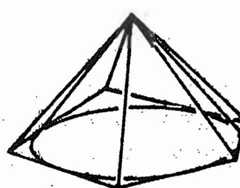
549. 'Εγγεγραμμένη καὶ περιγεγραμμένη πυραμὶς εἰς κῶνον.

i) Μία πυραμὶς καλεῖται **ἐγγεγραμμένη** εἰς κῶνον (σχ. 544), ὅταν τὰ δύο στερεὰ ἔχουν κοινὴν κορυφὴν καὶ ἡ βάσις τῆς πυραμίδος εἶναι πολύγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον - βάσιν τοῦ κώνου. Αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ τῆς πυραμίδος εἶναι γενέτειραι ἀκμαὶ διὰ τὸν κῶνον.

ii) Μία πυραμὶς καλεῖται **περιγεγραμμένη** περὶ κῶνον (σχ. 545), ὅταν



Σχ. 544



Σχ. 545

τὰ δύο στερεὰ ἔχουν κοινὴν κορυφὴν καὶ ἡ βάσις τῆς πυραμίδος εἶναι πολύγωνον περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον - βάσιν τοῦ κώνου. Αἱ παράπλευροι ἕδραι τῆς πυραμίδος εἶναι ἐφαπτόμεναι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας.

550. Μέτρησις τοῦ κώνου. Ἂς θεωρήσωμεν κῶνον ἐκ περιστροφῆς μὲ βάσιν κύκλον (O, R), ὕψος h, γενέτειραν ἀκμὴν λ καὶ ἐγγεγραμμένην εἰς αὐτὸν κανονικὴν πυραμίδα (σχ. 546). Φανταζόμεθα τὴν πυραμίδα μεταβλητὴν εἰς τρόπον, ὥστε τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς της νὰ τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον. Τότε ἡ μεταβλητὴ πυραμὶς τείνει νὰ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ κώνου καὶ οἱ τύποι, ποὺ ἀφοροῦν εἰς τὰς πυραμίδας, ἰσχύουν οὐσιαστικῶς καὶ διὰ τοὺς κώνους, μετασχηματιζόμενοι καταλλήλως.

Οὕτω :

i) Παράπλευρος ἐπιφάνεια ἢ κυρτὴ ἐπιφάνεια κώνου ἐκ περιστροφῆς καλεῖται τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια μεταβλητῆς κανονικῆς πυραμίδος μὲ ἀκτῖνα βάσεως R καὶ παράπλευρον ἀκμὴν λ, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς της τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον.

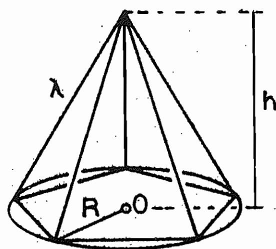
Διὰ τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν κανονικῆς πυραμίδος, γνωρίζομεν τὸν τύπον $E_\pi = \frac{P_\nu \upsilon}{2}$ (§ 515), ὅπου P_ν ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως καὶ υ τὸ παράπλευρον ὕψος. Τότε ἡ κυρτὴ (παράπλευρος) ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἰσοῦται πρός : $E_\kappa = \lim_{\nu \to \infty} \frac{P_\nu \upsilon}{2} = \frac{2\pi R\lambda}{2} = \pi R\lambda$, ἤτοι εἶναι :

$$\mathbf{E_\kappa = \pi R\lambda}$$

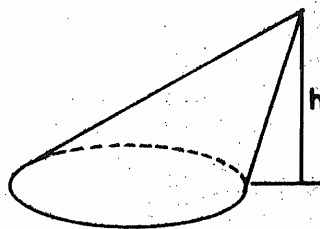
Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια εὑρίσκεται, ἐὰν εἰς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν προσθέσωμεν τὴν βάσιν τοῦ κώνου, ἤτοι εἶναι :

$$\mathbf{E_{o\lambda} = \pi R\lambda + \pi R^2 = \pi R(\lambda + R)}$$

ii) Ὄγκος κώνου καλεῖται τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ὁ ὄγκος μεταβλητῆς κανονικῆς πυραμίδος μὲ ἀκτῖνα βάσεως R καὶ ὕψος h, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς της τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον.



Σχ. 546



Σχ. 547

Ὁ τύπος, ὁ ὁποῖος δίδει τὸν ὄγκον V τοῦ κώνου, προέρχεται ἀπὸ τὸν τύπον $V = \frac{1}{3}Bh$ τοῦ ὄγκου τῆς πυραμίδος καὶ εἶναι : $V = \lim_{\nu \to \infty} \frac{1}{3} E_\nu h = \frac{1}{3}\pi R^2 h$, ὅπου E_ν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κανονικῆς βάσεως τῆς ἐγγεγραμμένης πυραμίδος. Ἄρα εἶναι :

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

Παρατήρησις. Ὁ προηγούμενος τύπος ὄγκου ἰσχύει καὶ διὰ τοὺς πλαγίους κώνους (σχ. 547) καὶ γενικῶς ἰσχύει ὁ τύπος «Ὄγκος = $\frac{1}{3}$ [Βάσις × Ὕψος]» διὰ τοὺς τυχαίους κώνους, δηλαδὴ κώνους, τῶν ὁποίων ἡ βάσις δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην κύκλος. Ἡ ἀπόδειξις γίνεται μὲ τὴν ἰδίαν διαδικασίαν τῆς ἐγγεγραμμένης πυραμίδος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

+ **975.** **Ἰσόπλευρος κῶνος** καλεῖται ὁ κῶνος, ποὺ παράγεται ἀπὸ τὴν περιστροφὴν ἰσοπλεύρου τριγώνου περὶ ἓν ὕψος του. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος ἰσοπλεύρου κώνου, ἐκ τῆς πλευρᾶς α τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἐκ τοῦ ὁποίου παρήχθη.

976. Ἰσοπλεύρου κώνου μὲ ἐπιφάνειαν $E = 3\pi\alpha^2$ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μεσαία τομή.

++ **977.** Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος κώνου, τοῦ ὁποίου ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια εἶναι 20π cm² καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως αὐτοῦ εἶναι 4 cm.

978. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια κώνου, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος εἶναι 72π cm³ καὶ τὸ ὕψος του 8 cm.

++ **979.** Δίδεται κανονικὴ ἑξαγωνικὴ πυραμὶς μὲ πλευρὰν βάσεως 5α καὶ ὕψος 12α. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καὶ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου κώνου.

980. **Ὅμοιοι κῶνοι** καλοῦνται δύο κῶνοι παραγόμενοι ἀπὸ τὴν περιστροφὴν δύο ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων περὶ μίαν τῶν ὁμολόγων καθέτων πλευρῶν των ἀντιστοίχως. Λόγος ὁμοιότητος καλεῖται ὁ λόγος δύο ἀντιστοίχων γραμμικῶν στοιχείων των. Δείξατε ὅτι ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν δύο ὁμοίων κώνων ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου ὁμοιότητος αὐτῶν.

981. Δείξατε ὅτι ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο ὁμοίων κώνων ἰσοῦται πρὸς τὴν κύβον τοῦ λόγου ὁμοιότητος αὐτῶν.

+ **982.** Δίδεται κανονικὴ τετραγωνικὴ πυραμὶς μὲ ὄγκον 6 cm³. Νὰ ὑπολογισθῇ i) ὁ ὄγκος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὴν κώνου ii) ὁ ὄγκος τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν κώνου.

983. Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια κώνου εἶναι 24π cm² καὶ τὸ ὕψος του h = 4 cm. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος του.

984. Δίδεται κῶνος καὶ ζητεῖται νὰ χωρισθῇ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνειά του εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν του.

985. Ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ μὲ ΑΒ = ΑΓ = α καὶ $\widehat{A} = 120^0$ στρέφεται περὶ τὴν ΑΒ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

986. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος κώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ 1/3 τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου τῆς βάσεώς του ἀπὸ μίαν γενέτειραν ἀκμήν.

Β΄.

987. Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια κώνου εἶναι $E = \pi(33 + 7\sqrt{33})\text{cm}^2$ καὶ ὁ ὄγκος του $V = 44\pi\ \text{cm}^3$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γενέτειρα ἀκμὴ καὶ τὸ ὕψος τοῦ κώνου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἐκφράζονται ὑπὸ ἀκεραίων ἀριθμῶν.

988. Ὀρθογώνιον τρίγωνον στρέφεται διαδοχικῶς περὶ τὰς τρεῖς πλευράς του. Ἐὰν V_1, V_2 εἶναι οἱ ὄγκοι οἱ παραγόμενοι διὰ τῆς περιστροφῆς του περὶ τὰς καθέτους πλευράς του καὶ V εἶναι ὁ ὄγκος ὁ παραγόμενος διὰ τῆς περιστροφῆς του περὶ τὴν ὑποτείνουσαν, δείξατε ὅτι : $\frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2} = \frac{1}{V^2}$.

989. Περὶ δοθεῖσαν τρίεδρον στερεὰν γωνίαν νὰ περιγραφῇ κωνικὴ ἐπιφάνεια (ἐκ περιστροφῆς).

990. Εἰς δοθεῖσαν τρίεδρον στερεὰν γωνίαν νὰ ἐγγραφῇ κωνικὴ ἐπιφάνεια (ἐκ περιστροφῆς).

991. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος κώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐκ τοῦ ὁποίου παράγεται, ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ κύκλου, τὸν ὁποῖον διαγράφει τὸ κ. βάρος αὐτοῦ.

992. Δίδεται κῶνος μὲ ἀκτῖνα βάσεως R καὶ ὕψος h. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις δύο παραλλήλων πρὸς τὴν βάσιν ἐπιπέδων, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν διαιρεῖ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη καὶ τὸ ἄλλο διαιρεῖ τὸν ὄγκον τοῦ κώνου εἰς δύο ἴσους ὄγκους.

993. Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια δοθέντος κώνου νὰ διαιρεθῇ δι᾽ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν του εἰς δύο τμήματα μὲ λόγον μ/ν.

994. Δοθεὶς κῶνος νὰ διαιρεθῇ δι᾽ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν του, εἰς δύο τμήματα, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ὄγκων νὰ εἶναι μ/ν.

995. Δίδεται κῶνος μὲ κορυφὴν Κ καὶ εἰς τὴν βάσιν του φέρομεν χορδὴν ΑΒ ἴσην πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν κανονικοῦ τριγώνου. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν στερεῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ὁ κῶνος ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΚΑΒ.

ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΚΩΝΟΣ

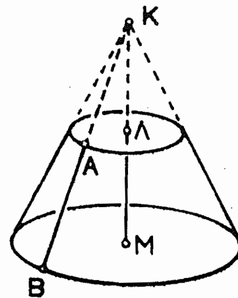
551. Ὁρισμός. Κόλουρος κῶνος καλεῖται τὸ τμῆμα ἑνὸς κώνου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ μιᾶς παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν τομῆς τοῦ κώνου.

Οἱ δύο παράλληλοι κύκλοι τοῦ κολούρου κώνου καλοῦνται **βάσεις** αὐτοῦ καὶ ἡ ἀπόστασίς των καλεῖται **ὕψος** τοῦ στερεοῦ (σχ. 548).

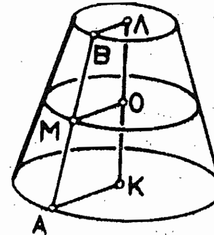
Γενέτειρα ἀκμὴ καλεῖται τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του, τὸ ὁποῖον προεκτεινόμενον, διέρχεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Κ τοῦ κώνου, ἀπὸ τὸν ὁποῖον προῆλθεν ὁ κόλουρος κῶνος.

Μεσαία τομὴ κολούρου κώνου καλεῖται ἡ τομὴ τοῦ στερεοῦ δι᾽ ἐπιπέδου

παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις, τὸ ὁποῖον διχοτομεῖ τὸ ὕψος του (σχ. 549). Ἡ μεσαία τομὴ εἶναι κύκλος, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς ΟΜ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἀκτίνων ΚΑ καὶ ΛΒ τῶν βάσεων τοῦ κολούρου κώνου, ὡς προκύπτει ἀπὸ τὸ τραπέζιον ΑΒΛΚ μὲ διάμεσον τὴν ΟΜ.



Σχ. 548

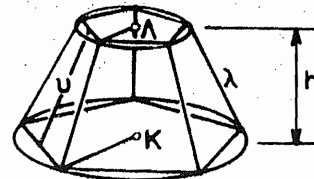


Σχ. 549

Παρατήρησις. Ὡς ὁρισμὸν τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κολούρου κώνου δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν καὶ τὴν ἑξῆς ἰσοδύναμον πρότασιν.

Κόλουρος κῶνος καλεῖται τὸ στερεὸν τὸ παραγόμενον ἀπὸ τὴν περιστροφὴν ὀρθογωνίου τραπεζίου ΑΒΛΚ, στρεφομένου περὶ τὴν πλευρὰν ΚΛ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς βάσεις (σχ. 549).

552. Μέτρησις κολούρου κώνου. Ἄς θεωρήσωμεν κόλουρον κῶνον ἐκ περιστροφῆς μὲ βάσεις κύκλους (K, R), (Λ, ρ) ὕψος h καὶ γενέτειραν ἀκμὴν λ (σχ. 550). Ἐγγράφομεν εἰς αὐτὸν κανονικὴν κόλουρον πυραμίδα, τὴν ὁποίαν ὅμως θεωροῦμεν μεταβλητὴν οὕτως, ὥστε τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῶν βάσεών της νὰ τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον. Τότε ἡ κόλουρος πυραμὶς τείνει νὰ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ κολούρου κώνου καὶ ἑπομένως οἱ τύποι, ποὺ ἀφοροῦν εἰς τὰς κολούρους πυραμίδας, ἰσχύουν καὶ διὰ τοὺς κολούρους κώνους, μετασχηματιζόμενοι καταλλήλως.



Σχ. 550

i) Παράπλευρος ἐπιφάνεια ἢ κυρτὴ ἐπιφάνεια κολούρου κώνου ἐκ περιστροφῆς καλεῖται τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια μεταβλητῆς κανονικῆς κολούρου πυραμίδος μὲ ἀκτῖνας βάσεων R, ρ καὶ παράπλευρον ἀκμὴν λ, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῶν βάσεών της τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον.

Διὰ τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τῆς κανονικῆς κολούρου πυραμίδος, γνωρίζομεν τὸν τύπον $E_\pi = \frac{P_\nu + p_\nu}{2} \upsilon$ (§ 516), ὅπου P_ν, p_ν αἱ περίμετροι τῶν βάσεων αὐτῆς καὶ υ τὸ παράπλευρον ὕψος. Τότε ἡ κυρτὴ (παράπλευρος)

επιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου ἰσοῦται πρός : $E_{\kappa} = \lim_{\nu \to \infty} \frac{P_{\nu} + p_{\nu}}{2} \upsilon = \frac{2\pi R + 2\pi\rho}{2} \lambda = \pi(R + \rho)\lambda$, ἤτοι εἶναι :

$$E_{\kappa} = \pi(R + \rho)\lambda.$$

Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια εὑρίσκεται, ἐὰν εἰς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν προσθέσωμεν τὰς δύο βάσεις τοῦ κολούρου κώνου, ἤτοι εἶναι :

$$E_{o\lambda} = \pi(R + \rho)\lambda + \pi R^2 + \pi\rho^2.$$

ii) Ὄγκος κολούρου κώνου ἐκ περιστροφῆς καλεῖται τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ὁ ὄγκος μεταβλητῆς κανονικῆς κολούρου πυραμίδος μὲ ἀκτῖνας βάσεων R, ρ καὶ ὕψος h, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῶν βάσεών της τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον.

Ὁ τύπος τοῦ ὄγκου τοῦ κολούρου κώνου προέρχεται ἀπὸ τὸν τύπον $V = \frac{1}{3}(B + \sqrt{B\beta} + \beta)h$ τοῦ ὄγκου κολούρου πυραμίδος, ὡς ἑξῆς :

$V = \lim_{\nu \to \infty} \frac{1}{3}(E_{\nu} + \sqrt{E_{\nu}\varepsilon_{\nu}} + \varepsilon_{\nu})h = \frac{1}{3}(\pi R^2 + \sqrt{\pi R^2 \pi\rho^2} + \pi\rho^2)h = \frac{\pi}{3}(R^2 + R\rho + \rho^2)h$, ὅπου E_{ν} καὶ ε_{ν} τὰ ἐμβαδὰ τῶν κανονικῶν βάσεων τῆς ἐγγεγραμμένης κολούρου πυραμίδος. Ἄρα εἶναι :

$$V = \frac{\pi}{3}(R^2 + R\rho + \rho^2)h.$$

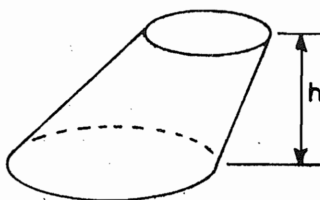
Παρατήρησις. Ὁ προηγούμενος τύπος τοῦ ὄγκου ἰσχύει καὶ διὰ τοὺς πλαγίους κυκλικοὺς κολούρους κώνους (σχ. 551). Γενικῶς δι' ὅλους τοὺς κολούρους κώνους ἰσχύει ὁ τύπος $V = \frac{1}{3}(B + \sqrt{B\beta} + \beta)h$. Ἡ ἀπόδειξις γίνεται μὲ τὴν αὐτὴν διαδικασίαν τῆς ἐγγεγραμμένης κολούρου πυραμίδος.

Πόρισμα I. Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια $E_{\kappa} = \pi(R + \rho)\lambda$ κολούρου κώνου μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς :

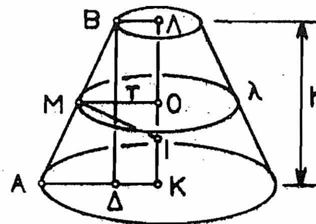
$$E_{\kappa} = 2\pi r\lambda$$

ὅπου r ἡ ἀκτὶς τῆς μεσαίας τομῆς.

Τοῦτο εἶναι προφανές, διότι $R + \rho = 2r$, ὡς προκύπτει ἀπὸ τὸ τραπέζιον ΑΒΛΚ (σχ. 552).



Σχ. 551



Σχ. 552

Πόρισμα II. Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια $E_x = 2\pi r\lambda$ κολούρου κώνου μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς :

$$E_x = 2\pi MI\cdot h$$

ὅπου MI τὸ μεσοκάθετον τμῆμα τῆς γενετείρας AB μέχρι τοῦ ἄξονος.

Τοῦτο ἕπεται ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων MOI καὶ ΒΔΑ (ΒΔ ⊥ ΚΑ), ἐκ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν : $\frac{MO}{MI} = \frac{B\Delta}{BA} \Rightarrow \frac{r}{MI} = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow$ $r\lambda = MI\cdot h$. Τότε ὁ προηγούμενος τύπος $E_x = 2\pi r\lambda$ μετασχηματίζεται εἰς τὸν $E_x = 2\pi\cdot MI\cdot h$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

996. Κολούρου κώνου αἱ βάσεις εἶναι περιγεγραμμέναι περὶ κανονικὰ ἑξάγωνα μὲ πλευρὰς 2 cm, 10 cm ἀντιστοίχως καὶ τὸ ὕψος του εἶναι 15 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου.

997. Κόλουρος κῶνος ἔχει ὄγκον $V = 700\pi\alpha^3$, ὕψος $h = 12\alpha$ καὶ ἡ μία ἀκτίς του εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνειά του.

998. Δοχεῖον σχήματος κολούρου κώνου, μὲ κάτω βάσιν ἐσωτερικῆς διαμέτρου 20 cm, ἄνω βάσιν ἐσωτερικῆς διαμέτρου 40 cm καὶ γενέτειραν ἀκμὴν 26 cm, πληροῦται διὰ πετρελαίου μέχρις ὕψους 5 cm ἀπὸ τῆς ἄνω βάσεως. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ περιεχομένου πετρελαίου εἰς λίτρα καὶ τὸ βάρος του (εἰδ. βάρος πετρελαίου 0,8).

999. Δίδεται κύκλος (O,R) καὶ εὐθεῖα (ε) ἐφαπτομένη αὐτοῦ. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν διάμετρον ΚΛ καὶ περιστρέφομεν τὸ σχῆμα περὶ τὴν εὐθεῖαν (ε). Δείξατε ὅτι ἡ ἐπιφάνεια, τὴν ὁποίαν διαγράφει ἡ διάμετρος ΚΛ εἶναι σταθερά.

1000. Κόλουρος κῶνος ἔχει βάσεις μὲ ἀκτῖνας ρ καὶ 3ρ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν καὶ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο κολούρων κώνων, εἰς τοὺς ὁποίους διαιρεῖται ὁ δοθεὶς κόλουρος κῶνος ὑπὸ τῆς μεσαίας τομῆς του.

1001. Κανονικὸν ἑξάγωνον στρέφεται περὶ ἕνα ἄξονα συμμετρίας του. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ (δύο περιπτώσεις).

1002. Ἰσοσκελὲς τραπέζιον μὲ βάσεις α, 2α καὶ ὕψος $\alpha\frac{\sqrt{3}}{2}$ στρέφεται διαδοχικῶς περὶ τὰς βάσεις του. i) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν δύο παραγομένων στερεῶν καὶ νὰ γίνῃ σύγκρισις αὐτῶν ii) Ὁμοίως διὰ τοὺς ὄγκους.

1003. Τὸ αὐτὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως στρέφεται περὶ μίαν τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

1004. Δίδεται ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ καὶ ἔστω Κ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΓΔ. Φέρομεν τὰς ΚΑ, ΚΒ καὶ ΚΟ ⊥ ΑΒ. Τὸ σχῆμα στρέφεται περὶ τὸν ἄξονα συμμετρίας του ΚΟ καὶ τὸ μὲν ὀρθογώνιον διαγράφει κύλινδρον, τὸ δὲ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΚΑΒ διαγράφει κῶνον, ὁ ὁποῖος καλεῖται **ἐγγεγραμμένος** εἰς τὸν κύλινδρον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο στερεῶν i) ἐὰν τὸ ὀρθογώνιον εἶναι τετράγωνον, ii) ἐὰν εἶναι $\frac{AB}{A\Delta} = \frac{3}{2}$.

1005. Δίδεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΚΑΒ (ΚΑ = ΚΒ). Ἐγγράφομεν εἰς αὐτὸ ὀρθογώνιον ΓΔΕΖ μὲ τὴν ΕΖ ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ φέρομεν ΚΟ ⊥ ΑΒ. Τὸ σχῆμα στρέφεται περὶ τὸν

ἄξονα συμμετρίας του ΚΟ καὶ τὸ μὲν τρίγωνον διαγράφει κῶνον, τὸ δὲ ὀρθογώνιον διαγράφει κύλινδρον, ὁ ὁποῖος καλεῖται **ἐγγεγραμμένος** εἰς τὸν κῶνον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο στερεῶν, ἐὰν τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον καὶ τὸ ὀρθογώνιον εἶναι τετράγωνον.

Β΄.

1006. Κόλουρος κῶνος ἔχει ὄγκον $V = 124\pi\alpha^3$, ὕψος $h = 4\alpha$ καὶ κυρτὴν ἐπιφάνειαν $E = 55\pi\alpha^2$. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκτῖνες του.

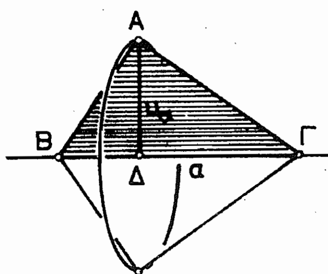
1007. Δίδεται κόλουρος κῶνος μὲ στοιχεῖα R, ρ, h. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἐκ τῆς μεγαλυτέρας βάσεως πρέπει νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδος τομὴ παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις οὕτως, ὥστε ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο ἰσοδυνάμους κυρτὰς ἐπιφανείας ;

ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΠΕΡΙ ΑΞΟΝΑ

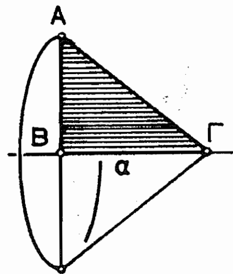
553. Θεώρημα. Τρίγωνον ΑΒΓ, στρεφόμενον περὶ τὴν πλευράν του α, παράγει ὄγκον ἴσον πρὸς $\frac{1}{3}\pi\alpha\upsilon^2_\alpha$.

i) Ἐὰν τὸ τρίγωνον εἶναι ὀξυγώνιον εἰς τὰς γωνίας του $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$, ὁ παραγόμενος ὄγκος ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα δύο κώνων (σχ. 553) μὲ κοινὴν βάσιν κύκλον ἀκτῖνος υ_α. Τότε ἔχομεν :

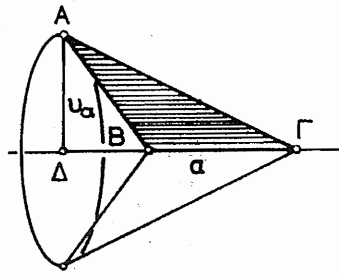
$$V = \frac{1}{3}\pi\upsilon^2_\alpha \cdot \Delta B + \frac{1}{3}\pi\upsilon^2_\alpha \cdot \Delta\Gamma = \frac{1}{3}\pi(\Delta B + \Delta\Gamma)\upsilon^2_\alpha = \frac{1}{3}\pi\alpha\upsilon^2_\alpha.$$



Σχ. 553



Σχ. 554



Σχ. 555

ii) Ἐὰν τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον εἰς μίαν τῶν γωνιῶν του $\widehat{B}$ ἢ $\widehat{\Gamma}$, ἔστω εἰς τὴν $\widehat{B}$ (σχ. 554), ὁ παραγόμενος ὄγκος ἰσοῦται πρὸς τὸν ὄγκον κώνου μὲ βάσιν κύκλον ἀκτῖνος $AB = \upsilon_\alpha$ καὶ ὕψος $B\Gamma = \alpha$, ἤτοι εἶναι :

$$V = \frac{1}{3}\pi\upsilon^2_\alpha \cdot B\Gamma = \frac{1}{3}\pi\alpha\upsilon^2_\alpha$$

iii) Ἐὰν τὸ τρίγωνον εἶναι ἀμβλυγώνιον εἰς μίαν ἐκ τῶν γωνιῶν του $\widehat{B}$

ἢ $\widehat{\Gamma}$, ἔστω εἰς τὴν $\widehat{B}$ (σχ. 555), ὁ παραγόμενος ὄγκος ἀναλύεται εἰς διαφορὰν δύο κώνων μὲ κοινὴν βάσιν κύκλον ἀκτῖνος υ_α. Τότε ἔχομεν :

$$V = \frac{1}{3}\pi\upsilon^2_\alpha \cdot \Delta\Gamma - \frac{1}{3}\pi\upsilon^2_\alpha \cdot \Delta B = \frac{1}{3}\pi(\Delta\Gamma - \Delta B)\upsilon^2_\alpha = \frac{1}{3}\pi\alpha\upsilon^2_\alpha.$$

Ἄρα καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις ὁ παραγόμενος ὄγκος ἰσοῦται πρός :

$$V = \frac{1}{3}\pi\alpha\upsilon^2_\alpha.$$

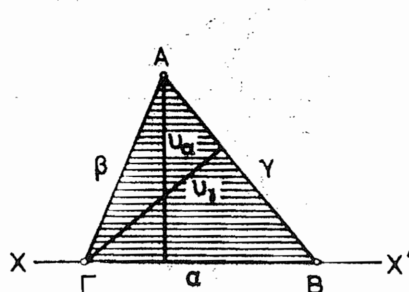
554. Θεώρημα. Ὁ ὄγκος, ὁ παραγόμενος ὑπὸ τριγώνου στρεφομένου περὶ ἄξονα τοῦ ἐπιπέδου του, διερχόμενον διὰ μιᾶς κορυφῆς του καὶ μὴ τέμνοντα τὸ τρίγωνον ἰσοῦται πρὸς τὸ τρίτον τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν διαγράφει ἡ ἀπέναντι πλευρὰ ἐπὶ τὸ ἐπ' αὐτὴν ὕψος.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ xx′ ὁ ἄξων περιστροφῆς, διερχόμενος διὰ τῆς κορυφῆς Γ.

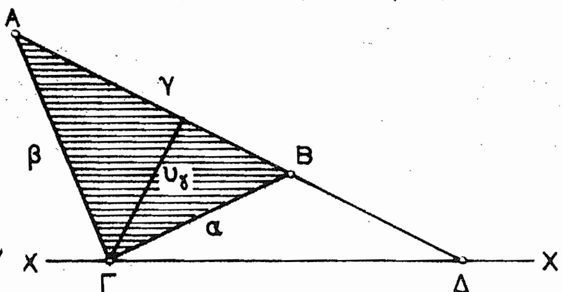
i) Ἂς θεωρήσωμεν ὅτι ὁ ἄξων xx′ περιέχει τὴν πλευρὰν ΒΓ (σχ. 556). Τότε ὁ παραγόμενος ὄγκος ἰσοῦται πρὸς $V_{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3}\pi\alpha\upsilon^2_\alpha$ (§ 553) καὶ μετασχηματίζεται, ὡς ἑξῆς : $V_{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3}\pi(\alpha\upsilon_\alpha)\upsilon_\alpha = \frac{1}{3}\pi(\gamma\upsilon_\gamma)\upsilon_\alpha =$

$= \frac{1}{3}(\pi\upsilon_\alpha\gamma)\upsilon_\gamma = \frac{1}{3}E_{AB}\upsilon_\gamma$, ὅπου $E_{AB} = \pi\upsilon_\alpha\gamma$ εἶναι ἡ ἐπιφάνεια, ἡ διαγραφομένη ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΑΒ.

ii) Ἔστω ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΒ προεκτεινομένη τέμνει τὸν ἄξονα περιστροφῆς εἰς σημεῖον Δ (σχ. 557). Τότε ὁ παραγόμενος ὄγκος $V_{(AB\Gamma)}$ ἰσοῦται



Σχ. 556



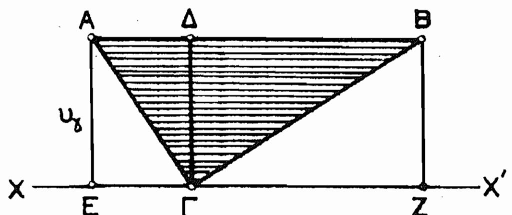
Σχ. 557

πρὸς τὴν διαφορὰν $V_{(A\Gamma\Delta)} - V_{(B\Gamma\Delta)}$ καὶ κατὰ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν εἶναι :

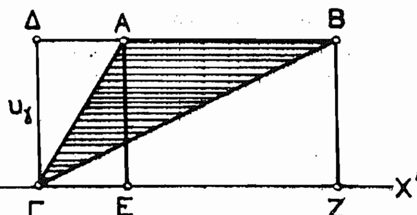
$$V_{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3}E_{A\Delta}\upsilon_\gamma - \frac{1}{3}E_{B\Delta}\upsilon_\gamma = \frac{1}{3}(E_{A\Delta} - E_{B\Delta})\upsilon_\gamma = \frac{1}{3}E_{AB}\upsilon_\gamma.$$

iii) Ἔστω ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα περι-

στροφῆς. Φέρομεν $ΑΕ \perp xx'$, $ΒΖ \perp xx'$ καὶ εἶναι προφανῶς $ΑΕ = ΒΖ = υ_γ$. 'Εὰν τὸ Γ προβάλλεται ἐπὶ τῆς ΑΒ εἰς σημεῖον Δ ἐνδιάμεσον τῶν Α καὶ Β (σχ. 558), ὁ παραγόμενος ὄγκος $V_{(ΑΒΓ)}$ ἀναλύεται ὡς ἑξῆς :



Σχ. 558



Σχ. 559

$$V_{(ΑΒΓ)} = V_{(ΑΒΖΕ)} - V_{(ΑΓΕ)} - V_{(ΒΓΖ)} = πυ_γ^2 ΑΒ - \frac{1}{3} πυ_γ^2 ΕΓ - \frac{1}{3} πυ_γ^2 ΖΓ =$$

$$\frac{1}{3} [3πυ_γ ΑΒ - πυ_γ ΕΓ - πυ_γ ΖΓ] υ_γ = \frac{1}{3} [πυ_γ (3ΑΒ - ΕΓ - ΖΓ)] υ_γ =$$

$$\frac{1}{3} [πυ_γ (3ΑΒ - ΑΒ)] υ_γ = \frac{1}{3} [πυ_γ (2ΑΒ)] υ_γ = \frac{1}{3} (2πυ_γ ΑΒ) υ_γ = \frac{1}{3} Ε_{ΑΒ} υ_γ.$$

'Εὰν ἡ προβολὴ Δ τοῦ Γ ἐπὶ τῆς ΑΒ εἶναι ἐκτὸς τοῦ τμήματος ΑΒ (σχ. 559), ὁ παραγόμενος ὄγκος $V_{(ΑΒΓ)}$ ἀναλύεται ὡς ἑξῆς : $V_{(ΑΒΓ)} = V_{(ΑΒΖΕ)} + V_{(ΑΓΕ)} - V_{(ΒΖΓ)}$ καὶ διὰ τοῦ αὐτοῦ ὡς ἄνω τρόπου καταλήγομεν εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα.

Ἄρα καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις ὁ παραγόμενος ὄγκος ἰσοῦται πρὸς

$$V_{(ΑΒΓ)} = \frac{1}{3} Ε_{ΑΒ} \cdot υ_γ$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1008. 'Ορθογώνιον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει καθέτους πλευρὰς 6 cm καὶ 8 cm στρέφεται διαδοχικῶς περὶ τὰς δύο καθέτους πλευρὰς καὶ περὶ τὴν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ ἑκάστην φοράν.

1009. 'Ορθογώνιον τρίγωνον στρέφεται διαδοχικῶς περὶ τὰς δύο καθέτους πλευρὰς του. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ παραγόμενοι ὄγκοι εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰς πλευράς, περὶ τὰς ὁποίας περιστρέφεται.

1010. 'Ισόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α στρέφεται περὶ ἄξονα, μὴ τέμνοντα τὸ τρίγωνον καὶ σχηματίζοντα γωνίαν 30^0 μὲ τὴν προσκειμένην πλευρὰν του. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

1011. 'Ισοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ μὲ ἴσας πλευρὰς $ΑΒ = ΑΓ = α$ καὶ μὲ γωνίαν κορυφῆς $\widehat{Α} = 120^0$ στρέφεται περὶ τὴν πλευρὰν ΑΒ αὐτοῦ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

1012. 'Ορθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\widehat{Α} = 1L$) στρέφεται περὶ ἄξονα τοῦ ἐπιπέδου

του διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς Α καὶ ἐφαπτόμενον τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὸ κύκλου. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ παραγόμενος ὄγκος ἐκ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

1013. Τρίγωνον ΑΒΓ μὲ $\alpha > \beta > \gamma$ στρέφεται διαδοχικῶς περὶ τὰς τρεῖς πλευράς του. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μέγιστος ἐκ τῶν τριῶν παραγομένων ὄγκων.

1014. Ὀρθογώνιον τρίγωνον στρέφεται διαδοχικῶς περὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς αὐτοῦ. Ἂν V_1 καὶ V_2 εἶναι οἱ παραγόμενοι ὄγκοι διὰ στροφῆς τοῦ τριγώνου περὶ τὰς δύο καθέτους πλευράς του καὶ V ὁ ὄγκος ὁ παραγόμενος διὰ στροφῆς αὐτοῦ περὶ τὴν ὑποτείνουσαν, νὰ εὑρεθῇ σχέσις συνδέουσα τοὺς ὄγκους V_1, V_2 καὶ V.

ΣΦΑΙΡΑ

555. Ὁρισμοί. Δοθέντος σταθεροῦ σημείου O, τὸ ὁποῖον καλεῖται **κέντρον** καὶ σταθεροῦ μήκους R, τὸ ὁποῖον καλεῖται **ἀκτίς,** καλοῦμεν :

i) Σφαῖραν τὸ σύνολον τῶν σημείων M τοῦ χώρου, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει $OM \leqq R$ καὶ συμβολίζομεν (O,R).

ii) Σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν τὸ σύνολον τῶν σημείων M τοῦ χώρου, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει $OM = R$.

Εἰς τὰ ἑπόμενα, ὡρισμένας φοράς, λέγοντες «σφαῖρα» θὰ ἐννοοῦμεν τὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν.

iii) Ἀκτὶς τῆς σφαίρας καλεῖται τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα $OM = R$, ὅπου O εἶναι τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ M τυχὸν σημεῖον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας.

iv) Χορδὴ καλεῖται κάθε εὐθύγραμμον τμῆμα μὲ τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας.

v) Διάμετρος καλεῖται κάθε χορδὴ διερχομένη ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. Εἶναι ἡ μεγαλυτέρα ἐξ ὅλων τῶν χορδῶν καὶ ἔχει μῆκος ἴσον πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς ἀκτῖνος. Τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου καλοῦνται ἀντιδιαμετρικὰ σημεῖα καὶ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.

Ἀπὸ τοὺς ἀνωτέρω ὁρισμοὺς ἕπονται εὐκόλως τὰ ἀκόλουθα :

Ἂς θεωρήσωμεν ἐπίπεδον (Π), διερχόμενον ἀπὸ τὸ κέντρον O τῆς σφαίρας (O,R) (σχ. 560). Ἐπ' αὐτοῦ τὰ σημεῖα M τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας εἶναι τοιαῦτα, ὥστε $OM = R$ καὶ ἑπομένως ἀπαρτίζουν κύκλον (O,R) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π). Εἷς τοιοῦτος κύκλος καλεῖται **μέγιστος κύκλος** τῆς σφαίρας καὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ καλεῖται **διαμετρικὸν** ἐπίπεδον.

556. Συμμετρίαι εἰς τὴν σφαῖραν ὑπάρχουν :

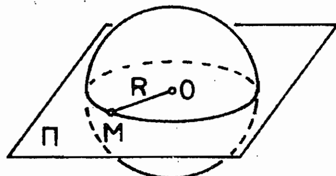
i) Κεντρικὴ συμμετρία ὡς πρὸς τὸ κέντρον της.

ii) Ἀξονικὴ συμμετρία ὡς πρὸς κάθε διάμετρόν της.

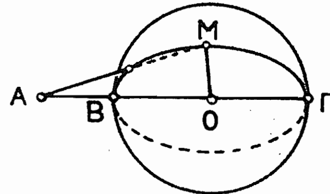
iii) Συμμετρία ἐπιπέδου ὡς πρὸς κάθε διαμετρικὸν ἐπίπεδον.

557. Ἡ σφαῖρα εἶναι στερεὸν ἐκ περιστροφῆς. Παράγεται ἀπὸ τὴν περιστροφὴν κύκλου (O,R) περὶ μίαν διάμετρόν του.

558. Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ σφαῖραν. Ἄς θεωρήσωμεν σφαῖραν (O, R), σημεῖον A καὶ διάμετρον ΒΓ διερχομένην διὰ τοῦ A (σχ. 561). Ἐὰν M εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ἀπὸ τὸ τρίγωνον AOM λαμβάνομεν :



Σχ. 560



Σχ. 561

i) $AM \geqq |AO - OM| \Rightarrow AM \geqq |AO - OB| \Rightarrow AM \geqq AB \Rightarrow AB \leqq AM$. Λόγῳ τῆς τελευταίας σχέσεως, τὴν ἀπόστασιν AB ὁρίζομεν ὡς **ἐλαχίστην ἀπόστασιν** τοῦ σημείου A ἀπὸ τὴν σφαῖραν, ἰσοῦται δὲ αὕτη πρὸς $|\delta - R|$, ὅπου $\delta = AO$.

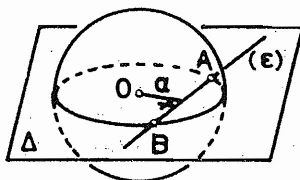
ii) $AM \leqq AO + OM \Rightarrow AM \leqq AO + O\Gamma \Rightarrow AM \leqq A\Gamma \Rightarrow A\Gamma \geqq AM$. Λόγῳ τῆς τελευταίας σχέσεως, τὴν ἀπόστασιν ΑΓ ὁρίζομεν ὡς **μεγίστην ἀπόστασιν** τοῦ σημείου A ἀπὸ τὴν σφαῖραν, ἰσοῦται δὲ αὕτη πρὸς $\delta + R$.

559. Σχετικαὶ θέσεις εὐθείας καὶ σφαίρας. Μία εὐθεῖα (ε) καὶ μία σφαῖρα (O, R), ὅπως καὶ ἂν εὑρίσκωνται, ἔχουν πάντοτε ὡς ἐπίπεδον συμμετρίας τὸ διαμετρικὸν ἐπίπεδον (Δ) τῆς σφαίρας, ποὺ περιέχει τὴν εὐθεῖαν (ε) (σχ. 562). Ἡ εὐθεῖα (ε) δὲν δύναται νὰ ἔχῃ σημεῖα της ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου (Δ) καὶ ἑπομένως τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν δύο σχημάτων θὰ τὰ ἀναζητήσωμεν ἐπὶ τοῦ (Δ). Τὸ ἐπίπεδον (Δ) τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ μέγιστον κύκλον (O, R) καὶ ἑπομένως αἱ σχετικαὶ θέσεις εὐθείας καὶ σφαίρας ἀνάγονται εἰς τὰς γνωστὰς σχετικὰς θέσεις εὐθείας καὶ κύκλου, ἤτοι, ἐὰν α εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν, ἔχομεν :

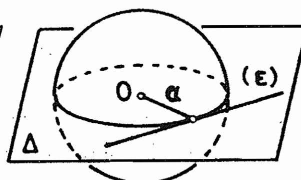
i) Ἡ σφαῖρα καὶ ἡ εὐθεῖα ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα (τέμνονται) $\Longleftrightarrow \alpha < R$ (σχ. 562).

ii) Ἡ σφαῖρα καὶ ἡ εὐθεῖα ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον (ἐφάπτονται) $\Longleftrightarrow \alpha = R$ (σχ. 563).

iii) Ἡ σφαῖρα καὶ ἡ εὐθεῖα δὲν ἔχουν κοινὰ σημεῖα $\Longleftrightarrow \alpha > R$ (σχ. 564).



Σχ. 562

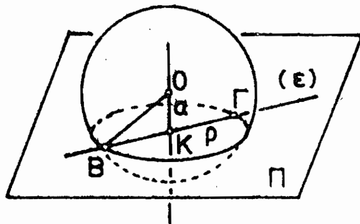


Σχ. 563

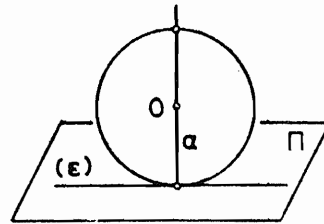


Σχ. 564

560. Σχετικαὶ θέσεις σφαίρας καὶ ἐπιπέδου. Μιὰ σφαῖρα παράγεται ἀπὸ περιστροφὴν κύκλου περὶ διάμετρον. Ἓν ἐπίπεδον παράγεται ἀπὸ περιστροφὴν εὐθείας περὶ ἄξονα κάθετον αὐτῆς. Ἑπομένως τὸ σχῆμα «σφαῖρα - ἐπίπεδον» παράγεται ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον σχῆμα «κύκλος - εὐθεῖα» στρεφόμενον περὶ ἄξονα, διερχόμενον ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν. Ἄρα αἱ σχετικαὶ θέσεις σφαίρας - ἐπιπέδου εἶναι ἀντί-



Σχ. 565



Σχ. 566

στοιχοι ἐκείνων τοῦ σχήματος κύκλου - εὐθείας εἰς τὸ ἐπίπεδον, ἤτοι, ἐὰν α εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου σφαίρας (O, R) διαγραφομένης ἀπὸ κύκλον (O, R) καὶ (Π) τὸ ἐπίπεδον τὸ διαγραφόμενον ἀπὸ εὐθεῖαν (ε), ἔχομεν :

i) Ὁ κύκλος (O, R) μὲ τὴν εὐθεῖαν (ε) τέμνονται εἰς τὰ B καὶ Γ (σχ. 565) $\Longleftrightarrow$ ἡ σφαῖρα (O, R) μὲ τὸ ἐπίπεδον (Π) τέμνονται, $\Longleftrightarrow$ $α < R$. Τὰ B καὶ Γ, στρεφόμενα περὶ τὴν μεσοκάθετον OK τῆς χορδῆς BΓ, διαγράφουν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) κύκλον (K, ρ). Ἄρα **ἡ τομὴ σφαίρας καὶ ἐπιπέδου εἶναι κύκλος μὲ ἀκτῖνα $ρ \leqq R$.** Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον (Π) δὲν διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, εἶναι $ρ < R$ καὶ ὁ κύκλος (K, ρ) καλεῖται **μικρὸς κύκλος** τῆς σφαίρας, ἐνῷ ἐὰν τὸ (Π) διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας (διαμετρικὸν ἐπίπεδον), θὰ εἶναι $ρ = R$ καὶ ἡ τομὴ θὰ εἶναι **μέγιστος κύκλος** τῆς σφαίρας.

ii) Ὁ κύκλος (O, R) μὲ τὴν εὐθεῖαν (ε) ἐφάπτονται εἰς τὸ A (σχ. 566) $\Longleftrightarrow$ ἡ σφαῖρα (O, R) μὲ τὸ ἐπίπεδον (Π) ἐφάπτονται εἰς τὸ A (ἔχουν ἕνα μόνον κοινὸν σημεῖον) $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{α = R}$.

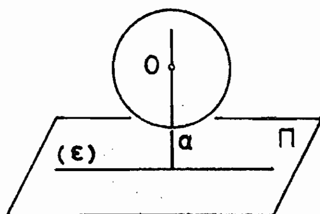
iii) Ὁ κύκλος (O, R) μὲ τὴν εὐθεῖαν (ε) δὲν τέμνονται (σχ. 567) $\Longleftrightarrow$ ἡ σφαῖρα (O, R) μὲ τὸ ἐπίπεδον (Π) δὲν τέμνονται $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{α > R}$.

Πόρισμα. Διὰ τριῶν σημείων μιᾶς σφαιρικῆς ἐπιφανείας διέρχεται εἷς κύκλος τῆς σφαίρας.

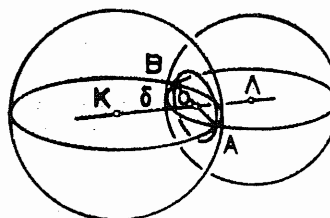
561. Σχετικαὶ θέσεις δύο σφαιρῶν. Διάκεντρος δύο σφαιρῶν (K, R) καὶ (Λ, ρ) καλεῖται τὸ τμῆμα KΛ καὶ τὸ συμβολίζομεν μὲ δ. Δύο σφαῖραι παράγονται ἀπὸ τὴν περιστροφὴν δύο κύκλων περὶ τὴν διάκεντρον αὐτῶν. Ἑπομένως αἱ σχετικαὶ θέσεις δύο σφαιρῶν εἶναι ἀντίστοιχοι τῶν σχετικῶν θέσεων δύο κύκλων εἰς τὸ ἐπίπεδον καὶ ἑπομένως ἔχομεν :

i) Δύο κύκλοι (K, R) καὶ (Λ, ρ) τέμνονται εἰς τὰ A καὶ B (σχ. 568) $\Longleftrightarrow$

αἱ σφαῖραι (Κ,R) καὶ (Λ,ρ) τέμνονται $\Longleftrightarrow$ $|R-\rho| < \delta < R+\rho$. Τὰ κοινὰ σημεῖα Α καὶ Β τῶν δύο κύκλων, στρεφόμενα περὶ τὴν μεσοκάθετον ΚΛ, διαγράφουν κύκλον. Ἄρα **ἡ τομὴ δύο σφαιρῶν εἶναι κύκλος.** Τὸ κέντρον του Ο εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς διακέντρου τῶν δύο σφαιρῶν καὶ τὸ ἐπίπεδόν του εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν διάκεντρον.



Σχ. 567

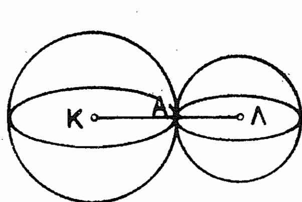


Σχ. 568

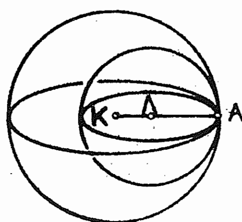
ii) Οἱ κύκλοι (Κ,R) καὶ (Λ,ρ) ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς σημεῖον Α (σχ. 569) $\Longleftrightarrow$ αἱ σφαῖραι (Κ,R) καὶ (Λ,ρ) ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς σημεῖον Α (ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον) $\Longleftrightarrow$ $\delta = R+\rho$. Τὸ σημεῖον Α εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς διακέντρου.

iii) Οἱ κύκλοι (Κ,R) καὶ (Λ,ρ) ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς σημεῖον Α (σχ. 570) $\Longleftrightarrow$ αἱ σφαῖραι (Κ,R) καὶ (Λ,ρ) ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς τὸ Α (ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον) $\Longleftrightarrow$ $\delta = |R-\rho|$. Τὸ σημεῖον Α εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς διακέντρου καὶ ἡ μία σφαῖρα εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς ἄλλης.

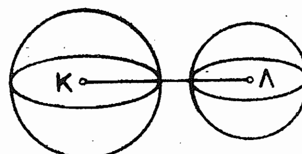
iv) Οἱ κύκλοι (Κ,R) καὶ (Λ,ρ) δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον καὶ ὁ εἷς εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ ἄλλου (σχ. 571) $\Longleftrightarrow$ αἱ δύο σφαῖραι (Κ,R) καὶ (Λ,ρ) δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον καὶ ἡ μία εὑρίσκεται ἐκτὸς τῆς ἄλλης $\Longleftrightarrow$ $\delta > R+\rho$.



Σχ. 569



Σχ. 570



Σχ. 571

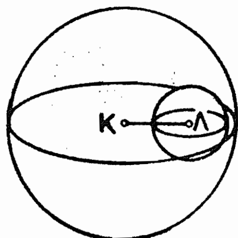
v) Οἱ κύκλοι (Κ,R) καὶ (Λ,ρ) δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον καὶ ὁ εἷς εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ ἄλλου (σχ. 572) $\Longleftrightarrow$ αἱ σφαῖραι (Κ,R) καὶ (Λ,ρ) δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον καὶ ἡ μία εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς ἄλλης $\Longleftrightarrow$ $\delta < |R-\rho|$.

562. Γωνία δύο σφαιρῶν. Ἀναφέρεται μόνον εἰς τὰς τεμνομένας σφαίρας καὶ εἶναι ἡ γωνία τῶν δύο κύκλων (§ 198), ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τῶν ὁποίων προῆλθον αἱ δύο σφαῖραι.

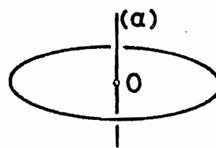
563. Ὁρισμοί.

i) Ἄξων κύκλου καλεῖται ἡ εὐθεῖα (α) ἡ διερχομένη ἀπὸ τὸ κέντρον O τοῦ κύκλου καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου (σχ. 573).

ii) Πόλοι κύκλου σφαίρας. Ἐὰν κύκλος (O,ρ) ἀνήκῃ εἰς σφαῖραν (K,R) (σχ. 574), τὰ σημεῖα Π_1 καὶ Π_2, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ ἄξων τοῦ κύκλου τέμνει τὴν σφαῖραν, καλοῦνται πόλοι τοῦ κύκλου (O,ρ) τῆς σφαίρας (K,R).



Σχ. 572



Σχ. 573

iii) Πολικὴ ἀπόστασις. Ἕκαστος πόλος (σχ. 574) ἰσαπέχει ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα M τοῦ κύκλου (O,ρ), διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $MO\Pi_1$ καὶ $MO\Pi_2$ διατηροῦν σταθερὸν μέγεθος διὰ τὰς διαφόρους θέσεις τοῦ M ἐπὶ τοῦ κύκλου (O,ρ). Ἑκάστη τῶν ἀποστάσεων τούτων καλεῖται **πολιτικὴ ἀπόστασις** τοῦ κύκλου. Κάθε κύκλος ἑπομένως ἔχει δύο πολικὰς ἀποστάσεις ρ_1 καὶ ρ_2. Ἐπειδὴ οἱ πόλοι Π_1 καὶ Π_2 εἶναι ἀντιδιαμετρικὰ σημεῖα τῆς σφαίρας, τὸ τρίγωνον $\Pi_1 M \Pi_2$ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι $\rho^2_1 + \rho^2_2 = 4R^2$.

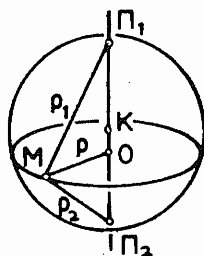
iv) Ἐγγεγραμμένον πολύεδρον εἰς σφαῖραν καλεῖται κάθε πολύεδρον, τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν. Ἡ σφαῖρα καλεῖται **περιγεγραμμένη** περὶ τὸ πολύεδρον καὶ τὸ κέντρον της καλεῖται **περίκεντρον** τοῦ πολυέδρου.

v) Περιγεγραμμένον πολύεδρον περὶ σφαῖραν καλεῖται κάθε πολύεδρον, τοῦ ὁποίου αἱ ἕδραι ἐφάπτονται εἰς τὴν αὐτὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν. Ἡ σφαῖρα εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πολυέδρου καὶ καλεῖται ἐγγεγραμμένη εἰς αὐτό. Τὸ κέντρον της καλεῖται **ἔγκεντρον** τοῦ πολυέδρου.

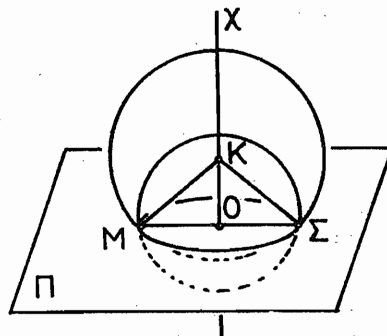
564. Θεώρημα. Εἷς κύκλος (O,ρ) ἀνήκει εἰς ἀπείρους σφαίρας, τὰ κέντρα τῶν ὁποίων εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ κύκλου.

Ἀπόδειξις. Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖον K τοῦ ἄξονος Ox τοῦ κύκλου (O,ρ) ἰσαπέχει ἀπὸ τὰ σημεῖα M τοῦ κύκλου (O,ρ) (σχ. 575). Τοῦτο ὅμως εἶναι φανερόν, διότι διὰ τὰς διαφόρους θέσεις τοῦ M ἐπὶ τοῦ κύκλου (O,ρ) τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα KOM διατηροῦν σταθερὸν μέγεθος, διότι εἰς αὐτά, ἐκτὸς τῆς ὀρθῆς γωνίας εἰς τὸ O, παραμένουν σταθεραὶ κατὰ μῆκος αἱ πλευραὶ OK καὶ OM = ρ. Ἄρα καὶ τὸ μῆκος KM παραμένει σταθερὸν καὶ ἑπομένως τὸ τυχὸν σημεῖον K τοῦ ἄξονος Ox εἶναι κέντρον σφαίρας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει ὁ κύκλος (O,ρ).

Ἰσχύει καὶ τὸ ἀντίστροφον, ἤτοι, ἐὰν ὁ κύκλος (Ο,ρ) ἀνήκῃ εἰς σφαῖραν (Κ,R), τὸ κέντρον της Κ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος Οx τοῦ κύκλου (Ο,ρ). Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΚΟ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) τοῦ κύκλου (Ο,ρ). Ἐὰν Σ εἶναι τὸ ἀντιδιαμετρικὸν τοῦ Μ, ὡς πρὸς τὸν κύκλον (Ο,ρ), εἶναι προφανῶς ΚΜ = ΚΣ, ὡς σημεῖα τῆς σφαίρας (Κ,R) ⇒ ΚΟ ⊥ ΜΣ.



Σχ. 574



Σχ. 575

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ΚΟ εἶναι κάθετος ἐπὶ μίαν ἀκόμη διάμετρον τοῦ κύκλου (Ο,ρ) καὶ ἐπομένως ΚΟ ⊥ (Π), ἤτοι τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ἀνήκει εἰς τὸν ἄξονα Οx τοῦ κύκλου (Ο,ρ).

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα συνάγεται ὅτι ὁ γ. τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν εἰς τὰς ὁποίας ἀνήκει ὁ κύκλος (Ο,ρ), εἶναι ὁ ἄξων Οx τοῦ κύκλου.

565. Καθορισμὸς σφαίρας. Μία σφαῖρα εἶναι καθωρισμένη, ὅταν εἶναι γνωστὰ τὰ ἀκόλουθα στοιχεῖα :

i) Κέντρον καὶ ἀκτίς. Ἐὰν μιᾶς σφαίρας γνωρίζωμεν τὸ κέντρον καὶ τὴν ἀκτῖνα, θὰ θεωρῶμεν ὅτι γνωρίζομεν τὴν σφαῖραν.

ii) Τέσσαρα σημεῖα ὄχι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἐὰν Α, Β, Γ, Δ εἶναι τέσσαρα σημεῖα ὄχι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τὰ τρία ἐξ αὐτῶν Α, Β, Γ ὁρίζουν κύκλον. Τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, τῆς διερχομένης διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ, ὁρίζεται ἀπὸ τὴν τομὴν τοῦ ἄξονος τοῦ κύκλου (ΑΒΓ) καὶ τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου ἑνὸς τῶν τμημάτων ΑΔ, ΒΔ, ΓΔ. Τὰ μεσοκάθετα ἐπίπεδα τῶν ΑΔ, ΒΔ καὶ ΓΔ τέμνουν τὸν ἄξονα τοῦ κύκλου (ΑΒΓ) εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον (διατί ;).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

1015. Δίδεται σφαῖρα ἀκτῖνος 5 cm καὶ ἐπίπεδον ἀπέχον ἀπὸ τὸ κέντρον 3 cm. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν σφαῖραν κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι ἡ τομὴ τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ἐπιπέδου. (Ἐγγεγραμμένος κύλινδρος εἰς σφαῖραν καλεῖται εἷς κύλινδρος, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι κύκλοι τῆς σφαίρας).

1016. Δύο σφαῖραι μὲ ἀκτῖνας 5 cm καὶ 12 cm ἀντιστοίχως ἔχουν διάκεντρον 13 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς των.

1017. Δείξατε ὅτι : κάθε ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος εἶναι ἐγγράψιμος εἰς σφαῖραν, ἤτοι ὑπάρχει σφαῖρα, ἐπὶ τῆς ὁποίας εὑρίσκονται αἱ βάσεις τοῦ κυλίνδρου.

1018. Δίδεται σφαῖρα (O,R). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι R/2.

1019. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνθήκη, ὑπὸ τὴν ὁποίαν εἷς ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος εἶναι περιγεγραμμένος περὶ σφαῖραν, ἤτοι νὰ ὑπάρχῃ σφαῖρα ἐφαπτομένη τῶν βάσεων καὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του.

1020. Ἐὰν δύο κύκλοι, ὄχι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τέμνωνται, δείξατε ὅτι ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν.

1021. Νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον (Π) ἐφαπτόμενον δοθείσης σφαίρας (O,R) καὶ παράλληλον πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον (P).

1022. Νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον (Π) ἐφαπτόμενον δοθείσης σφαίρας (O,R) καὶ διερχόμενον διὰ δοθείσης εὐθείας (ε).

1023. Νὰ γραφῇ σφαῖρα δοθείσης ἀκτῖνος R, διερχομένη διὰ τριῶν δοθέντων σημείων A, B, Γ.

1024. Νὰ γραφῇ σφαῖρα δοθείσης ἀκτῖνος R, ἐφαπτομένη τῶν ἑδρῶν δοθείσης τριέδρου στερεᾶς γωνίας Kxyz.

1025. Ἐὰν σφαῖρα διέρχεται ἐκ σημείου A καὶ ἐφάπτεται τῶν ἑδρῶν διέδρου γωνίας, δείξατε ὅτι διέρχεται καὶ ἀπὸ τὸ συμμετρικὸν τοῦ A, ὡς πρὸς τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον τῆς διέδρου.

B'.

1026. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι κάθε τετράεδρον εἶναι i) ἐγγράψιμον εἰς σφαῖραν καὶ ii) περιγράψιμον περὶ σφαῖραν.

1027. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ συνθῆκαι, ὑπὸ τὰς ὁποίας δύο κύκλοι, ὄχι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν.

1028. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς τομῆς δύο τεμνομένων σφαιρῶν, ἐκ τῶν ἀκτίνων τῶν σφαιρῶν καὶ τῆς διακέντρου αὐτῶν.

1029. Δείξατε ὅτι κάθε κυκλικὸς κῶνος εἶναι ἐγγράψιμος εἰς σφαῖραν, ἤτοι ὑπάρχει σφαῖρα, ἐπὶ τῆς ὁποίας εὑρίσκεται ἡ βάσις καὶ ἡ κορυφὴ τοῦ κώνου.

1030. Δίδεται σφαῖρα (O,R). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος ἰσοπλεύρου κώνου ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτήν, ἐκ τῆς ἀκτῖνος R τῆς σφαίρας.

1031. Δείξατε ὅτι κάθε ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος εἶναι περιγράψιμος περὶ σφαῖραν, ἤτοι ὑπάρχει σφαῖρα ἐφαπτομένη τῆς βάσεως καὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.

1032. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος ἰσοπλεύρου κώνου περιγεγραμμένου περὶ δοθεῖσαν σφαῖραν (O, ρ).

1033. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς κῶνον ἀκτῖνος 5α καὶ ὕψους 12α.

1034. Δίδεται κανονικὸν τετράεδρον KABΓ ἀκμῆς α. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν ἕδραν ABΓ καὶ εἰς τὰς ἀκμὰς KA, KB, KΓ.

1035. Δείξατε ὅτι, ἐὰν παραλληλεπίπεδον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς σφαῖραν, εἶναι ὀρθογώνιον.

1036. Δείξατε ὅτι, ἵνα ἓν παραλληλεπίπεδον εἶναι περιγεγραμμένον περὶ σφαῖραν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ ἕδραι του νὰ εἶναι ἰσοδύναμα παραλληλόγραμμα.

1037. Δίδεται σφαῖρα (O,R) καὶ σημεῖον K ἐκτὸς αὐτῆς. Τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία ἔχει τὴν κορυφήν της εἰς τὸ K καὶ στρέφεται περὶ αὐτὸ οὕτως, ὥστε αἱ ἕδραι της νὰ τέμνουν τὴν σφαῖραν. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριῶν κύκλων, κατὰ τοὺς ὁποίους αἱ ἕδραι τῆς στερεᾶς γωνίας τέμνουν τὴν σφαῖραν, εἶναι σταθερόν.

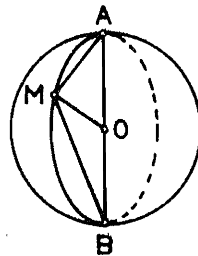
1038. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος περιγεγραμμένου περὶ σφαῖραν πολυέδρου ἰσοῦται πρὸς τὸ 1/3 τῆς ἐπιφανείας του ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.

1039. Τετραέδρου ΚΑΒΓ ἡ στερεὰ γωνία K εἶναι τρισορθογώνιος καὶ ἔχει $KA = \alpha$, $KB = \beta$, $K\Gamma = \gamma$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἐκ τῶν α, β, γ ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης περὶ αὐτὸ σφαίρας.

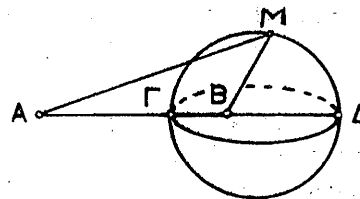
1040. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια κανονικοῦ τετραέδρου
i) ἐκ τῆς ἀκτῖνος R τῆς περιγεγραμμένης περὶ αὐτὸ σφαίρας
ii) ἐκ τῆς ἀκτῖνος ρ τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτὸ σφαίρας.
Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ πλέον σχέσις συνδέουσα τὰς ἀκτῖνας R καὶ ρ.

566. Γεωμετρικοὶ τόποι. Ἐκτὸς τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἡ ὁποία ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπὸ σταθερὸν σημεῖον ἀπέχουν σταθερὰν ἀπόστασιν, ἐνδιαφέροντες γεωμετρικοὶ τόποι εἶναι καὶ οἱ ἀκόλουθοι :

i) Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, ἀπὸ τὰ ὁποῖα δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα AB φαίνεται ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν, εἶναι σφαιρικὴ ἐπιφάνεια διαμέτρου AB (σχ. 576).



Σχ. 576



Σχ. 577

Πράγματι, ἐὰν M εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ἐπειδὴ $MO = AB/2 \Rightarrow \widehat{AMB} = 1^{L}$. Ἰσχύει καὶ τὸ ἀντίστροφον, ἤτοι ἐὰν $\widehat{AMB} = 1^{L} \Rightarrow MO = AB/2$ καὶ ἑπομένως τὸ M εἶναι σημεῖον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας.

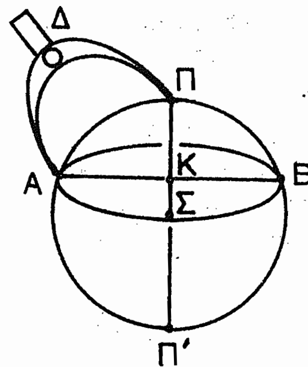
ii) Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δεδομένα σημεῖα A καὶ B εἶναι $\frac{\mu}{\nu}$, εἶναι σφαιρικὴ ἐπιφάνεια διαμέτρου ΓΔ (Ἀπολλώνιος σφαῖρα), ὅπου τὰ Γ καὶ Δ διαιροῦν τὸ τμῆμα AB ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς εἰς λόγον $\frac{\mu}{\nu}$ (σχ. 577).

Πράγματι, ἔστω M τυχὸν σημεῖον τοιοῦτον, ὥστε $\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$. Τότε ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ καθοριζομένου ὑπὸ τοῦ M καὶ τῆς εὐθείας AB, ὁ γ.

τόπος τοῦ Μ εἶναι Ἀπολλώνιος κύκλος σταθερᾶς διαμέτρου ΓΔ (§ 341). Ἐὰν τὸ σχῆμα στραφῇ περὶ τὴν ΑΒ, ὁ Ἀπολλώνιος κύκλος θὰ διαγράψῃ Ἀπολλώνιον σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν διαμέτρου ΓΔ, ἡ ὁποία εἶναι ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Μ.

ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

567. Σφαιρικὸς διαβήτης. Διὰ νὰ χαράξωμεν ἕνα κύκλον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας, χρησιμοποιοῦμεν τὸν **σφαιρικὸν διαβήτην,** ἤτοι ἕνα διαβήτην, τοῦ ὁποίου τὰ σκέλη εἶναι καμπύλα καὶ ὄχι εὐθύγραμμα, ὅπως τοῦ κοινοῦ διαβήτου (σχ. 578). Πρὸς τοῦτο στηρίζομεν τὸ ἓν ἄκρον τοῦ σφαιρικοῦ διαβήτου ἐπί τινος σημείου τῆς σφαίρας καὶ μὲ τυχὸν ἄνοιγμα αὐτοῦ γράφομεν κύκλον ἐπὶ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας.

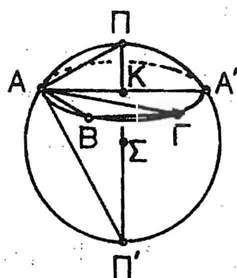


Σχ. 578

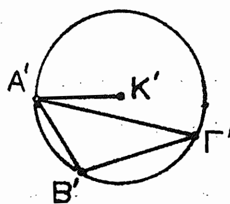
568. Πρόβλημα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς δοθείσης σφαίρας.

Λύσις. Μὲ κέντρον τὸ τυχὸν σημεῖον Π τῆς σφαίρας Σ καὶ ἀκτῖνα τοῦ σφαιρικοῦ διαβήτου, ἔστω τὴν ΠΑ (σχ. 579), γράφομεν κύκλον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καὶ λαμβάνομεν τρία σημεῖα Α, Β, Γ τοῦ κύκλου. Κατόπιν μετροῦμεν μὲ τὸν σφαιρικὸν διαβήτην τὰς ἀποστάσεις ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ καὶ μὲ πλευρὰς αὐτὰς κατασκευάζομεν τὸ ἐπίπεδον τρίγωνον Α'Β'Γ' (σχ. 580), εἰς τὸ ὁποῖον περιγράφομεν τὸν κύκλον (Κ', Κ'Α'). Εἶναι προφανὲς ὅτι εἶναι ἐκ κατασκευῆς Α'Β'Γ' = ΑΒΓ καὶ ἄρα Κ'Α' = ΚΑ.

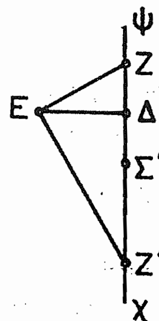
Κατόπιν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ΧΨ λαμβάνομεν σημεῖον Δ (σχ. 581) καὶ φέρομεν τὴν ΔΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΧΨ καὶ ἴσην μὲ τὴν Κ'Α'. Μὲ κέντρον τὸ Ε καὶ ἀκτῖνα τὴν πολικὴν ἀπόστασιν ΑΠ γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΧΨ εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Φέρομεν τὴν ΕΖ' ⊥ ΕΖ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΧΨ εἰς τὸ



Σχ. 579



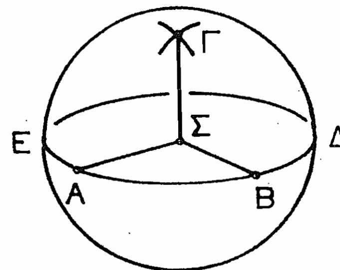
Σχ. 580



Σχ. 581

Z'. Εἶναι προφανὲς ὅτι εἶναι τρίγ. ΔΕΖ = ΚΑΠ ὡς ὀρθογώνια, ἔχοντα ΔΕ = ΚΑ καὶ ΕΖ = ΑΠ. 'Επίσης εἶναι τρίγωνα ΕΖΖ' = ΑΠΠ', διότι ἔχουν $\widehat{E} = \widehat{A} = 90^0$, ΕΖ = ΑΠ καὶ $\widehat{EZZ'} = \widehat{A\Pi\Pi'}$. Ἄρα ΠΠ' = ΖΖ', ἤτοι ἡ ΖΖ' εἶναι ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας Σ καὶ ἄρα ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας Σ εἶναι ἡ $\Sigma' Z = \frac{ZZ'}{2}$.

569. Πρόβλημα. 'Επὶ τῆς ἐπιφανείας δοθείσης σφαίρας νὰ γραφῇ μέγιστος κύκλος διερχόμενος διὰ δύο δοθέντων σημείων αὐτῆς.



Σχ. 582

Λύσις. Μὲ κέντρα τὰ δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β (σχ. 582) καὶ ἄνοιγμα τοῦ σφαιρικοῦ διαβήτου ἴσον πρὸς τεταρτημόριον, δηλαδὴ πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν ὀρθογωνίου ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἔχοντος καθέτους πλευρὰς ἴσας πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, τὴν ὁποίαν ἀκτῖνα εὑρίσκομεν ὡς εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, γράφομεν δύο τόξα, τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Γ. Κατόπιν μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν γράφομεν κύκλον, ὁ ὁποῖος εἶναι ὁ ζητούμενος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

1041. Δίδονται δύο σταθερὰ σημεῖα Ο καὶ Α. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος: i) τῶν προβολῶν τοῦ Α ἐπὶ τὰς εὐθείας τὰς διερχομένας διὰ τοῦ Ο καὶ ii) τῶν συμμετρικῶν τοῦ Α ὡς πρὸς τὰς εὐθείας τὰς διερχομένας διὰ τοῦ Ο.

1042. Δίδεται σφαῖρα (Ο,R) καὶ σημεῖον Α. 'Εὰν Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, φέρομεν τὴν ΑΜ καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν ΜΚ = ΜΑ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Κ.

1043. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ χώρου, διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι : $MA^2 + MB^2 = k^2$, ἔνθα Α καὶ Β σταθερὰ σημεῖα καὶ k δεδομένον τμῆμα.

1044. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ χώρου, διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι : $MA^2 - MB^2 = k^2$, ἔνθα Α καὶ Β σταθερὰ σημεῖα καὶ k δεδομένον τμῆμα.

Β'.

1045. Δίδεται σφαῖρα (Κ,R). Μεταβλητὴ εὐθεῖα (ε) εἶναι παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν (δ) καὶ ἐφάπτεται τῆς σφαίρας εἰς σημεῖον Μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ Μ.

1046. Δίδεται σφαῖρα (Κ,R) καὶ εὐθεῖα (ε). Μεταβλητὸν ἐπίπεδον (Π) διέρχεται διὰ τῆς εὐθείας (ε) καὶ τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ κύκλον (Ο,ρ). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ κέντρου Ο.

1047. Μεταβλητὸν τρίγωνον ΑΒΓ διατηρεῖ σταθερὰν κατὰ θέσιν καὶ μέγεθος τὴν βάσιν ΒΓ = α καὶ σταθερὰν κατὰ μέγεθος τὴν διάμεσον ΑΜ = μ_α. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῆς κορυφῆς Α, ἐὰν ΑΒ = 2ΑΓ.

1048. Δίδεται σφαῖρα (Κ,R) καὶ σταθερὰ διάμετρος ΑΚΒ αὐτῆς. 'Εὰν Μ εἶναι

τυχὸν σημεῖον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, φέρομεν τὴν ΑΜ καὶ ἐκ τοῦ Κ παράλληλον τῆς ΑΜ, ἡ ὁποία τέμνει τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς σφαίρας ἐκ τοῦ Μ εἰς τὸ Ι. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Ι.

1049. Δίδεται σφαῖρα (Κ,R) καὶ σταθερὰ διάμετρος ΑΚΒ αὐτῆς. Ἐὰν Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, φέρομεν τὴν ΒΜ καὶ εἰς τὴν προέκτασιν αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα ΜΓ = ΜΒ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος i) τοῦ σημείου Γ, ii) τοῦ σημείου Ι τῆς τομῆς ΑΜ καὶ ΚΓ.

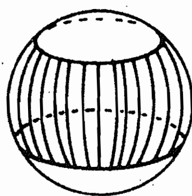
1050. Δίδεται σφαῖρα (Κ,R) καὶ σταθερὸν ἐπίπεδον (Π) διερχόμενον ἀπὸ τὸ κέντρον της Κ. Ἐὰν Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, φέρομεν ΜΑ ⊥ (Π) καὶ ἐπὶ τῆς ΚΜ λαμβάνομεν ΚΙ = ΜΑ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Ι.

1051. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο σταθερὰ σημεῖα Α καὶ Β αὐτοῦ. Δύο μεταβληταὶ σφαῖραι κέντρων Κ καὶ Λ ἐφάπτονται τοῦ ἐπιπέδου (Π) εἰς τὰ Α καὶ Β καὶ μεταξύ των εἰς τὸ Μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Μ.

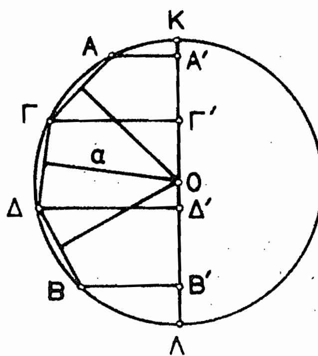
ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

570. Σφαιρικὴ ζώνη καλεῖται τὸ τμῆμα τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα τέμνουν τὴν σφαῖραν (σχ. 583).

Αἱ τομαὶ εἶναι κύκλοι καὶ καλοῦνται βάσεις τῆς σφαιρικῆς ζώνης καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν βάσεων καλεῖται ὕψος αὐτῆς.



Σχ. 583



Σχ. 584

Διὰ τὴν μέτρησιν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαιρικῆς ζώνης, θεωροῦμεν ἡμικύκλιον διαμέτρου ΚΟΛ (σχ. 584) καὶ ἓν τόξον $\overset{\frown}{AB}$ αὐτοῦ, εἰς τὸ ὁποῖον ἐγγράφομεν κανονικὴν πολυγωνικὴν γραμμὴν ΑΓΔΒ. Ἐὰν τὸ σχῆμα στραφῇ περὶ τὴν διάμετρον ΚΛ, τὸ ἡμικύκλιον θὰ διαγράψῃ σφαῖραν, ἐνῷ τὸ τόξον $\overset{\frown}{AB}$ θὰ διαγράψῃ σφαιρικὴν ζώνην ὕψους Α′Β′, ὅπου ΑΑ′ ⊥ ΚΛ καὶ ΒΒ′ ⊥ ΚΛ. Ἡ ἐγγεγραμμένη πολυγωνικὴ γραμμὴ ΑΓΔΒ θὰ διαγράψῃ ἐπιφάνειαν ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιφανειῶν, ποὺ διαγράφουν αἱ πλευραί της. Φέρο-

μεν ΓΓ′ ⊥ ΚΛ, ΔΔ′ ⊥ ΚΛ καὶ τὰ ἀποστήματα α ἐκ τοῦ κέντρου Ο τοῦ ἡμικυκλίου. Αἱ ἐπιφάνειαι, ποὺ διαγράφουν αἱ πλευραὶ τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς, εἶναι κυρταὶ ἐπιφάνειαι κολούρων κώνων καὶ ἑπομένως ἔχομεν (§ 552 πόρ. II) : $E_{A\Gamma} = 2\pi\alpha A'\Gamma'$, $E_{\Gamma\Delta} = 2\pi\alpha\Gamma'\Delta'$, $E_{\Delta B} = 2\pi\alpha\Delta'B'$. Διὰ προσθέσεως αὐτῶν λαμβάνομεν : $E_{A\Gamma\Delta B} = 2\pi\alpha\ (A'\Gamma' + \Gamma'\Delta' + \Delta'B') = 2\pi\alpha A'B'$ (1). Ἐὰν φαντασθῶμεν ὅτι αἱ πλευραὶ τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς αὐξανόμεναι τείνουν εἰς τὸ ἄπειρον, τότε ἡ πολυγωνικὴ γραμμὴ τείνει νὰ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ καὶ ἑπομένως ἡ γραφομένη ἐπιφάνεια ὑπ' αὐτῆς τείνει εἰς τὴν ζητουμένην ἐπιφάνειαν τῆς σφαιρικῆς ζώνης μὲ ὕψος $A'B' = h$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, τὸ μόνον, ποὺ θὰ μεταβληθῇ εἰς τὴν ἔκφρασιν (1) τῆς γραφομένης ἐπιφανείας, εἶναι τὸ ἀπόστημα α, τὸ ὁποῖον θὰ ταυτισθῇ μὲ τὴν ἀκτῖνα R καὶ ἑπομένως ἔχομεν διὰ τὴν ἐπιφάνειαν σφαιρικῆς ζώνης ὕψους h τὸν τύπον :

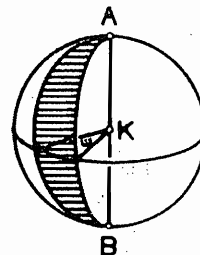
$$\mathbf{E = 2\pi Rh.}$$

571. Μονοβασικὴ σφαιρικὴ ζώνη. Ἐὰν ἓν ἐκ τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων εἶναι ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας, ἡ ὑπ' αὐτῶν καθοριζομένη σφαιρικὴ ζώνη ἔχει μίαν βάσιν καὶ καλεῖται **μονοβασική**. Ἡ ἐπιφάνειά της δίδεται ἀπὸ τὸν ἴδιον τύπον τῆς προηγουμένης παραγράφου.

572. Σφαιρικὴ ἐπιφάνεια. Ἡ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια δύναται νὰ θεωρηθῇ ἐπιφάνεια σφαιρικῆς ζώνης μὲ ὕψος $h = 2R$. Τότε ὁ προηγούμενος τύπος δίδει

$$\mathbf{E_{\sigma\varphi} = 4\pi R^2.}$$

Πόρισμα. Ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν δύο σφαιρῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου τῶν ἀκτίνων των.



Σχ. 585

★ **573. Σφαιρικὴ ἄρκτος καλεῖται τὸ τμῆμα τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῶν ἑδρῶν διέδρου γωνίας, τῆς ὁποίας ἡ ἀκμὴ AB εἶναι διάμετρος τῆς σφαίρας (σχ. 585).**

Εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι δύο σφαιρικαὶ ἄτρακτοι τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἴσων σφαιρῶν αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ἀπὸ ἴσας διέδρους γωνίας εἶναι ἴσαι.

Ἐξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς σφαιρικῆς ἀτράκτου εἶναι ἀνάλογος τοῦ μέτρου ω τῆς διέδρου γωνίας, ἀπὸ τὴν ὁποίαν καθορίζεται καὶ θὰ καλῆται **σφαιρικὴ ἄτρακτος γωνίας ω.**

Ἐπειδὴ ἡ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια δύναται νὰ θεωρηθῇ σφαιρικὴ ἄτρακτος πλήρους γωνίας (360^0), ἡ ἐπιφάνεια E μιᾶς σφαιρικῆς ἀτράκτου γωνίας ω θὰ εἶναι τοιαύτη, ὥστε :

$$\frac{E}{\omega} = \frac{4\pi R^2}{360^0} \Rightarrow E = \frac{4\pi R^2 \omega^0}{360^0}.$$

Σημείωσις. Ἐὰν ἡ γωνία ω^0, μετρουμένη εἰς ἀκτίνια, εἶναι α, ὁ ἀνωτέρω τύπος τῆς ἐπιφανείας σφαιρικῆς ἀτράκτου μετασχηματίζεται, ὡς ἑξῆς : $E = \dfrac{4\pi R^2\alpha}{2\pi} = 2R^2\alpha$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

1052. Σφαῖρα ἀκτῖνος 5 cm τέμνεται ὑπὸ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας 3 cm καὶ 4 cm. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης τῆς περιλαμβανομένης μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων (δύο περιπτώσεις).

1053. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος σφαιρικῆς ζώνης ἰσοδυνάμου πρὸς μέγιστον κύκλον σφαίρας ἀκτῖνος R.

1054. Τὸ ἐπίπεδον μικροῦ κύκλου σφαίρας ἀκτῖνος 4 cm ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας 1 cm. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν δύο μονοβασικῶν ζωνῶν, εἰς τὰς ὁποίας διαιρεῖται ἡ σφαῖρα.

1055. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τῆς περιγεγραμμένης περὶ κανονικὸν τετράεδρον ἀκμῆς α. Ὁμοίως τῆς ἐγγεγραμμένης.

Β'.

1056. Σφαιρικὴ ἐπιφάνεια ἀκτῖνος R νὰ διαιρεθῇ εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη δι' ἐπιπέδων παραλλήλων.

1057. Τέμνομεν σφαῖραν (O,R) δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ μιᾶς ἕδρας τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν κύβου. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια ἑκάστης τῶν δύο μοναβασικῶν σφαιρικῶν ζωνῶν, εἰς τὰς ὁποίας διαιρεῖται ἡ σφαῖρα.

1058. Σφαῖρα ἀκτῖνος α φωτίζεται ἀπὸ σημειακὴν φωτεινὴν πηγὴν Φ, εὑρισκομένην εἰς ἀπόστασιν 2α ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ φωτιζομένη ἐπιφάνεια.

1059. Σφαῖρα (O,R) νὰ τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδων ἰσαπεχόντων ἀπὸ τὸ κέντρον της εἰς τρόπον, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τομῶν νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῆς ζώνης, τὴν ὁποίαν περικλείουν.

1060. Δείξατε ὅτι ἡ σφαιρικὴ ζώνη, ποὺ καθορίζεται ἀπὸ δύο ὁμοκέντρους σφαίρας ἐπὶ τρίτης μεταβλητῆς σφαίρας διερχομένης ἀπὸ τὸ κέντρον των, ἔχει σταθερὰν ἐπιφάνειαν.

574. Σφαιρικὸς τομεὺς καλεῖται τὸ στερεὸν τὸ παραγόμενον ἀπὸ κυκλικὸν τομέα ΑΟΒ, στρεφόμενον περὶ διάμετρον τοῦ ἐπιπέδου του μὴ τέμνουσαν αὐτὸν (σχ. 586).

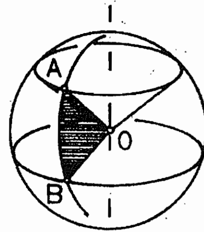
Τὸ τόξον $\overset{\frown}{AB}$ διαγράφει σφαιρικὴν ζώνην, ἡ ὁποία καλεῖται **βάσις** τοῦ σφαιρικοῦ τομέως καὶ **ὕψος** αὐτοῦ καλεῖται τὸ ὕψος τῆς βάσεώς του, ἤτοι τῆς σφαιρικῆς ζώνης, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς αὐτόν.

Διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ ὄγκου σφαιρικοῦ τομέως, θεωροῦμεν εἰς τὸ τόξον $\overset{\frown}{AB}$ (σχ. 587) τοῦ κυκλικοῦ τομέως, ἀπὸ τὸν ὁποῖον παράγεται, ἐγγεγραμμένην κανονικὴν πολυγωνικὴν γραμμήν. Ὁ ὄγκος, ποὺ παράγεται ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ ἐπιπέδου σχήματος ΟΑΓΔΒΟ περὶ τὴν ΚΛ, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων, ποὺ παράγουν τὰ τρίγωνα ΟΑΓ, ΟΓΔ, ΟΔΒ κατὰ τὴν περιστροφήν. Φέρομεν ἐκ τοῦ κέντρου Ο τὰ ἀποστήματα α καὶ ἔχομεν (§ 554) :

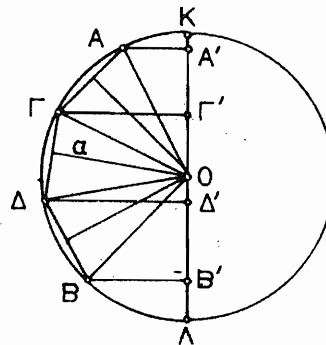
$$V_{(O A \Gamma)} = \frac{1}{3} E_{A\Gamma} \cdot \alpha, \quad V_{(O\Gamma\Delta)} = \frac{1}{3} E_{\Gamma\Delta} \cdot \alpha, \quad V_{(O\Delta B)} = \frac{1}{3} E_{\Delta B} \cdot \alpha \Rightarrow$$

$$(1) \qquad V_{(OA\Gamma\Delta BO)} = \frac{1}{3} [E_{A\Gamma} + E_{\Gamma\Delta} + E_{\Delta B}] \cdot \alpha = \frac{1}{3} E_{A\Gamma\Delta B} \cdot \alpha.$$

Ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ τόξον $\widehat{AB}$ πολυγωνικῆς γραμμῆς αὐξανόμενον τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον, τὸ ἀπόστημα α τείνει εἰς



Σχ. 586



Σχ. 587

τὴν ἀκτῖνα R καὶ ὁ παραγόμενος ὄγκος ἰσοῦται πρὸς τὸν ὄγκον V τοῦ σφαιρικοῦ τομέως. Τότε ἀπὸ τὴν προηγουμένην σχέσιν (1) ἔχομεν : $V = \frac{1}{3} E_{\widehat{AB}} R$ καί, ἐπειδὴ $E_{\widehat{AB}} = 2\pi Rh$ (§ 570), ἕπεται ὅτι ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ τομέως ἰσοῦται πρός :

$$\mathbf{V = \frac{2}{3} \pi R^2 h.}$$

575. Ὄγκος σφαίρας. Ἡ σφαῖρα δύναται νὰ θεωρηθῇ σφαιρικὸς τομεὺς μὲ ὕψος $h = 2R$ καὶ ἑπομένως ἀπὸ τὸν προηγούμενον τύπον λαμβάνομεν :

$$\mathbf{V_{\sigma\varphi} = \frac{4}{3} \pi R^3.}$$

Πόρισμα. Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο σφαιρῶν ἰσοῦται πρὸς τὸν κύβον τοῦ λόγου τῶν ἀκτίνων των.

★ **576. Σφαιρικὸς ὄνυξ** καλεῖται τὸ τμῆμα τῆς σφαίρας τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῶν ἑδρῶν διέδρου γωνίας, τῆς ὁποίας ἡ ἀκμὴ AB εἶναι διάμετρος τῆς σφαίρας (σχ. 588).

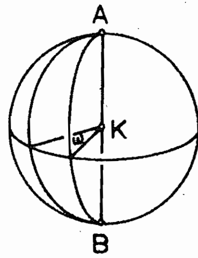
Ὁ ὄγκος V τοῦ σφαιρικοῦ ὄνυχος εἶναι ἀνάλογος τῆς διέδρου γωνίας αὐτοῦ, ἤτοι εἶναι : $\frac{V}{\omega} = \frac{V_{\sigma\varphi.}}{360^o}$ καὶ ἑπομένως δίδεται ἐκ τοῦ τύπου :

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{\omega^o}{360^o}.$$

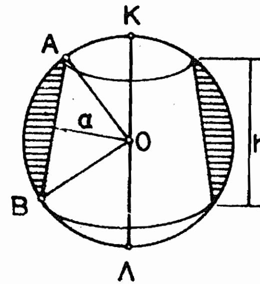
577. Σφαιρικὸς δακτύλιος καλεῖται τὸ στερεὸν τὸ παραγόμενον ἀπὸ κυκλικὸν τμῆμα AB στρεφόμενον περὶ διάμετρον ΚΛ τοῦ ἐπιπέδου του, μὴ τέμνουσαν αὐτὸ (σχ. 589).

Ἡ ἀπόστασις h τῶν δύο παραλλήλων κύκλων, ποὺ διαγράφουν τὰ σημεῖα Α καὶ Β, καλεῖται ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου.

Ὁ ὄγκος V τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου ὑπολογίζεται ὡς ἡ διαφορὰ τῶν



Σχ. 588



Σχ. 589

ὄγκων τοῦ σφαιρικοῦ τομέως, ποὺ παράγεται ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΑΟΒ καὶ τοῦ ὄγκου, ποὺ παράγεται ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ τριγώνου ΑΟΒ. Φέρομεν τὸ ἀπόστημα α καὶ ἔχομεν : $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h -$

$\frac{1}{3} E_{AB}\cdot\alpha = \frac{2}{3}\pi R^2 h - \frac{1}{3}(2\pi\alpha h)\,\alpha = \frac{2}{3}\pi R^2 h - \frac{2}{3}\pi\alpha^2 h =$

$\frac{2}{3}\pi(R^2 - \alpha^2)h = \frac{2}{3}\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2 h = \frac{1}{6}\pi AB^2 h$. Ἄρα ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ δακτυλίου δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον :

$$\mathbf{V = \frac{1}{6}\pi AB^2 h}.$$

578. Σφαιρικὸν τμῆμα. Ἐὰν δύο παράλληλα ἐπίπεδα τέμνουν σφαῖραν, τὸ τμῆμα αὐτῆς, τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων, καλεῖται σφαιρικὸν τμῆμα (σχ. 590).

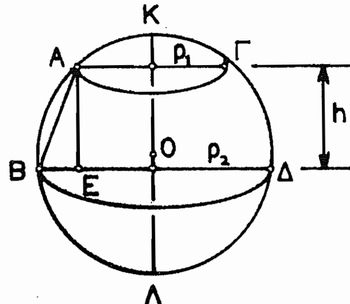
Ἡ ἀπόστασις h τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων καλεῖται ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος καὶ οἱ κύκλοι κατὰ τοὺς ὁποίους τὰ ἐπίπεδα τέμνουν τὴν σφαῖραν, καλοῦνται βάσεις αὐτοῦ.

Ἂς θεωρήσωμεν διάμετρον ΚΟΛ τῆς σφαίρας κάθετον ἐπὶ τὰς βάσεις τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος καὶ ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς ΚΛ τέμνον τοὺς κύκλους - βάσεις τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος εἰς τὰ Α, Γ καὶ Β, Δ ἀντιστοίχως. Ὁ ὄγκος V τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου ΑΒ ἀφ' ἑνὸς καὶ τοῦ κολούρου κώνου ΑΒΔΓ ἀφ' ἑτέρου. Ἐὰν ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος, ἔχομεν : $V = \frac{1}{6}\pi AB^2 h + \frac{1}{3}\pi(\rho^2_1 + \rho_1\rho_2 + \rho^2_2)h = \frac{1}{6}\pi\left[AB^2 + 2\rho^2_1 +\right.$

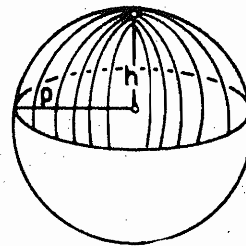
$+ 2\rho_1\rho_2 + 2\rho^2_2\big]$ h. Φέρομεν ΑΕ ⊥ ΒΔ ⇒ ΑΕ=h ⇒ $AB^2 = h^2 + (\rho_2 - \rho_1)^2 =$ $= h^2 + \rho^2 - 2\rho_1\rho_2 + \rho^2_2$ καὶ ὁ ὄγκος μετασχηματίζεται, ὡς ἀκολούθως: $V = \frac{1}{6}\pi\big[(h^2 + \rho^2_1 - 2\rho_1\rho_2 + \rho^2_1) + 2\rho^2_1 + 2\rho_1\rho_2 + 2\rho^2_2\big]\,h =$ $\frac{1}{6}\pi\big[h^2 + 3\rho^2_1 + 3\rho^2_2\big]h = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi(\rho^2_1 + \rho^2_2)h$. Ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον :

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi(\rho^2_1 + \rho^2_2)h.$$

579. Μονοβασικὸν σφαιρικὸν τμῆμα. Σφαῖρα τεμνομένη ὑπὸ ἐπιπέδου διαιρεῖται εἰς δύο τμήματα δυνάμενα νὰ θεωρηθοῦν σφαιρικὰ τμήματα



Σχ. 590



Σχ. 591

μὲ μίαν βάσιν τὴν τομὴν ἀκτῖνος ρ (σχ. 591) καὶ τὴν ἄλλην μηδενικήν, ἐξ οὗ καὶ καλοῦνται μονοβασικὰ σφαιρικὰ τμήματα. Ἐὰν h εἶναι τὸ ὕψος ἑνὸς ἐξ αὐτῶν, ὁ ὄγκος του δίδεται ἐκ τοῦ τύπου τῆς προηγουμένης παραγράφου, ὁ ὁποῖος μετασχηματίζεται, ὡς ἑξῆς :

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi\rho^2 h$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

1061. Δίδεται σφαῖρα ἀκτῖνος 8 cm. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τομέως τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι τόξον 60°, ὁ δὲ ἄξων αὐτοῦ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν χορδὴν τοῦ τόξου τούτου.

1062. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς κύβον ἀκμῆς α.

1063. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας τῆς περιγεγραμμένης περὶ κύβον ἀκμῆς α.

1064. Ὁ ὄγκος μιᾶς σφαίρας ἰσοῦται ἀριθμητικῶς πρὸς τὸ ἐμβαδὸν μεγίστου κύκλου αὐτῆς. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς καὶ ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας ταύτης.

1065. Ποία εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας, τῆς ὁποίας ὁ ὄγκος ἰσοῦται ἀριθμητικῶς πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της ;

1066. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος σφαίρας, ἐγγεγραμμένης εἰς κύλινδρον ἀκτῖνος βάσεως R.

1067. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος σφαίρας, ἐγγεγραμμένης εἰς κῶνον ἀκτῖνος βάσεως α καὶ ὕψους 3α.

1068. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ δακτυλίου, ἂν ἡ χορδὴ τοῦ τόξου τοῦ παράγοντος αὐτὸν ἰσοῦται μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας ἀκτῖνος R ἐγγεγραμμένου τετραγώνου, ὁ δὲ ἄξων περιστροφῆς διέρχεται διὰ τοῦ ἑνὸς ἄκρου τῆς χορδῆς ταύτης.

1069. Εἰς σφαῖραν ἀκτῖνος R φέρομεν χορδὴν ΑΒ κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ἀκτῖνος ΟΓ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ δακτυλίου τοῦ παραγομένου ὑπὸ τοῦ κυκλικοῦ τμήματος τοῦ ἔχοντος χορδὴν τὴν ΑΒ καὶ στρεφομένου περὶ τὸν ἄξονα ΟΠ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ.

1070. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ τμήματος μὲ μίαν βάσιν ἰσοῦται μὲ $\pi h^2 R - \frac{1}{3}\pi h^3$, ἔνθα R εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας καὶ h τὸ ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος.

1071. Εἰς σφαῖραν ἀκτῖνος 4 cm φέρομεν δύο παραλλήλους κύκλους πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ κέντρου καὶ μὲ διαμέτρους τὰς πλευρὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου εἰς μέγιστον κύκλον αὐτῆς. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ σχηματιζομένου σφαιρικοῦ τμήματος καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης αὐτοῦ.

1072. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῶν δύο σφαιρικῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται σφαῖρα ὑπὸ ἐπιπέδου ἀπέχοντος ἀπὸ τὸ κέντρον ἀπόστασιν ἴσην μὲ $\frac{3R}{5}$.

1073. Ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ τμήματος ἰσοῦται πρὸς τὸν ὄγκον κυλίνδρου, ἔχοντος ὕψος τὸ αὐτὸ καὶ βάσιν τὴν τομὴν τῆς σφαίρας ἡ ὁποία ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰς βάσεις τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος, ἠλαττωμένον κατὰ τὸ ἥμισυ τοῦ ὄγκου σφαίρας ἐχούσης διάμετρον τὸ ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος.

1074. Ἐὰν V_1 εἶναι ὁ ὄγκος σφαίρας, V_2 ὁ ὄγκος τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου, V_3 ὁ ὄγκος τοῦ περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου κώνου, δείξατε ὅτι : $\frac{V_1}{4} = \frac{V_2}{6} = \frac{V_3}{9}$. Ἐπίσης νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ τῆς αὐτῆς σχέσεως συνδέονται καὶ αἱ ἐπιφάνειαι E_1, E_2. E_3 τῶν αὐτῶν στερεῶν.

1075. Κυκλικὸς τομεὺς γωνίας 60^0 καὶ ἀκτῖνος ρ στρέφεται περὶ μίαν τῶν ἀκραίων ἀκτίνων του. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

Β΄.

1076. Κύβος ἀκμῆς α πληροῦται ὑπὸ ἴσων σφαιρῶν διαμέτρου α/ν, ν = 1, 2, 3... Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν σφαιρῶν εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ πλήθους των.

1077. Δίδονται δύο ὁμόκεντροι κύκλοι καὶ δύο ἴσαι καὶ παράλληλοι χορδαὶ αὐτῶν. Δείξατε ὅτι οἱ σφαιρικοὶ δακτύλιοι, ποὺ παράγονται ἀπὸ τὰ δύο κυκλικὰ τμήματα, ὅταν ταῦτα στραφοῦν περὶ μίαν διάμετρον, εἶναι ἰσοδύναμοι.

1078. Κωνικὸν δοχεῖον ἰσοπλεύρου κώνου πληροῦται δι' ὑγροῦ μέχρις ὕψους 5 cm. Ἐντὸς αὐτοῦ βυθίζεται σφαῖρα ἀκτῖνος 1 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀνύψωσις τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ. Ἐπίσης νὰ ὑπολογισθῇ πόσος θὰ ἔπρεπε νὰ ἦτο ὁ ὄγκος τοῦ περιεχομένου εἰς τὸ δοχεῖον ὑγροῦ, ὥστε ἡ βυθιζομένη εἰς αὐτὸ σφαῖρα νὰ ἐφάπτεται τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ.

1079. Δύο σφαῖραι (Κ, 3α) καὶ (Λ, 4α) ἔχουν διάκεντρον ΚΛ = 5α. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κοινοῦ μέρους των.

1080. Δείξατε ὅτι ἡ ἐπιφάνεια σφαίρας πρὸς τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὴν ἰσοπλεύρου κώνου ἔχει λόγον 4/9. Τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουν καὶ οἱ ὄγκοι τῶν δύο στερεῶν.

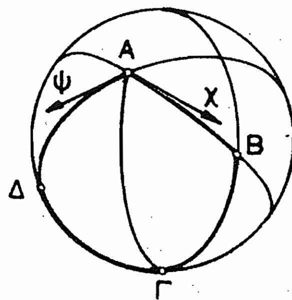
1081. Δείξατε ὅτι ἡ ἐπιφάνεια σφαίρας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὴν κυλίνδρου ἔχουν λόγον 2/3. Τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουν καὶ οἱ ὄγκοι τῶν δύο στερεῶν.

1082. Σφαῖρα (O,R) τέμνεται δι' ἐπιπέδου. Ἐὰν τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο σχηματιζομένων μονοβασικῶν ζωνῶν, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ ἐπιπέδου τομῆς ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.

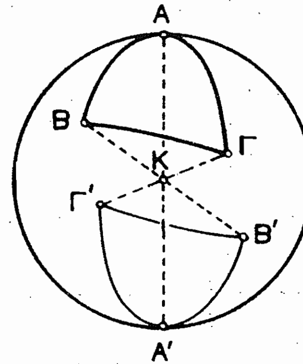
ΣΦΑΙΡΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

580. Ὁρισμοί. Σφαιρικὸν πολύγωνον καλεῖται ἓν τμῆμα σφαιρικῆς ἐπιφανείας, περατούμενον εἰς κυκλικὰ τόξα μεγίστων κύκλων τῆς σφαίρας, τὰ ὁποῖα νοοῦνται ὄχι μεγαλύτερα ἡμικυκλίου (σχ. 592).

Τὰ κυκλικὰ τόξα, εἰς τὰ ὁποῖα περατοῦται ἓν σφαιρικὸν πολύγωνον,



Σχ. 592



Σχ. 593

καλοῦνται **πλευραὶ** τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν πλευρῶν καλοῦνται κορυφαὶ αὐτοῦ.

Διαγώνιος σφαιρικοῦ πολυγώνου καλεῖται τὸ ἔλασσον κυκλικὸν τόξον μεγίστου κύκλου (π.χ. $\widehat{ΑΓ}$), τὸ ὁποῖον περατοῦται εἰς δύο κορυφὰς τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου, αἱ ὁποῖαι δὲν ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν πλευράν.

Γωνία δύο διαδοχικῶν πλευρῶν $\widehat{ΑΒ}$ καὶ $\widehat{ΑΔ}$ σφαιρικοῦ πολυγώνου καλεῖται ἡ γωνία $x\widehat{Α}y$ τῶν δύο ἐφαπτομένων ἡμιευθειῶν, τῶν ὁμορρόπων πρὸς τὰ τόξα $\widehat{ΑΒ}$ καὶ $\widehat{ΑΔ}$ (σχ. 592). Ἡ γωνία αὐτη, ἡ ὁποία συμβολίζεται καὶ ὡς γωνία $\widehat{Α}$ τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου ἢ καὶ ὡς $Β\widehat{Α}Δ$, ἰσοῦται πρὸς τὴν δίεδρον γωνίαν τὴν ὁποίαν σχηματίζουν τὰ ἐπίπεδα τῶν μεγίστων κύκλων τῶν τόξων $\widehat{ΑΒ}$ καὶ $\widehat{ΑΔ}$.

Τὸ ἁπλούστερον τῶν σφαιρικῶν πολυγώνων εἶναι τὸ **σφαιρικὸν δίγωνον,** τὸ ὁποῖον ταυτίζεται μὲ σφαιρικὴν ἄτρακτον (§ 573).

581. Σφαιρικὸν τρίγωνον. Τὰ κύρια στοιχεῖα ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 593) εἶναι αἱ τρεῖς πλευραί του $\widehat{ΑΒ}$, $\widehat{ΒΓ}$, $\widehat{ΓΑ}$ καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι

του $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{\Gamma}$, αἱ ὁποῖαι, κατὰ μέτρον, εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς διέδρους $\widehat{KA}$, $\widehat{KB}$, $\widehat{K\Gamma}$, ὅπου K τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.

Εἰς τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα διακρίνομεν ὡς δευτερεύοντα στοιχεῖα **ὕψη, διαμέσους, διχοτόμους,** τὰ ὁποῖα εἶναι κυκλικὰ τόξα μεγίστων κύκλων, καθοριζόμενα ἀντιστοίχως, ὅπως καὶ εἰς τὰ ἐπίπεδα τρίγωνα. Ἐπίσης διακρίνομεν ἀκτῖνας τοῦ περιγεγραμμένου καὶ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Οἱ χαρακτηρισμοὶ **ἰσοσκελὲς καὶ ἰσόπλευρον** τρίγωνον μεταφέρονται καὶ εἰς τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα, μὲ ἔννοιαν τὴν αὐτὴν τῶν ἐπιπέδων τριγώνων.

Συμμετρικὸν τρίγωνον A′B′Γ′ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ABΓ καλεῖται τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸ κέντρον K τῆς σφαίρας. Αὐτὸ εἶναι σφαιρικὸν τρίγωνον τῆς αὐτῆς σφαίρας.

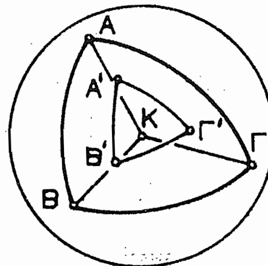
Εἰς κάθε σφαιρικὸν τρίγωνον ABΓ ἀντιστοιχεῖ μία τρίεδρος στερεὰ γωνία K.ABΓ, τῆς ὁποίας αἱ δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι κατὰ μέτρον μὲ τὰς γωνίας τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου. Ἐξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι διὰ τὰς γωνίας $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{\Gamma}$ ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου ἰσχύουν αἱ γνωσταὶ σχέσεις τῶν διέδρων γωνιῶν μιᾶς τριέδρου στερεᾶς γωνίας, ἤτοι : $2^L < \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} < 6^L$ καὶ $\widehat{A} + 2^L > \widehat{B} + \widehat{\Gamma}$, $\widehat{B} + 2^L > \widehat{A} + \widehat{\Gamma}$, $\widehat{\Gamma} + 2^L > \widehat{A} + \widehat{B}$.

Τονίζομεν ἰδιαιτέρως ὅτι ὡς ἕπεται ἀπὸ τὴν πρώτην τῶν προηγουμένων σχέσεων, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν σφαιρικοῦ τριγώνου **δὲν εἶναι σταθερὸν** καὶ μάλιστα ὑπερβαίνει τὰς δύο ὀρθὰς κατὰ γωνίαν μικροτέραν τῶν 4^L, ἡ ὁποία καλεῖται **σφαιρικὴ ὑπεροχή.**

Ἕν σφαιρικὸν τρίγωνον καλεῖται **ὀρθογώνιον** ἢ **μονορθογώνιον, δισορθογώνιον, τρισορθογώνιον,** ἐὰν ἔχῃ ἀντιστοίχως μίαν ὀρθὴν γωνίαν, δύο ἢ τρεῖς.

Εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι, διὰ κάθε σφαιρικὸν τρίγωνον, ἡ κάθε πλευρὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος καὶ μεγαλυτέρα τῆς ἀπολύτου διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, ἤτοι εἶναι $|\widehat{A\Gamma} - \widehat{B\Gamma}| < \widehat{AB} < \widehat{A\Gamma} + \widehat{B\Gamma}$, σχέσεις ἀντίστοιχοι πρὸς ἐκείνας, ποὺ ἰσχύουν διὰ τὰς ἕδρας (ἐπιπέδους γωνίας) τῶν τριέδρων στερεῶν γωνιῶν.

Ἰσότης. Τὰ τέσσαρα θεωρήματα, ποὺ ἀναφέρονται εἰς τὴν ἰσότητα τῶν τριέδρων στερεῶν γωνιῶν (§ 485 ἕως 488), μεταφέρονται καὶ διὰ τὴν ἰσότητα τῶν σφαιρικῶν τριγώνων καὶ συνοψίζονται εἰς τὴν ἀκόλουθον πρότασιν :



Σχ. 594

Δύο σφαιρικὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα, ἐὰν ἀνήκουν εἰς ἴσας σφαίρας καὶ εἰς αὐτὰ ἀντιστοιχοῦν ἴσαι ἐπίκεντροι στερεαὶ γωνίαι.

582. Πολικὰ σφαιρικὰ τρίγωνα. Εἰς κάθε σφαιρικὸν τρίγωνον καθορίζεται

διαδικῶς ἓν ἄλλο σφαιρικὸν τρίγωνον Α'Β'Γ' τῆς ἰδίας σφαίρας, καλούμενον πολικὸν τρίγωνον τοῦ ΑΒΓ τοιοῦτον ὥστε αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰ δύο τρίγωνα τρίεδροι γωνίαι Κ.ΑΒΓ καὶ Κ.Α'Β'Γ' νὰ εἶναι παραπληρωματικαὶ (σχ. 594). Διὰ τὰ δύο τρίγωνα ἰσχύουν αἱ γνωσταὶ σχέσεις τῶν παραπληρωματικῶν τριέδρων στερεῶν γωνιῶν, ἤτοι, ἐὰν $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{\Gamma}, \widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma}$ καὶ $\widehat{A'}, \widehat{B'}, \widehat{\Gamma'}, \widehat{\alpha'}, \widehat{\beta'}, \widehat{\gamma'}$ εἶναι τὰ ἓξ κύρια στοιχεῖα τῶν δύο τριγώνων ἀντιστοίχως, τότε : $\widehat{A} + \widehat{\alpha'} = \widehat{B} + \widehat{\beta'} = \widehat{\Gamma} + \widehat{\gamma'} = 2L$ καὶ $\widehat{\alpha} + \widehat{A'} = \widehat{\beta} + \widehat{B'} = \widehat{\gamma} + \widehat{\Gamma'} = 2L$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

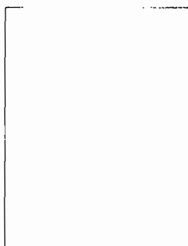
1083. 'Εὰν ἡ μία κάθετος πλευρὰ ἑνὸς μονορθογωνίου σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι ὀρθή, τότε τὸ σφαιρικὸν τοῦτο τρίγωνον εἶναι δισορθογώνιον.

1084. 'Εὰν αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ ἑνὸς μονορθογωνίου σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι ὀρθαί, τότε τὸ σφαιρικὸν τοῦτο τρίγωνον εἶναι τρισορθογώνιον.

1085. 'Εὰν αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ ἑνὸς μονορθογωνίου σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μικρότεραι τῶν 90^0, τότε καὶ ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ θὰ εἶναι μικροτέρα τῶν 90^0.

1086. 'Εὰν αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ ἑνὸς μονορθογωνίου σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μεγαλύτεραι τῶν 90^0, τότε ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ εἶναι μικροτέρα τῶν 90^0.

1087. 'Εὰν μία κάθετος πλευρὰ ἑνὸς μονορθογωνίου σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τῶν 90^0 καὶ ἡ ἄλλη μεγαλυτέρα τῶν 90^0, τότε ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ εἶναι μεγαλυτέρα τῶν 90^0.



ΕΚΔΟΣΙΣ Α', 1975 (ΙΧ) — ΑΝΤΙΤ. 353.000 — ΣΥΜΒΑΣΙΣ: 2616/7-6-75

ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ: Μ. ΠΕΧΛΙΒΑΝΙΔΗΣ & ΣΙΑ - Α. Ε.